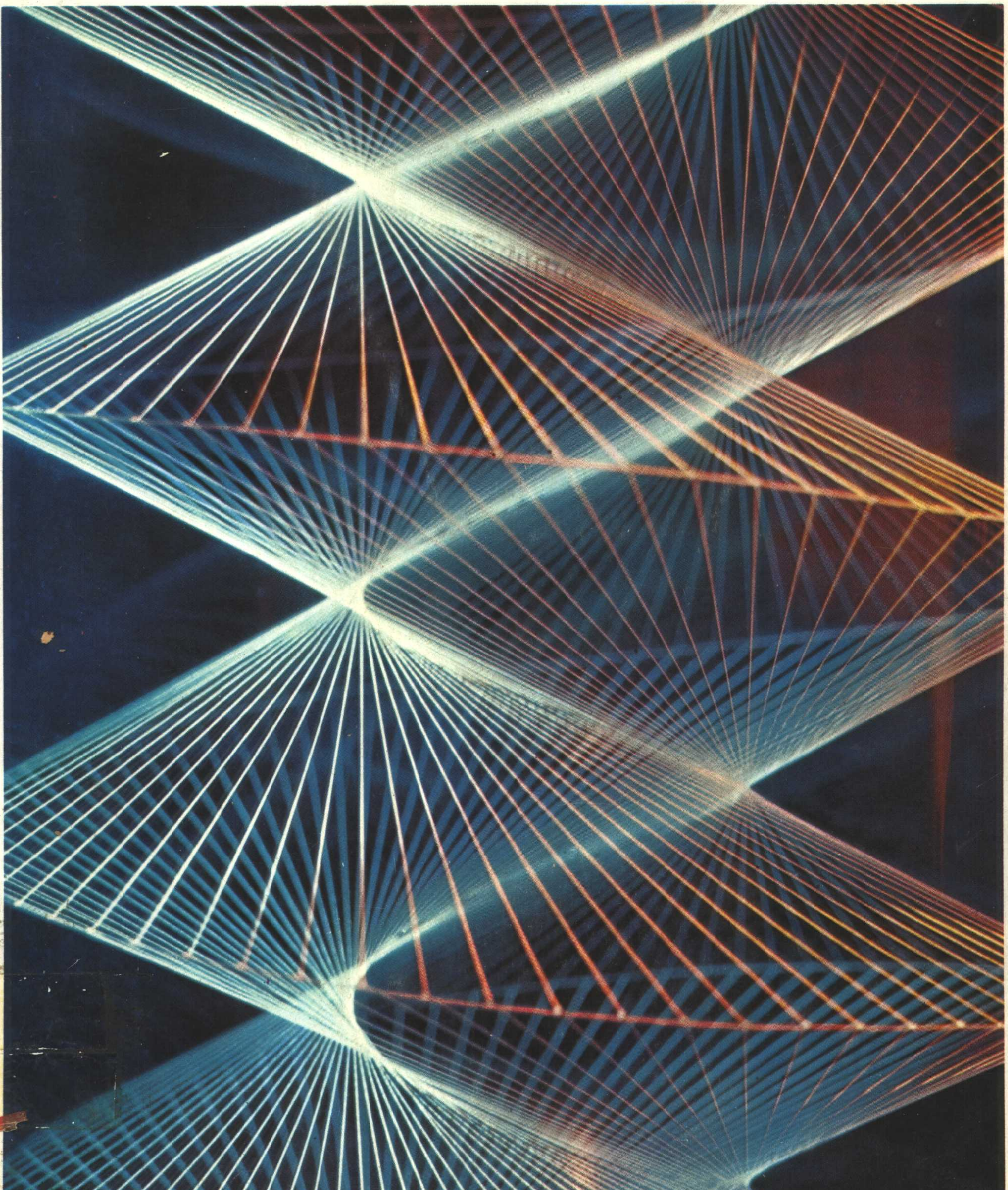
生活科学文库

数学



生活科学文库

数 学

丛书:

SERIES:

航海的人们	THE SEAFARERS
第二次世界大战	WORLD WAR II
人类的行为	HUMAN BEHAVIOR
世界原野奇观	THE WORLD'S WILD PLACES
世界各大城市	THE GREAT CITIES
缝纫的艺术	THE ART OF SEWING
人类的起源	THE EMERGENCE OF MAN
时代生活园艺百科全书	THE TIME-LIFE ENCYCLOPEDIA OF GARDENING
生活摄影丛书	LIFE LIBRARY OF PHOTOGRAPHY
世界烹饪丛书	FOODS OF THE WORLD
时代生活艺术文库	TIME-LIFE LIBRARY OF ART
人类的伟大时代	GREAT AGES OF MAN
生活科学文库	LIFE SCIENCE LIBRARY
生活自然文库	LIFE NATURE LIBRARY
家庭实用丛书	FAMILY LIBRARY

