549610

孟凯韬

多项式与多位数
乘除开方新法

科学普及出版社

多项式与多位数乘除开方新法

孟凯韬

科学普及出版社

内 容 提 要

多项式的运算在代数学和数学其他分支中有较广泛的应用，但它不能象数的运算那样，借助计算工具直接求得计算结果。如何改进算法、提高计算速度，是人们研究的课题，古今数学工作者都曾着力研究。本书不同于综合除法、分离系数法，而是从“二行阵”的概念出发，提出一种新的算法，并据以给出多位数的乘、除、开方新算法。实际试验证明，多数人可在几十分钟时间内掌握、运用。

本书适合于广大中学师生、大学低年级学生和数学爱好者阅读。

多项式与多位数乘除开方新法

孟凯韬 著

责任编辑：吴之静

封面设计：王序德

*

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京怀柔平义分印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：4 7/8 字数：100千字

1985年7月第1版 1985年7月第1次印刷

印数：1—44,000册 定价：0.73元

统一书号：13051·1458 本社书号：1015

前　言

多项式的运算在代数学和数学的其他分支中有比较广泛的应用，诸如求两个多项式的最高公因式、最低公倍式，判定某多项式有无重因式，利用配方法化某些二次型为标准型，等等。然而多项式的运算却不象数的运算那样，可以借助计算工具(包括电子计算器)直接求得计算结果。因此，改进算法，以使计算速度提高，便成为我们研究的课题。

对于多项式的计算方法，古今数学工作者都曾着力研究，并且作出很大的贡献：综合除法的提出，使得除式为一次式的问题解决得卓有成效；分离系数法又使多项式的乘除运算其算式的书写形式得以简化。然而，这二者都有不足之处：前者局限性很大；后者则不能从根本上解决问题。本书从“二行阵”的概念出发，提出一种新的算法，并据以给出多位数的乘、除、开方新算法。

本书共八章：第一章介绍二行阵的概念；第二、四、五章分别介绍多项式的乘、除、开平方速算法；第三、六、七、八章分别介绍多位数的乘、除、开方速算法以及高次方根的近似计算。基于二行阵的概念所得出的多项式乘法公式是这些算法的基础。为了使数的除法和开平方简单易行，本书还引入了“混合数”的概念，插入第六章之首。

多项式乘法公式揭示出两个多项式之积的各项系数对于各自的各项系数的依赖关系。将此公式应用于数的乘法，则只要通过心算计算出相应的二行阵之值，就可自右至左逐一

确定乘积中的各位数字。这种方法，经过有关专家鉴定，并经实际试验，证明可在几十分钟之内学会，因而可为极大多数人掌握、运用。

由多项式乘法公式我们还可推得，两个多项式相除所得的商式及余式的各项系数与各自的各项系数之间的关系，从而使多项式的除法甚至比数的除法还来得容易。仿照多项式的除法，我们也可进行数的除法，而且还可求得某多项式或某数的平方根。

本书是在校、系及科研处领导的关怀、支持下研究、撰写的。在撰写过程中，得到著名数学家赵访熊、赵慈庚、魏庚人老师，以及我系赵根榕老师的鼓励、支持和指导，并得到广大读者的密切关注，作者在此一并致谢！由于作者水平所限，书中缺点、错误在所难免，诚恳希望读者多加批评、指正。

孟凯韬

于西北大学数学系

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　二行阵

§1　二行阵的概念

作为本书所讨论的快速计算法的理论基础，在此首先引入"**二行阵**"的概念。

所谓"二行阵"，即形如

$$\left\langle \begin{matrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \cdots a_2 & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} \cdots b_2 & b_1 \end{matrix} \right\rangle$$

的数学式子。其中元素是复数域中的数，而元素的列数称为"阶"。

一阶和二阶二行阵的值分别定义为

$$\left\langle \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix} \right\rangle = a_1 \cdot b_1,$$

$$\left\langle \begin{matrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{matrix} \right\rangle = a_2 \cdot b_1 + b_2 \cdot a_1,$$

