怎樣學習幾何定理

張遠達著

中国青年出版社

怎樣學習幾何定理

張 遠 達 著

中國青年出版社
一九五五年·北京

內容提要

本書從證明三角形全等所發生的問題出發，用三角形和圓這兩部分的某些主要定理作爲例子，來說明怎樣學習幾何定理，並且利用圖表來表明這些定理彼此間的聯系，目的是爲了幫助初中同學學習平面幾何時知道怎樣思考問題的方法，引起他們學習的興趣。

書號672 數理化67

怎樣學習幾何定理

著者 張遠達

出版者 中國青年出版社（青年·開明聯合組織）北京東四12條老君堂11號

總經售 新華書店

印刷者 北京中國青年出版社印刷廠

開本 787×1092 1/32 一九五五年五月北京第一版

印張 2 5/16 字數 43,000 一九五五年五月北京第一次印刷

定價（7）0.24元 印數 1—55,000

北京市書刊出版業營業許可證出字第036號

寫在前面

我寫這本小册子的用意，是想幫助剛開始學習平面幾何的初中同學怎樣去思考問題、怎樣去系統掌握知識，並引起同學們學習的興趣；同時也想藉這點東西幫助初中的數學教師們提高思考的方法，冀能對教學有所改進；所以我把‘怎樣學習幾何定理’作爲書名. 我寫的方式並不是像一般的教科書那樣：先從點的定義和公理等等開始，然後再從那些定義和公理推出一些基本性質，如由歐氏平行公理推得所謂內錯角相等、同位角相等以及三角形三內角和等於二直角，於是三角形的任一外角大於內對角等等，又如由歐氏公理‘兩點間的綫段是經過兩點的最短綫’推得三角形一邊小於另二邊之和而大於另二邊之差等等，而是把這些都認爲是讀者已經了解了的東西. 我的寫法是從證明三角形全等所發生的問題開始，用三角形和圓這兩部分的某些主要定理作爲例子來說明怎樣學習定理，使讀者可以舉一反三把這方法應用到幾何的別的部分去；並且爲使讀者能夠有系統地了解起見，盡量地把一些寫過了的東西用圖表畫出來以表明彼此間的聯系. 同時有些定理在一般的教科書上是用反證法來證明的，但初學幾何的同學往往對反證法總感覺有點不瞭然，而同時又因爲證明的方法沒有錯誤，於是同學們又指不出感覺不瞭然的癥結之處，可是思想上好像總有一個疙瘩存在，因此我寫的時候能避免用

反證法的盡量避免，如第12頁的引伸定理8和第66頁定理4。我的學識淺薄，經驗也不夠，辭不達意的地方一定很多，希望讀者多多提供意見和給以批評，是幸！

張遠達於珞珈山武漢大學　1954年9月10日

目　次

一 直綫形

三角形的全等

初中平面幾何書上有三個關於三角形全等的定理。一個是兩個三角形如果有兩邊及其夾角對應相等就是全等形，一個是兩個三角形如果有兩角及其夾邊對應相等就是全等形，再一個是兩個三角形如果三邊都對應相等就是全等形。我們現在來回想一下這三個定理是怎樣證明的。證明前兩個定理是用的重疊法，後一個定理照平常想法總也可以用重疊法，可是事實上行不通，那麼到底爲什麼行不通呢？這其中的關鍵究竟在什麼地方呢？爲敍述完整起見，我們還是把這三個定理逐一地寫下來，然後再證明，看看最後究竟發生了什麼樣的問題，又應該怎樣去解決它。

定理 1 兩個三角形如果有兩條邊及它們的夾角對應相等就全等。

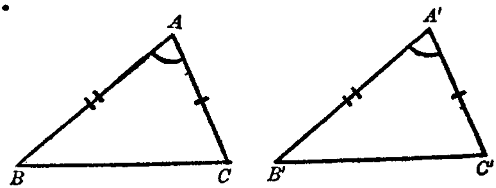


圖 1.

假設 $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A=\angle A'$

求證 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

證明 把$\triangle ABC$搬到$\triangle A'B'C'$上，使A點和A'點重合，AB落到$A'B'$上，這時候由於$AB=A'B'$，所以B點也就和B'點相重合．又因爲$\angle A=\angle A'$，於是AC不得不落到$A'C'$上，而且由假設又因爲$AC=A'C'$，所以C點和C'點也就重合了．既然綫段BC的兩個端點B及C分別和綫段$B'C'$的兩個端點B'及C'相重合，所以BC邊也就和$B'C'$邊相重合．因之兩個三角形完全重合，就是 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$．

定理2 兩個三角形如果有兩個角及它們的夾邊對應相等就全等．

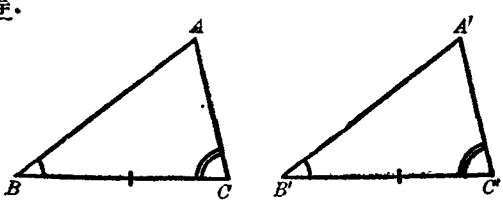


圖 2.