专辑:

SINGLE TITLES:

生活杂志精粹	BEST OF LIFE
生活的电影世界	LIFE GOES TO THE MOVIES
生活在战争中	LIFE AT WAR
婴儿是怎样形成的	HOW BABIES ARE MADE
濒临绝种的动物	VANISHING SPECIES
摄影的技术	THE TECHNIQUES OF PHOTOGRAPHY

生活科学文库

数学

大卫·伯尔格米尼
与时代－生活丛书编辑合著

原出版者：时 代 公 司
特辑版出版者：科学出版社
时 代 公 司

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目录

1 数：从 1 到 0 的漫长道路 8
图与文：计算：从手指到人工脑 18

2 古希腊人的形象思维 38
图与文：一些代表人物：杰出的数学大师 50

3 一种转移未知数的字母 62
图与文：古代文化的卓越继承 70

4 曲线与数量的美满联姻 80
图与文：自然界与艺术作品中的数学美 88

5 掌握运动的奥秘 104
图与文：微积分：探索变动中的世界的一种手段 114

6 在一个不确定的世界中计算各种可能性 126
图与文：概率与机会的迷人游戏 134

7 向蓝天深处迈一大步 148
图与文：改变人们宇宙观的三位学者 158

8 数学的现状：成绩、疑虑与梦想 168
图与文：拓扑学：研究畸变的数学 176

志谢及图片来源 192
新数学：课堂里的革命 193
参考书目 196
索引 197

时代－生活丛书

总编辑：Jerry Korn

生活科学文库特辑版
编辑：徐一帆

本书译者：谈祥柏

Authorized Chinese language edition
©1981 Time Inc.
Original U.S. English language edition
©1980 Time-Life Books Inc. All rights reserved.
Second edition. First printing.

内容提要

一门科学——它是所有其他科学的一个基本工具——的历史概貌构成了本书各章正文、图与文的主题。在着重讲述这个历史进程中的著名人物的同时，这本书也描写了数学发展的各个阶段——从简单计数到诸如拓扑学与超限数那样的高深研究等。此外，本书还探讨了数学为其他科学的精确化而作出贡献、并从它们的发现中引出了新挑战的某些方法。

在各章正文之后，都补充有图与文。有些图与文更深一层地阐明了正文的要点，有时则是为了引进一些补充材料。每章的正文和图与文是一个统一的整体，但是也可以分开来阅读。例如第四章的正文叙述了解析几何的发展史，它后面的图与文则清楚地描绘了自然界与艺术作品中几何与美学之间的联系。

在书后的附录中，对目前已在美国许多中小学里讲授的、受人议论甚多的新数学作了解释与估价。

作者

大卫·伯尔格米尼(David Bergamini)是一位科普作家。在第二次世界大战中，他才十几岁，被关在日本集中营里，第一次受到数学的深深吸引，那里仅有的几本书中有代数、几何与三角课本。他是“生活自然文库”中《宇宙》与《澳洲的土地和野生动物》两书的作者，“生活科学文库”中《科学家》一书的作者之一。他的论文《科学的语言》被收入一些选集。

1

数:
从1到0的漫长道路

数学的开端

一个专心致志的小学生在努力学习计数。在此过程中，她是在重演人类数学发展的最早阶段。计数与史前人类同样古老，人学会了计数以后，发明了表示数的字眼，更晚一些，有了用符号表示的数目字。

射电天文学家们相信，有朝一日，他们的一位同事将会亲身经历到一种无比的兴奋——从居住在其他恒星的行星上的智能生物那里收到这些生物传来的第一个信息。如果他们的想法果真是对的话（每一项科学道理都认为他们真可能是对的），那么他们又将如何译出这一信息呢？人间天上，智能生物无论是在进化环境还是在生物结构上都与我们大相径庭，我们能够理解其话语吗？在深思熟虑这个问题之后，科学家们得出结论说，最有可能使任何地方的智能生物都得以理解的某种信息，也许是一个数字的信息。

譬如说，一个高度文明的球外种族可能会播送一种简单编码的算术，并将它不断重复，如同一个持续的呼唤信号。“必，必必，必必必”可能意味着“计数：一，二，三”。“的一达一的”——间歇——“的一的”，也许意味着“一加一等于二”。一旦这些简单信号被检测出来并加以回答，成批的数学事实与公式就可以相互交流，以建立一部可供进一步通信联络用的基本辞典。