而n阶二行阵的值定义为

$$\left\langle \begin{matrix} a_n & a_{n-1} \cdots a_2 & a_1 \\ b_n & b_{n-1} \cdots b_2 & b_1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \begin{cases} \left\langle \begin{matrix} a_n & a_1 \\ b_n & b_1 \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} a_{n-1} & a_2 \\ b_{n-1} & b_2 \end{matrix} \right\rangle + \cdots + \left\langle \begin{matrix} a_{\frac{n+1}{2}} \\ b_{\frac{n+1}{2}} \end{matrix} \right\rangle & \text{（当}n\text{为奇数时）} \\ \left\langle \begin{matrix} a_n & a_1 \\ b_n & b_1 \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} a_{n-1} & a_2 \\ b_{n-1} & b_2 \end{matrix} \right\rangle + \cdots + \left\langle \begin{matrix} a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}} \\ b_{\frac{n}{2}+1} & b_{\frac{n}{2}} \end{matrix} \right\rangle & \text{（当}n\text{为偶数时）。} \end{cases}$$

由以上定义显而易见，**二行阵具有以下性质：**

1）交换二行阵的两行，其值不变；

2）一个二行阵，若有一行元素为0，则其值为0；

3）一个二行阵，如果其中有元素为0，那么不论怎样改变与0中心对称的元素，其值不变。

例1 $\left\langle\begin{matrix}1&4&3&3&4&2&2\\2&2&1&2&8&3&2\end{matrix}\right\rangle$

$=\left\langle\begin{matrix}1&2\\2&2\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}4&2\\2&3\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}3&4\\1&8\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right\rangle$

$=(1\times2+2\times2)+(4\times3+2\times2)+(3\times8+1\times4)+3\times2$

$=6+16+28+6$

$=56$。

例2 $\left\langle\begin{matrix}1&3&4&2&1&0\\2&0&3&7&2&6\end{matrix}\right\rangle$

$=\left\langle\begin{matrix}1&0\\2&6\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}3&1\\0&2\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}4&2\\3&7\end{matrix}\right\rangle$

$=(1\times6+2\times0)+(3\times2+0\times1)+(4\times7+3\times2)$

$=6+6+34$

$=46$。

以后我们将会看到，多项式和数的乘、除、开平方的计算问题，最后都归结为二行阵的计算问题。这里包括两方面的内容：一是求由某几个元素所构成的二行阵的值；一是求一个未知元素，使之与几个已知元素所构成的二行阵的值等于某一个数。其中后者相当于求解一个只含一个未知数的二行阵方程。

设在二行阵方程

$$\left\langle\begin{matrix}a_n&a_{n-1}\cdots a_2&a_1\\b_n&b_{n-1}\cdots b_2&x\end{matrix}\right\rangle=c$$

中，x为未知数，而其余元素均为已知数，那么就有

$$c=\begin{cases}\left\langle\begin{matrix}a_n & a_1\\ b_n & x\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}a_{n-1} & a_2\\ b_{n-1} & b_2\end{matrix}\right\rangle+\cdots+\left\langle\begin{matrix}a_{\frac{n+1}{2}}\\ b_{\frac{n+1}{2}}\end{matrix}\right\rangle & \text{(当}n\text{为奇数时)}\\ \left\langle\begin{matrix}a_n & a_1\\ b_n & x\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}a_{n-1} & a_2\\ b_{n-1} & b_2\end{matrix}\right\rangle+\cdots+\left\langle\begin{matrix}a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}}\\ b_{\frac{n}{2}+1} & b_{\frac{n}{2}}\end{matrix}\right\rangle & \text{(当}n\text{为偶数时)}\end{cases}$$