假設 $\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$BC=B'C'$

求證 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

證明 把$\triangle ABC$搬到$\triangle A'B'C'$上，使B點和B'點重合，BC落到$B'C'$上，由於$BC=B'C'$，C點就和C'點重合了．又因爲$\angle B=\angle B'$，當然BA就落到$B'A'$上；同樣的道理由於$\angle C=\angle C'$，CA也就落到$C'A'$上．如果把A點看做在BA邊上，由於BA已經落到$B'A'$上，當然A點也就落到$B'A'$這一條綫上；如果再把A點看做在CA邊上，又由於CA已經落到$C'A'$上，所以A點又必定落到$C'A'$這一條綫上；這樣一來，同一個點A既然落到$B'A'$這一條綫上，又落到$C'A'$這一條綫

上，那麼 A 點勢必落到 $B'A'$ 和 $C'A'$ 的交點上，然而 $B'A'$ 和 $C'A'$ 只有一個交點 A'，所以 A 點就落在 A' 點上．於是兩個三角形就完全重合了，就是　$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$．

定理 3　兩個三角形的三條邊如果對應相等，那麼這兩個三角形就是全等形．

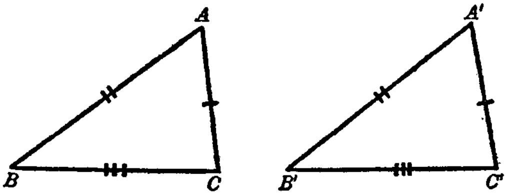


圖 3．

假設　$AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'$

求證　$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

如果我們仍舊用證明定理 1 或 2 的重疊法來證明定理 3，那就行不通了，爲什麼呢？譬如說把 $\triangle ABC$ 搬到 $\triangle A'B'C'$ 上，使 B 點和 B' 點重合，BC 落到 $B'C'$ 上，固然由於 $BC = B'C'$，C 點和 C' 點可以重合，但是題意並沒有假設 $\angle B = \angle B'$，$\angle C = \angle C'$，因之 BA 是否一定落在 $B'A'$ 上，CA 是否一定落在 $C'A'$ 上，就沒有充分的保證．既然不能肯定 BA 或 CA 是否分別落到 $B'A'$ 或 $C'A'$ 上，當然這兩個三角形是否全等形也就成了問題．這也就說明了想用重疊法像證明定理 1 或 2 的那樣照樣畫葫蘆來證明定理 3 是失敗了，失敗的原因是由於不知道定理 3 中任何一對對應角的大小．那麼這定理 3 究竟應該怎樣去證明呢？固然直接用重疊法是行不通的，可是如果我

們把重疊法略微變更一下，看會產生什麼樣的問題.

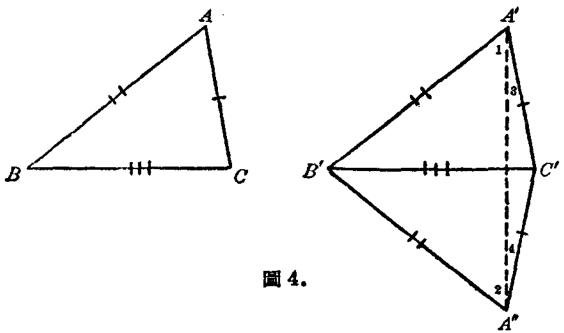


圖 4.

我們還是先搬動 $\triangle ABC$，但是不把 $\triangle ABC$ 重疊在 $\triangle A'B'C'$ 上，而是搬到像圖 4 中的 $\triangle A''B'C'$ 那樣的地位，使得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的頂點 A 和 A' 分居在 $B'C'$ 的兩旁. 由於 B 點落到 B' 點上，BC 邊落到 $B'C'$ 邊上，並因為 $BC=B'C'$，所以 C 點和 C' 點就重合了. 若是我們能證明 $\triangle A''B'C' \equiv \triangle A'B'C'$，那麼因為 $\triangle A''B'C'$ 就是 $\triangle ABC$ 移動以後所佔有的位置，所以 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$，從而定理 3 也就證明了. 要證明 $\triangle A''B'C' \equiv \triangle A'B'C'$，我們就得看看它們當中已經有了一些什麼樣的關係. 當然，$A''B'=A'B'$（因為 $A''B'$ 就是 AB，而 $AB=A'B'$），同理，$A''C'=A'C'$，於是 $\triangle A''B'C'$ 和 $\triangle A'B'C'$ 已經有兩條邊對應相等. 根據前面我們已學過了的定理 1，若是我們能夠想法證出 $\angle A''=\angle A'$ 的話，那麼也就能證得 $\triangle A''B'C' \equiv \triangle A'B'C'$. 因此我們的思想就應該轉到設法證明 $\angle A''=\angle A'$ 上. 但是要直接證明 $\angle A''=\angle A'$，顯然是不能夠的. 試把 $A'A''$ 連起來，於是由圖可知 $\angle A'=\angle 1+\angle 3$，$\angle A''$