在美国西弗吉尼亚州格林班克地方的国立射电观象台，射电天文学家们当真已经用巨大的浅碟形天线对准两颗遥远的恒星——鲸鱼座的 τ 星与波江座的 ϵ 星，来收听用数学方式组织起来的嘟嘟声。科学家们认真地进行了上述种种努力以着重说明数学的普遍意义，这种意义人人都觉察到了，却没有人知道怎样去定义。陶醉于这种无法加以定义的东西，世界上许多最杰出的思想家已作出判断：数学代表绝对真理。柏拉图说：“上帝从来都喜欢几何化。”19 世纪，普鲁士学者雅可比(Carl Gustav Jacob Jacobi)也学舌地说：“上帝从来都喜欢算术化。”在我们自己的时代，英国物理学家秦斯（James Jeans）爵士则郑重宣称：“宇宙的伟大建筑师现在开始以一位纯粹数学家的面貌出现。”

在今天，虽然数学家们肯定了他们的学科的通用性，可是许多人否认它是有任何绝对性质的真理。实际上，一个为人喜爱的关于数学的定义，是罗素（Bertrand Russell）的机智的总结：“（数学即）我们永远不会了解所谈论的到底是些什么东西，也不知道所说的到底是否正确的学科。”这个定义说的并不是客气话，它是人们所曾讲过的、最为自满、最普罗米修斯式的一句大话。因为实际上这些数学家是在说，他们的工作，能够适用于我们的世界与宇宙，这是由于他们是把它设计成为可以应用于凡是遵循逻辑推理的途径所能想象得出的、一切可能的世界与宇宙的。他们是在说，数学最终达到了如此玄妙的一种境界：任一给定前提的真或不真已经不再起作用了。他们说，真正重要的事情是：从前提如何正确地推导到它

的结论。利用这一准则，一位数学家可以眼睛眨也不眨地声言，月亮是用青青的干奶酪造成的。再通过一系列更进一步的前提，他可以令人信服地论证，并最后得出结论说，登月者应当带点脆饼干去。

数学并非只是作为一种特殊语言的知识实体，这种语言是如此的完美抽象，以致——我们对之抱有希望——它能为宇宙中一切智能生物所理解，而不管这些生物的感官有何差别。这种语言的语法——它的正确用法——决定于逻辑法则，其词汇包括一些符号，例如：

数目字代表数；

字母代表未知数；

方程代表数与数之间的关系；

π 代表一个圆的周长与直径之比；

sin（表示正弦），cos（表示余弦），tan（表示正切）代表一个直角三角形中的各边之比；

$\sqrt{\ }$ 代表开平方；

∞ 代表无穷大；

$\sum$，$\int$，∂ 及 $\rightarrow$ 分别表示高等数学里与之对应的一些概念。

所有这些符号大大有助于科学家，因为它们能简化他的思维。但是，对许多外行人来说，它们也使数学看来不象一种通用语言，却象是阻梗在现代社会的两种文化（它们分别由科学家与人文学者来代表）之间的巨大的语言障壁。

只有一部分数学词汇已为科学所抢先占用了，其余的一些，以及全部语法，则依然留在一般人类思想的圈子里。的确，对哲学、经济学、军事战略、音乐作曲、绘画透视与客厅游戏，数学还有很多事情要做，正如它已经对原子物理做了很多事情那样。由于它的艺术趣味，任何一个有数学素养的人，将会高度热爱它，而其热情将不亚于芭蕾舞、上等银器、古物或者任何一种其它文明装饰品的爱好者的感受。

从纯数学的美学方面，以及它的毫不关心实际的特点来看，它象是梦想家们所曾设计过的最无目的性的一种追求。但是，即使不久以前仍被认为是完全无用的数学分支，在今天对于企业家、将军们和政府计划人员却已是极端重要的。如果没有数学研究中作为副产品而发展出来的物理定律与技术科学，我们的文明将难以存在。不应用古代美索波达米亚人与印度人所发明的算术，就没有人能够结算他的支票簿。不利用埃及数学家发展起来的几何测量与制图技术，就没有人能够建起一堵墙。“地球也许是球

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

形”，抱有这种观念的人正是希腊的几何先驱者们。古典数学，从黑暗时代的湮没无闻中一经得救，就立即帮助点燃了哥伦布时代的冒险精神。缔造工业革命的人们在机器方面获得自信，在继续伽利略与牛顿的（一部分是数学，一部分是科学的）研究工作中也是如此。今天，原子研究强烈地依赖着爱因斯坦的相对论，而后者则又利用了许多玄妙的19世纪的代数推测。