由此推得

$$x=\begin{cases}\dfrac{c-\left(\left\langle\begin{matrix}a_{n-1} & a_2\\ b_{n-1} & b_2\end{matrix}\right\rangle+\cdots+\left\langle\begin{matrix}a_{\frac{n+1}{2}}\\ b_{\frac{n+1}{2}}\end{matrix}\right\rangle+b_n\cdot a_1\right)}{a_n} & \text{(当}n\text{为奇数时)}\\ \dfrac{c-\left(\left\langle\begin{matrix}a_{n-1} & a_2\\ b_{n-1} & b_2\end{matrix}\right\rangle+\cdots+\left\langle\begin{matrix}a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}}\\ b_{\frac{n}{2}+1} & b_{\frac{n}{2}}\end{matrix}\right\rangle+b_n\cdot a_1\right)}{a_n} & \text{(当}n\text{为偶数时)}\end{cases}.$$

例3 求元素x，使

$$\left\langle\begin{matrix}2 & 1 & 0 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 6 & 7 & x\end{matrix}\right\rangle=31.$$

解：$\because$ $\left\langle\begin{matrix}2 & 1 & 0 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 6 & 7 & x\end{matrix}\right\rangle$

$=\left\langle\begin{matrix}2 & 2\\ 3 & x\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}1 & 3\\ 4 & 7\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}0\\ 6\end{matrix}\right\rangle$

$=2x+6+19+0$

$=2x+25$

$\therefore$ $2x+25=31$

故 $x=3$.

例4 求元素x，使

$$\left\langle\begin{matrix}2 & 4 & 5 & 3\\ 7 & 6 & 1 & x\end{matrix}\right\rangle=65.$$

解：$\because$ $\left\langle\begin{matrix}2 & 4 & 5 & 3\\ 7 & 6 & 1 & x\end{matrix}\right\rangle$

$$=\left\langle\begin{matrix}2&3\\7&x\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}4&5\\6&1\end{matrix}\right\rangle$$

$$=2x+21+34$$

$$=2x+55$$

$\therefore\quad 2x+55=65$

故　$x=5$。

例 5　求元素 x，使

$$\left\langle\begin{matrix}2&1&5&7&x\\2&1&5&7&x\end{matrix}\right\rangle=51.$$

解：$\because\quad \left\langle\begin{matrix}2&1&5&7&x\\2&1&5&7&x\end{matrix}\right\rangle$

$$=\left\langle\begin{matrix}2&x\\2&x\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}1&7\\1&7\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}5\\5\end{matrix}\right\rangle$$

$$=4x+14+25$$

$$=4x+39$$

$\therefore\quad 4x+39=51$

故　$x=3$。

根据上列计算公式，对于一个二行阵，只要将每对对称的元素交叉相乘，然后求各个乘积之和，即得其值。这种方法，我们称之为“**对称交叉乘法**”。不难看出，对于一个二行阵方程，只要将含未知数的二行阵按“对称交叉乘法”展开，即可将其化为一元一次方程，进而求得未知数。

例 6

$$\left\langle\begin{matrix}1&7&4&3&1&6&5\\1&2&1&4&7&1&3\end{matrix}\right\rangle$$

$$=12+28+1+7+12+3+5$$

$$=68.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例 7

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & 7 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 1 & 6 \end{matrix} \right\rangle$$

$= 7 + 16 + 7 + 3 + 6 + 4$

$= 43.$

例 8　求x，使

$$\left\langle \begin{matrix} 3 & 1 & 3 & 2 & x \\ 1 & 7 & 2 & 2 & 4 \end{matrix} \right\rangle = 36$$

解：$\because$

$$\left\langle \begin{matrix} 3 & 1 & 3 & 2 & x \\ 1 & 7 & 2 & 2 & 4 \end{matrix} \right\rangle$$

$= 6 + 14 + 2 + 12 + x$

$= 34 + x$

$\therefore \quad 34 + x = 36$

故　$x = 2.$

例 9　求x，使

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 5 & x \\ 1 & 2 & 3 & 5 & x \end{matrix} \right\rangle = 33.$$

解：$\because$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 5 & x \\ 1 & 2 & 3 & 5 & x \end{matrix} \right\rangle$$

$= 9 + 10 + 10 + x + x$

$= 29 + 2x$

$\therefore \quad 29 + 2x = 33$

故　$x=2$.