$=\angle 2+\angle 4$. 我們就想到如果能證明$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$,再利用等量加等量其和相等的公理就證明了 $\angle A''=\angle A'$. $\angle 1=\angle 2$到底能否證明,我們現在還不敢斷言,可是不妨試試看;究竟從什麼地方着手呢?我們曉得$A''B'=A'B'$,所以$\triangle A''A'B'$是等腰三角形,因此要證明$\angle 1=\angle 2$,就得證明等腰三角形的兩底角相等;如果能證明這句話,那麼不但能證明$\angle 1=\angle 2$,連$\angle 3=\angle 4$也同樣能夠證明了. 要證明等腰三角形的兩底角相等,當然還不能從我們已學過了的定理1及2證得. 我們再回頭看看:如果能證明$\triangle A''B'C'\equiv\triangle A'B'C'$,那麼$\angle A'B'C'=\angle A''B'C'$,這就說明了$B'C'$是等腰$\triangle A''A'B'$的頂角的平分綫,那麼我們就根據這個綫索去想吧,實際上這樣想是行得通的,我們把它寫成定理的形式如下:

補助定理 I 等腰三角形的兩底角相等.

假設 $\triangle ABC$ 是等腰三角形$(AB=AC)$

求證 $\angle B=\angle C$

證明 作$\angle A$的平分綫 AD, 於是$\angle 1=\angle 2$(圖5). 在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中,有了$AB=AC$(假設),$AD=AD$,$\angle 1=\angle 2$,所以根據定理1就有$\triangle ABD\equiv\triangle ACD$,因之$\angle B=\angle C$,這樣補助定理1就證明了.

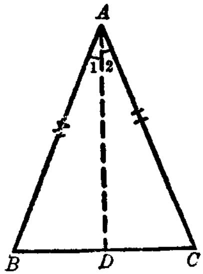


圖 5.

補助定理1既證明了,從而定理3也就證明了. 我們再回想一下:定理1,2,3本來是平行的定理,然而證明定理1和2可直接用重疊法,證明定理3直接用

重疊法就行不通，要藉助補助定理1，換句話說，須把補助定理1插在定理2之後才可以證明定理3．現在將這幾個定理的關係用圖解的方式表達如下：

三個關於三角形全等的定理

↓

定理1　　定理2　　(插入)補助定理1 ⟶ 定理3

現在我們再回想一下：爲要證明定理3，須得先證明補助定理1；補助定理1是說等腰三角形的兩底角相等，於是自然又會發生一個問題，那就是補助定理1的逆定理是不是正確呢？即是如果一個三角形有兩個角相等，那麼這三角形是不是等腰三角形呢？這是我們的思考方法之一．實際上，這個問題的答案也是肯定的，我們把它寫下來．

補助定理 2　有兩個角相等的三角形是等腰三角形．

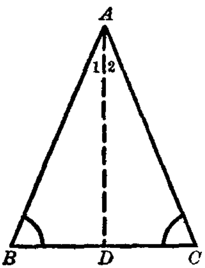


圖 6.

假設　$\triangle ABC$中 $\angle B=\angle C$（圖6）

求證　$AB=AC$

在證明這定理以先，還要說明一下，就是證明補助定理1的時候，是藉作$\angle A$的平分綫（圖5）來進行的，同樣我們現在來證明補助定理2，也還是從這一點出發．

證明　作$\angle A$的平分綫AD（圖6），於是$\angle 1=\angle 2$．所以在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，因爲$\angle B=\angle C$，$\angle 1=\angle 2$，就有$\angle ADB=\angle ADC$（兩三角形如有兩個角對應

相等，第三個角也相等)；再因 $AD=AD$，所以 $\triangle ABD\equiv\triangle ACD$，於是 $AB=AC$，這樣補助定理 2 就證明了.