在古代，数学的两大台柱是算术——数的科学，及几何——图形与空间关系的科学。在许多世纪里，算术得到了代数的补充，后者为含有未知量的算术计算提供了一种简化记法。到了17世纪，算术、代数以及几何在“解析几何”中得到了统一，后者提供了一种办法，把数映射为一个图形上的点，把图形变成方程。这种新的几何的解析手段——用一个数学分支来阐明另一个数学分支——打开了通向一大批高等数学学科的道路，而这些学科都是围绕着“解析”这样一个字眼的。

数学解析的第一个产物是微积分，它是一种通过点和数来分析在连续过程中总是伴随在一起的运动与变化的理论体系，这就使科学家们有可能解决动力学中的一些问题。例如，研究一个波的涟漪，一颗流星的轨迹，当然还有自然界中一切较简单的波折与起伏。当技术人员设计汽车或为火箭定向时，微积分仍然是他们的一个支柱。

赌徒、预测选举结果者与原子

当微积分首次见于应用时，许多科学家相信，它最终将会使他们能预言一切运动物体的连续状态。但是大约就在同时，通过研究赌博游戏，数学家们发现了概率规律，它们向他们暗示了几乎潜伏在一切事件序列中的不确定性色彩。在今天，这些规律帮助确定了一位50岁的老人去买一张新的保险单时应付的保险费率。它们也帮助选举预测人来估计各种可能性，以使之能从任意一个选票样本中，作出正确的选举预测。它们也用于原子实验，来统计式地估算弹射模式，这些模式是从原子破碎装置的枪口射击一个靶子时，数以百万计看不见的、比原子还小的粒子所造成的。

利用极其复杂的，从微积分和解析几何里引申出来的一些方程，数学家们想象出了超乎我们视界的几何形状——超出我们常见的长、宽、高三维的几何形状，具有任意维数的几何形状。他们也想象出了无限维空间，把一些几何形体安放进去。高于三维的空间概念对相对论与宇宙学说已经成为基本的概念。它也使计算机与电视等复杂装置中一些有关电场与磁场的困难问题得到了解决。现在，一些几何老手正在通过“拓扑学”——研究

四个常用符号的古代写法

很久以前，早期巴比伦的数学家们就已用符号代替文字叙述来节省时间与人力了。这些简化中有我们现在用的数目字与简单的＋、－、×、÷记号，它们是用来表示加、减、乘、除四种基本算术运算的。这四个基本符号虽然在今天的计算中似乎已是自然而然的，可是在数学历史上相对说来却较新，下面是它们几个老式写法。

加法

文艺复兴时代计算家塔尔塔利亚（Tartaglia）用意大利文più（加）的第一个字母表示“加”。我们现在用的“＋”号可能是拉丁文*et*（与）的一个缩写形式。

减法

这个减号是希腊数学家丢藩都（Diophantus）的心爱之物。我们现在用的减号可能来自一条“横杠”，它曾被中世纪的商人们用来表示货物重量之差。

乘法

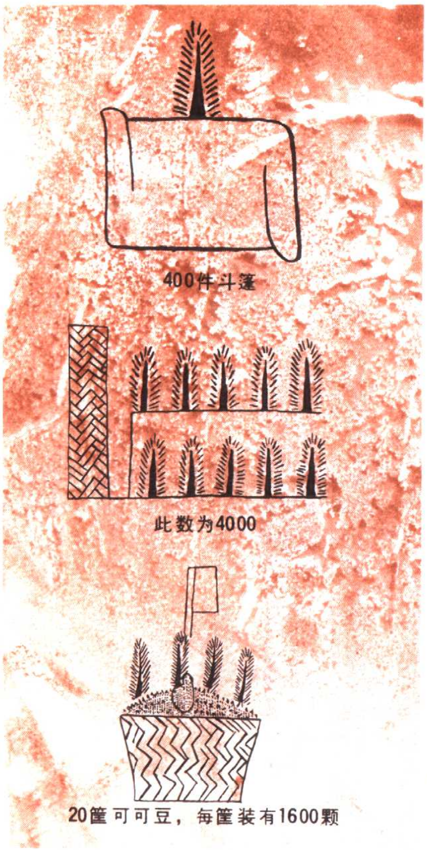
17世纪，莱布尼茨（Leibniz）在德国曾使用这个符号。我们现在用的×号（其基础是圣安德鲁斯的十字架）当时已为人们所知。但是他认为，记号“×”有点太象代数里的“未知数”x了。