利用对称交叉乘法计算二行阵之值时，最好从里向外，并应充分发挥心算的作用。计算时，不必读出运算过程，而只读出第一对数的乘积以及第一对数与第二对数乘积之和，第一、第二、第三对数乘积之和，等等。就以例 7 为例，第一次读出 7（即略去读一七得七），第二次读出23（即略去读四四一十六和十六加七等于二十三），第三次读出30（即略去读一七得七和七加二十三等于三十），第四次读出33（即略去读一三得三和三加三十等于三十三），第五次读出39（即略去读一六得六和六加三十三等于三十九），第六次读出43（即略去读二二得四和四加三十九等于四十三）。

利用对称交叉乘法解二行阵方程，也可仿上求出各对已知数的乘积之和，并通过心算求得未知数。就以例 8 为例，先通过心算顺次读出 6，20，22，34，然后通过心算求得未知数——2。

按照二行阵的计算公式，如果将一个二行阵的一行元素倒写，而将每两个上下相对的元素相乘，再求各个乘积之和，那么也可求出其值。这种方法，我们称之为“反序直乘法”。譬如

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 3 \end{matrix} \right\rangle,$$

若将下边一行元素倒写，则有

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 5 & 2 \end{matrix}$$

再求每两个上下相对的元素之积，分别得到3，21，4，10，8。最后将这些积相加，即得该二行阵的值——46.

§2 缺角二行阵

一个二行阵，如果上下两行元素个数不等，那么就称之为**缺角二行阵**。所缺的元素称为空元素，而记为＊．形如

$$\left\langle\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & * \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{matrix}\right\rangle$$

的缺角二行阵称为正规型缺角二行阵．

对于一个缺角二行阵，如果将其中的空元素均换为 0，那么就称所得二行阵的值为它的值．

由此定义不难看出以下公式成立：

1） $\left\langle\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1 \end{matrix}\right\rangle = b_n \cdot a_1 + \left\langle\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & * \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1 \end{matrix}\right\rangle$；

2） $\left\langle\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{matrix}\right\rangle$．

例 1 $\left\langle\begin{matrix} 7 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{matrix}\right\rangle = 7\times 3 + \left\langle\begin{matrix} 7 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 4 & 0 & * \end{matrix}\right\rangle$．

例 2 $\left\langle\begin{matrix} 2 & 3 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{matrix}\right\rangle$．

定理 1　若 $\left\langle\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{matrix}\right\rangle$ 中的元素均非负数，则

$$\left\langle\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{matrix}\right\rangle \geqslant \left\langle\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & * \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{matrix}\right\rangle.$$

证明：因为

$$\left\langle\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{matrix}\right\rangle = b_n \cdot a_1 + \left\langle\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & * \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{matrix}\right\rangle.$$

所以

$$\left\langle\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{matrix}\right\rangle - \left\langle\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & * \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{matrix}\right\rangle = b_n \cdot a_1.$$

由于b_n、a_1均不小于0，因而有

$$\left\langle\begin{matrix} a_n\, a_{n-1}\cdots a_1 \\ b_n\, b_{n-1}\cdots b_1 \end{matrix}\right\rangle - \left\langle\begin{matrix} a_n\, a_{n-1}\cdots * \\ b_n\, b_{n-1}\cdots b_1 \end{matrix}\right\rangle \geqslant 0,$$

即

$$\left\langle\begin{matrix} a_n\, a_{n-1}\cdots a_1 \\ b_n\, b_{n-1}\cdots b_1 \end{matrix}\right\rangle \geqslant \left\langle\begin{matrix} a_n\, a_{n-1}\cdots * \\ b_n\, b_{n-1}\cdots b_1 \end{matrix}\right\rangle.$$