補助定理 2 固然是補助定理 1 的逆定理，這是從補助定理 1 本身的意義上看出來的；如果我們再從補助定理 1 的證明方法上來看，看可以看出一些什麽問題. 根據這些所看出來的問題，能夠得出什麽樣的結論，再由這些結論怎樣推出其他問題，這就告訴我們怎樣去思考問題. 現在我們就慢慢地來談.

我們已經曉得證明補助定理 1 是藉作 $\angle A$ 的平分綫(圖 5)來進行的，而最後的結論 $\angle B=\angle C$ 是藉 $\triangle ABD\equiv\triangle ACD$ 的關係得出來的. 然而由 $\triangle ABD\equiv\triangle ACD$ 不僅能推得 $\angle B=\angle C$，並且還能推得 $BD=CD$，及 $\angle ADB=\angle ADC$ 就是 $AD\perp BC$. 而 $BD=CD$ 是表示 AD 是 BC（底邊）的中綫，$AD\perp BC$ 是表示 AD 是 BC(底邊)上的高. 所以把它們歸納起來就能得出這樣的意義，等腰三角形的頂角平分綫必垂直且平分底邊. 今爲看起來簡單顯明起見，將‘等腰’($AB=AC$)用號碼(1)來表示，‘$\angle A$ 的平分綫 AD’用號碼(2)來表示，‘底邊 BC 上的高’用號碼(3)來表示，‘底邊 BC 上的中綫’用號碼(4)來表示，於是上面所說的等腰三角形的頂角平分綫必垂直且平分底邊的意思是說：有了(1)及(2)就得出(3)及(4)，用圖表法表示就是說：(1)，(2)⟶(3)，(4).(⟶表示推得的意思.)

上面所謂(1)，(2)⟶(3)，(4)這一個命題是說有了兩個假設(1)和(2)就有兩個終結(3)和(4)，於是這一個

命題的逆命題(是否正確姑且不談)當然有五：

(一)(1),(3)⟶(2),(4)；

(二)(1),(4)⟶(2),(3)；

(三)(3),(4)⟶(1),(2)；

(四)(2),(3)⟶(1),(4)；

(五)(2),(4)⟶(1),(3).

現在我們不妨分別地一個一個來試試看.

一 (1),(3)⟶(2),(4).

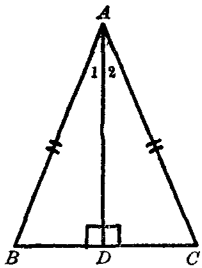


圖7.

假設 $AB=AC, AD\perp BC$(圖7)

求證 $\angle 1=\angle 2$, $BD=CD$

證明 $\triangle ABC$中$AB=AC$(假設),所以$\angle B=\angle C$. 又因爲$AD\perp BC$,所以$\angle ADB=\angle ADC=\angle R$. 於是$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中既有$\angle B=\angle C$, $\angle ADB=\angle ADC$,所以$\angle 1=\angle 2$(兩三角形如有兩個角對應相等,第三個角也相等),就是(2)被證明了,因之由補助定理1的證明的方法知(4)也能證明,就是$BD=CD$.

二 (1),(4)⟶(2),(3).

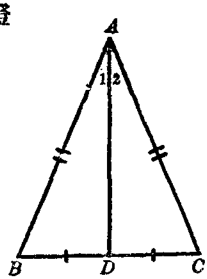


圖8.

假設 $AB=AC, BD=CD$(圖8)

求證 $\angle 1=\angle 2, AD\perp BC$

證明 $AB=AC, BD=CD$(假設),但$AD=AD$,所以$\triangle ABD\equiv\triangle ACD$(三條邊對應相等),於是$\angle 1=\angle 2$,且$\angle ADB$

$=\angle ADC$ 就是 $AD\perp BC$.

三　(3),(4)⟶(1),(2).

假設　$AD\perp BC, BD=CD$(圖 9)

求證　$AB=AC, \angle 1=\angle 2$

證明　因爲 $AD\perp BC$ (假設),所以 $\angle ADB=\angle ADC=\angle R$; 又因爲 $BD=CD$(假設),而 $AD=AD$,所以$\triangle ABD\equiv\triangle ACD$(兩邊夾一角). 因之 $AB=AC$, $\angle 1=\angle 2$.

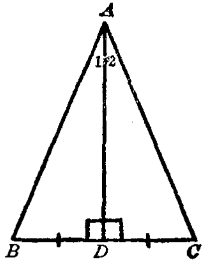


圖 9.

四　(2),(3)⟶(1),(4).