除法

在18世纪的法国，伽利玛（J. E. Gallimard）用这个倒写的D表示除法。现在用的除号也许来自简单的分数线，再在其上下分别添加一点。

一个图形在图形本身经过弄皱、拉伸与扭转以后仍然保持不变的那些性质——来追求他们的技艺的更进一步抽象。

一切碧眼者的逻辑



哥伦布以前的数字的记号

生活于15世纪的墨西哥阿芝特克人用图形来画出一些日常器物，其中也常常包括数的记号：一个常见记号是加有缘饰的一只尖头长钉，代表400这个数。在斗篷上画一只长钉(最上图)，就代表“400件斗篷”。十只长钉（中图）表示数4,000。装有可可豆的筐子上的四只长钉表示1,600颗可可豆，钉子上的一面小旗表示有20筐。

别的数学家则已转到另一方面，在一切数学概念中的最基本的概念中去寻找灵感。数论专家们业已回到了我们赖以计数的、易使人误认为非常简单的那些步骤方面。他们反复地下了结论说，通常的整数（即一、二、三……）却是在一切数学课题中最令人为难的、最富于刺激性的，也是最为有趣的。数学家们说，在一般人的推理中所使用的名词和动词要服从各种不同解释，那么为什么不用符号与计算过程来取代呢？这些符号象数目字一样地毫不含糊；而这些计算过程则象加法和乘法一样明白无疑。这门“符号逻辑”的提倡者们，已经在盘算着把一切人类研究的对象，简化为“群”与“集合(或集)”（按逻辑方式集拢在一起的思想或事物的总体，例如“一切碧眼者”，“所有的女司机”等等）的各种办法。他们已在试图找出严格的逻辑方法，即通过把一个群或集合中的元素与其他一个群或集合中的元素进行匹配的办法，来作出不使人感到厌烦的各种比较。

上面所勾画出来的数学项目组成了数学的主要峰峦。无数的悬崖与丘陵，点缀在这些山岭之中。在几何学的众多分支中，包含了投影几何、仿射几何、欧几里得几何与黎曼几何。代数学中，包括了巴拿赫代数、布尔代数、同调代数。所有这些思维的奇妙创造，不仅在日常生活中到处有用，而且也在源自生活的一些基本方法中有所应用。当亚马孙丛林中的一个印第安人向树梢的一只猴子投掷出一支有毒的标枪时，他直觉地就决定了一个弹道，而后者是可以用数学分析与运动定律来更准确地定出的。当你加足马力开汽车时，你是在某种估计的基础上冒着生命危险，而这种估计也是可以通过微积分准确地得出来的。

在今天，任何一种人类活动或思维过程（从捕捉敌方潜艇到作曲），都可以被数学家简化到它的基本要素中去。作为其结果，数学一直是在继续成长着。它的伟大作品反复地被重写，叙述得更为对称、更一般、更准确与更有用了。这种无休止的修改(甚至在经过6000年的发展以后)有助于使数学免于成为过分臃肿与散漫。直至一个世纪以前，一个有才能的数学家仍能够希望在某种程度上掌握数学的全部知识。甚至在现在，一位大学生为了选择一个专业，依然能获得具有相当代表性的有关数学全貌的一个鸟瞰。

比起任何口头语言来，数学已无可避免地变得远为巧妙与远为困难。

孩子们要比成年人有更多机会来熟悉它，因为他们在开始过度担心推理上的各种理由与关系之前，就能从中取出它的一些符号辞汇与语法规则来。今天在中小学里讲授的“新数学”便是开发与利用这种能力的一个尝试，许多父母看到他们的五年级孩子对一些符号逻辑的术语与概念运用自如时，瞠目结舌。但事实正是如此，高等数学里的一些新概念往往远没有初等算术中打基础的那些东西那么难。多年前，一群法国数学家——他们用集体笔名“包勃基”（Nicolas Bourbaki）一道工作——证明了这种看法。他们在编写一部数学辞典时，发觉为了专门介绍包含在那看上去最朴实简单的数字 1 里面的一些难点，竟用了 200 多页纸。

在数学里，虽然教学方法与问题求解两者都能经常予以简化，可是抽象原理却从未能稍为易解一些。据说大约2300年前，多录美一世（Ptolemy Ⅰ）曾要求希腊大数学家欧几里得对几何作一简要说明，得到的回答是尖酸的：“几何学里没有专供国王走的捷径。”欧几里得的回答至今仍有效且对一切数学分支都一样。对于一切好奇的、想用喷气机式的步子征服整个数学领域的现代多录美们，已经上路的（数学）专业工作者们自然而然地有一种感受，感到数学是至高无上与孤立无依的一种奇妙的混合物。

可是很幸运地，正如评价一个国家的人民的特点，并不需要对这个国家的语言能说得非常流利一样。为了评价数学家的课题的主要分支，了解它们与什么有关，为什么它们是有趣的与有价值的，它们是如何得以成立的……等等这些问题，不必要求能够对数学家去说什么

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\Delta x_i$$

甚至于不必要求能把它正确地读出来。

数学起源于用来计数的（自然）数的发明。史前时期的人们对于一切事物的计数上的需要是十分有限的，如果我们能以他们后来的亲戚——现在活着的澳大利亚、新几内亚与巴西的石器时代部落——为据作出判断的话，许多人没有为 2 或 3 以上的数字定名称。无疑地，这是由于他们生活在成员数很少的家庭里，而且穷得几乎一无所有。此外，也很可能是由于他们没有多少字眼来表示可能要加以清点的事物的整体概念。譬如说，他们中间有些人是天生的植物学家，能够识别数以百计的树的种属并加以命名，可是却缺乏一个一般性的字眼来表示“树”本身。一位巴西的印第安人酋长对于“有多少？”的问题，多半会不屑于回答。如果催得他急了，通常他会召来一个特殊的巫医（人类学家们如今把这种人叫做“计算士”），巫医会编造出一些 1，2，3…以外的复数的名字。如果酋长想列举各种

哥伦布以前的计算者

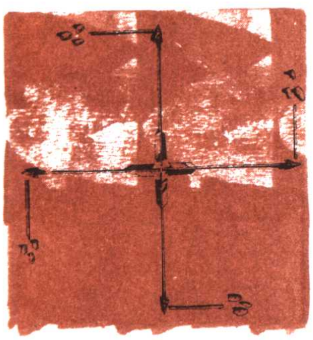
秘鲁印加帝国（12至16世纪）的帐目由所谓“大司库”来掌管。他利用玉米芯似的一种算盘，可把计算转移到一个“魁卜”（古秘鲁印加族人的一种结绳文字）上，这种结绳文字是把一串羊毛绳缚在一条长绳索上。绳上所打的结就能为各种税课、开销与必要开支等提供一种永久记录。

财产，巫医就会把这些数郑重其事地吟诵出来。

大约在 1 万年以前，冰河退却了，某些从事游牧的石器时代狩猎者在中东的山区内，开始了一种新的生活方式——农业。他们立刻就碰到了怎样把日期与季节记下来，需要收藏多少谷物与种子等这样一些问题。当更复杂的农业社会在尼罗河谷、底格里斯与幼发拉底河流域中发展起来时，农民们碰到进一步的问题：交纳租税。所有这些文明的先决条件，要求数必须有个名称，计数必须更准确些，而不能只有“一”与“许多”那样的最原始的概念。

手指、足趾与老式记号

人们相信，某些古代种族用 2 作底数来计数：1，2，2－1，2－2，2－2－1 等等。别的种族用 3 为底数：1，2，3，3－1，3－2，3－3，3－3－1 等等。当他们成为农民与建筑工人时，他们之中最先进的人把基本的计数极限推得越来越大了。许多人把他们自己的手指与脚趾当作最方便的计数器，于是就把积累起来的新数远远推到20。到此，手指与脚趾就全都用光了。在法文表示80与90的单词中仍然可以看到早期的、以20为底的记数制度的遗迹。“quatre-vingt”、“quatre-vingt-dix”的意思是“四个20”与“四个20再加10”。同样地，在旧的英国币制中也可以看到(传统的英国货币制度货币单位有半辨士、一辨士、三辨士、六辨士、一先令、半克朗、一英镑与几尼等，是一个 $\frac{1}{2}$－1－3－6－12－30－240－252的制度，它是多种古代货币制度的混合物。英国议会在1967年终于同意予以废弃)。



一种原始的计数法

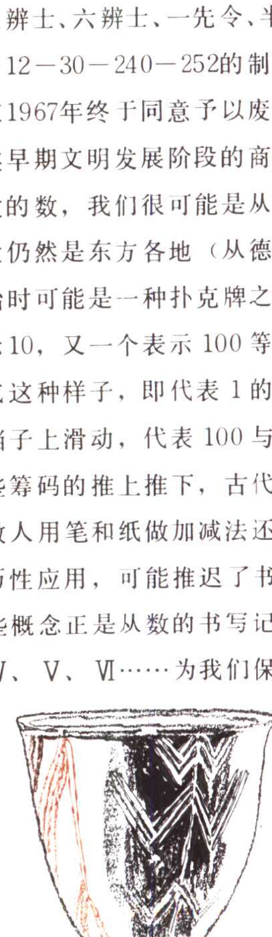
地上的这个粗陋的卍字是美国西南部印第安人村庄里的人“写”的，代表数21。图中四个箭头的每一个都代表数 1，所有箭尾汇聚的“神秘的中心”也是 1。每个箭头处的一根短棒，与短棒另一头的每块小石子全都代表 1。四个箭头、一个神秘的中心、四根棒、十二块小石子在一起共代表数21。其他数字也是用小石子、箭头、棒等，通过其他组合办法来加以表达的。