假設　$\angle 1=\angle 2, AD\perp BC$(圖 10)

求證　$AB=AC, BD=CD$

證明　因爲 $AD\perp BC$,所以 $\angle ADB=\angle ADC=\angle R$; 又因爲 $\angle 1=\angle 2$ (假設), 且 $AD=AD$, 所以 $\triangle ABD\equiv\triangle ACD$. 因之 $AB=AC, BD=CD$.

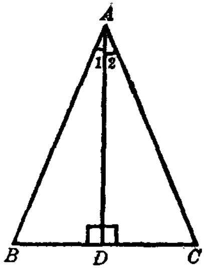


圖 10.

五　(2),(4)⟶(1),(3).

假設　$\angle 1=\angle 2, BD=CD$(圖 11)

求證　$AB=AC, AD\perp BC$

證明　證明這個命題直接用我們已經知道的定理 1,2,3 和補助定理 1,2 是有困難的,所以我們還得作出補助綫. 先延長 AD 到 E 使 $DE=AD$,於是 $\angle ADB=\angle CDE$ (對頂角), 且因爲 BD

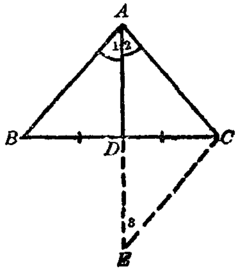


圖 11.

$=CD$(假設),所以$\triangle ABD\cong\triangle CED$(兩邊夾一角),因之$AB=CE$及$\angle 1=\angle 3$. 但$\angle 1=\angle 2$(假設),所以$\angle 2=\angle 3$. 由是根據補助定理2就知道$AC=CE$,隨而就有$AB=AC$. 再根據第二命題又有$AD\perp BC$.

這麼一來,前面五個命題都給我們證明是正確的了. 若再用言語把由(1),(2)得(3),(4)以及其他五個命題一一表達出來,它們分別是

引伸定理1 等腰三角形的頂角平分綫必垂直且平分底邊.

引伸定理2 等腰三角形底邊上的高必平分頂角且平分底邊.

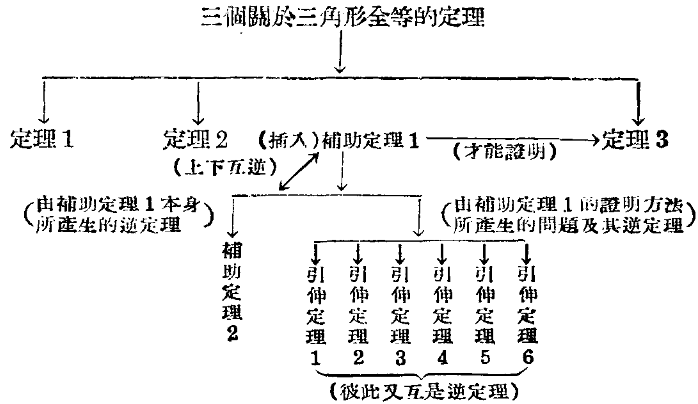
引伸定理3 等腰三角形底邊上的中綫必平分頂角且垂直於底邊.

引伸定理4 三角形一邊上的高如果又是這一邊上的中綫,那麼這三角形是等腰三角形且該高(或中綫)又平分頂角.

引伸定理5 三角形中一角的平分綫若是對邊上的高,那麼這三角形是等腰三角形且該平分綫(或高)又是底邊上的中綫.

引伸定理6 三角形中一角的平分綫若是對邊上的中綫,那麼這三角形是等腰三角形且該平分綫(或中綫)又是底邊上的高.

現在我們再來把上面的各個結果總結一下,用圖解的方式連串起來,看看彼此間的關係:



我們再把補助定理 1 和補助定理 2 的意義回顧一下，補助定理 1 是說一個三角形如有兩條邊相等，那麼它們所對的角也就相等；補助定理 2 恰好是補助定理 1 的逆定理，它是說一個三角形如有兩個角相等，那麼它們所對的邊也就相等。簡單地說，這兩個補助定理的意思是邊等角也等，反之角等邊也等。於是問題就發生了，就是邊不等角又怎樣？角不等邊又怎樣？當然邊不等角必不相等，因爲角等邊也等，就和邊不等的假設相衝突了。同樣的道理，也知道角不等邊也必不相等。問題的關鍵不是等不等，而且實際上，等不等的問題能很容易地看出來；問題的關鍵是誰大誰小，換句話說，是不是邊不等的時候大邊所對的角就一定大些呢？是不是角不等的時候大角所對的邊也就一定要大些呢？這是我們思想上自然會發生的問題。我們把問題的答案用定理的形式寫出來。

引伸定理 7　<u>一個三角形的兩邊不等，那麼大邊所對的角較大。</u>