不论用来计数的制度如何，人类早期文明发展阶段的商人们，象是在利用堆在地上的小石子来表示要点数的数，我们很可能是从这种办法的演变而取得算盘这一计算工具的。算盘仍然是东方各地（从德黑兰到香港）集市中的一种标准设备。算盘在开始时可能是一种扑克牌之类的东西，其中一个筹码用来表示 1，另一个表示10，又一个表示 100 等等。最后，发展成各式各样的算盘。有些算盘做成这种样子，即代表 1 的筹码可以在一个档子上滑动，代表10的在另一个档子上滑动，代表 100 与1000的，在第三个与第四个档子上滑动。通过这些筹码的推上推下，古代商人们就能够做加减法，甚至做得比今天绝大多数人用笔和纸做加减法还要快。

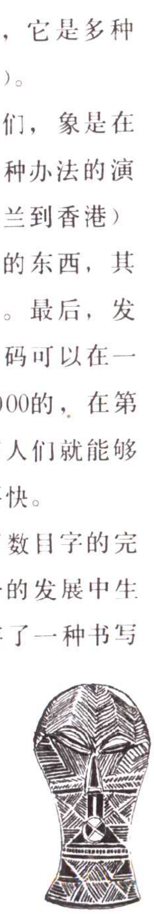
解决财务计算的计数标志的技巧性应用，可能推迟了书写数目字的完备成熟。现代算术与现代代数的一些概念正是从数的书写记号的发展中生长出来的。罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ……为我们保存了一种书写

与生俱来的几何眼光

原始的艺术品清楚地表明了：即使毫无数学修养的人也具有一种对几何图形的天生的感受能力。埃及人、塞浦路斯人、伊特拉斯坎人的陶器，其年代都在基督降生之前。在秘鲁与非洲的土著民族做出来的现代面具与织物中，有着很准确的模式与粗线条。



埃及人的钵



刚果人的面具

数字最粗陋的方法，实质上它是一种每个数字都可以表为几个基本符号的相加或相减的方案。我们用一种划线记号 /，//，///，////，来记份数时，用的也是一种与此类似的制度。

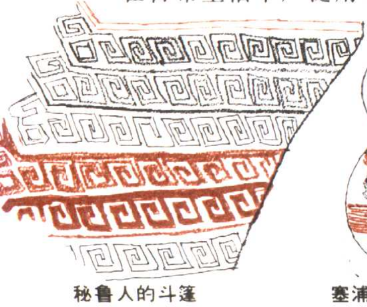
人们相信，我们今天使用的数目字的书写记号——1，2，3，4，5，6，7，8，9——来源于印度。它们是为了和十进记数制一道使用而设计的。“十进的”（decimal）这个单词来自拉丁文单词（decima），它的意思是十分之一。我们把数目字拼凑在一起的办法看来简单得很，可是它实际上是许多世纪发展起来的巧妙成果——也就是数学家们所说的“位值制记法”。在这一制度中，一排数目字的每个数码所占的位置决定了它的值。大于1的数与小于1的数（即小数），由一个小数点分开。在小数点的左方，第一位上的数码的值就等于它本身；第二位上的数码值，等于它本身乘以10；再往左面一位上的数值，等于它本身乘上100，……依此类推。在小数点右方，第一位上的数值等于它本身的$\frac{1}{10}$；下一位等于其本身的$\frac{1}{100}$；再下位为其本身的$\frac{1}{1000}$，……依此类推。

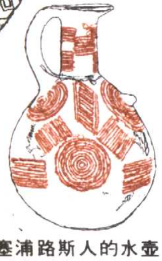
例如，数8765.4321的意思是$8\times1000+7\times100+6\times10+5\times1+4\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{100}+2\times\frac{1}{1000}+1\times\frac{1}{10000}$。最后，发明了一种速记办法，即所谓的“幂”或“指数”。用了它，数8765.4321便可记为$8\times10^3+7\times10^2+6\times10^1+5\times10^0+4\times10^{-1}+3\times10^{-2}+2\times10^{-3}+1\times10^{-4}$。在$10^3$的情况，上角数3表示“指数”，因此$10^3$也就是表示$10\times10\times10=1000$的另一种办法。类似地，负指数用来表示十进小数，如$10^{-3}$意思是$\frac{1}{10^3}$或$\frac{1}{1000}$或0.001。

在这种幂的系统中，有时会产生一个问题：10^0(即10的零次幂）到底是什么意思？从8765.4321中可以明显地看出：10^0是在10^1与10^{-1}之间，也就是说在10与$\frac{1}{10}$之间，它被定义为1。幂的这个干净利落的对称性质可以推广到10以外的其它数字，除去0本身，任何数的零次幂都被定义为1。

在我们今天所用的记数制度（它的全名是十进位位值制记法）中，我们把10作为基数。但是并没有什么绝对的理由（除非由于人类的双手正好有十个手指）强制我们不能用其他基数（例如12或20）来代替它。文明道路上有一半以上时间，西方世界的科学家们是用一种不同进位基数的位值制记法来写出他们的分数的。它是古代美索波达米亚人民在数60的基础上搞出来的、复杂得要命的“六十进位”制。

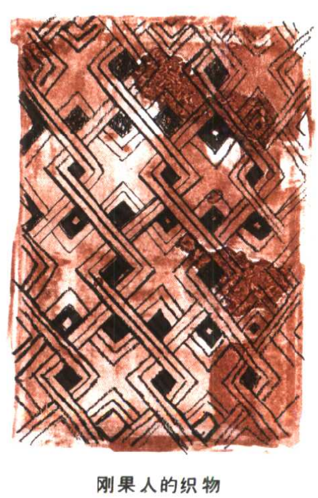
虽然用来作为一个记数制度的基数，60是过于庞大了。但是我们仍然在日常生活中广泛用它，例如，一小时分为60分，一分钟分为60秒，一个


秘鲁人的斗篷


塞浦路斯人的水壶


刚果人的织物


伊特拉斯坎人的花瓶


刚果人的织物

周角分为360°（六个60°），等等。如果一位海军军官要他的水兵把他们的表对准在5:07:09，他们肯定知道他的意思是指上午五点后七分零九秒。

很少有人能看懂古代的，六十进位制里面用来表示5，7，9的那些符号（美索波达米亚人用它们来表示 $5\times60^2+7\times60^1+9\times60^0$），但是，倘使真有人能看懂，他们也将会得出现代的18429这个数目字，而这也就是5:07:09所代表的意思——午夜以后的18429秒正。

六十进位制有一个来自它的庞大基数的重要缺点，为了表示从0到59的每一个数码，美索波达米亚人面临一种要设计出59个不同记号的局面。与我们今天津津乐道地去牢记120个地区的电话代码（分局号）相反，没有人打算去记住这59个数目字，甚至那些号称有数字癖好的、先后生活在美索波达米亚的苏米尔人与巴比伦人也不例外。为了避开这个难点，古人利用了两个楔形记号的组合，其中一个代表数1，另一个代表数10。

多才多艺的60

虽然有着这个缺点，可是六十进位制也有一些优点，数60可以被1、2、3、4、5、6、10、12、15、20、30、60整除。这就意味着，使用六十进位制的算术要比用十进位制的算术更经常地出现齐头数的结果，也许对爱好天文的美索波达米亚人说来，更为重要的是60这个基数与他们把一年分为360天的方法配合得很好。

在公元前1700年以前，六十进位制即已来到人间，这个时代的楔形文字书板表明了，在巴比伦的英明国王汉默拉比（Hammurabi）统治下的数学家们，已经利用它来作一些令人敬佩的计算。但是他们还没有一个表示零的记号。为了表示一排数字中间的某个空位，他们留下一个空白。可是他们往往忘掉这样做，因此有时候连他们自己也弄不清一些数是多少了。

但是在公元前300年左右，即考古学家们发掘出的第二批楔形文字书板的时代，出现了一个代表零的记号——一个有点象倒写W的符号。在这个时期，波斯人统治了美索波达米亚，六十进位制又获得了相当进展，已不是原来的形式了。数学家们把他们的计算一直进行到第十七位六十进位小数，如果用我们现在的记法，相当于小数点之后29位。这一成就的令人叹为观止的性质，可以从一个只有四位六十进位制数码的数字来估量。例如，如果波斯人想表达五百零一万一千一百六十七这个数，他们只要把它记为：23,11,59,27就行了，其意思是：$23\times60^3+11\times60^2+59\times60^1+27\times60^0$，也就是：$4,968,000+39,600+3,540+27=5,011,167$。

从1到10的六种写法

这些古老写法（见右图）绝大多数都表明了原始人的刻出缺口记法的影响。前四种写法，随着书写工具与材料的改进而有了进一步发展。巴比伦人用尖笔写在粘土上，埃及人用墨水笔写在草卷上，马雅人用的是棒头与小石子，而中国人则用毛笔写在纸上。希腊人的数目字是用他们的字母组成的。人们都相信罗马数字是从手指计数演变而来的。

巴比伦楔形数字

埃及象形数字

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com