第二章　多项式快速乘法

§1　多项式乘法公式

求两个多项式的乘积，按照通常所用的方法，乃是以乘式的各项去乘被乘式的各项，然后将同类项合并。这样做，工作量无疑是较大的。为了提高计算速度，有必要寻求乘积中的各项系数与被乘式和乘式各项系数之间的关系。基于二行阵的概念，这种关系就可被清楚地揭示出来。我们有如下的

定理 2　设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$$

其中a_n，a_{n-1}，a_{n-2}，$\cdots$，a_1，a_0，b_n，b_{n-1}，b_{n-2}，$\cdots$，b_1，b_0是不全为零的复数，则

$$\begin{aligned}&f(x)\cdot g(x)\\&=\left\langle\begin{matrix}a_n\\b_n\end{matrix}\right\rangle x^{2n}+\left\langle\begin{matrix}a_n&a_{n-1}\\b_n&b_{n-1}\end{matrix}\right\rangle x^{2n-1}+\left\langle\begin{matrix}a_n&a_{n-1}&a_{n-2}\\b_n&b_{n-1}&b_{n-2}\end{matrix}\right\rangle x^{2n-2}\\&+\cdots+\left\langle\begin{matrix}a_n&a_{n-1}&a_{n-2}\cdots a_1&a_0\\b_n&b_{n-1}&b_{n-2}\cdots b_1&b_0\end{matrix}\right\rangle x^n+\left\langle\begin{matrix}a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots a_1&a_0\\b_{n-1}&b_{n-2}&\cdots b_1&b_0\end{matrix}\right\rangle\\&x^{n-1}+\left\langle\begin{matrix}a_{n-2}&a_{n-3}\cdots a_1&a_0\\b_{n-2}&b_{n-3}\cdots b_1&b_0\end{matrix}\right\rangle x^{n-2}+\cdots+\left\langle\begin{matrix}a_1&a_0\\b_1&b_0\end{matrix}\right\rangle x\\&+\left\langle\begin{matrix}a_0\\b_0\end{matrix}\right\rangle.\end{aligned}$$

证明：因为

$$f(x)\cdot g(x)=a_n\cdot b_nx^{2n}+(a_n\cdot b_{n-1}+b_n\cdot a_{n-1})x^{2n-1}$$

$$+(a_n\cdot b_{n-2}+b_n\cdot a_{n-2}+a_{n-1}\cdot b_{n-1})x^{2n-2}$$
$$+\cdots+(a_n\cdot b_0+b_n\cdot a_0+a_{n-1}\cdot b_1+b_{n-1}\cdot a_1$$
$$+\cdots)x^n+(a_{n-1}\cdot b_0+b_{n-1}\cdot a_0+a_{n-2}\cdot b_1$$
$$+b_{n-2}\cdot a_1+\cdots)x^{n-1}+(a_{n-2}\cdot b_0+b_{n-2}\cdot$$
$$a_0+a_{n-3}\cdot b_1+b_{n-3}\cdot a_1+\cdots)x^{n-2}+\cdots+(a_1\cdot$$
$$b_0+b_1\cdot a_0)x+a_0\cdot b_0$$

而

$$\left\langle\begin{matrix}a_n\\b_n\end{matrix}\right\rangle=a_n\cdot b_n,$$

$$\left\langle\begin{matrix}a_n & a_{n-1}\\b_n & b_{n-1}\end{matrix}\right\rangle=a_n\cdot b_{n-1}+b_n\cdot a_{n-1},$$

$$\left\langle\begin{matrix}a_n & a_{n-1} & a_{n-2}\\b_n & b_{n-1} & b_{n-2}\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}a_n & a_{n-2}\\b_n & b_{n-2}\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{matrix}\right\rangle$$
$$=a_n\cdot b_{n-2}+b_n\cdot a_{n-2}+a_{n-1}\cdot b_{n-1},$$

………………

$$\left\langle\begin{matrix}a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0\\b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\left\langle\begin{matrix}a_n & a_0\\b_n & b_0\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}a_{n-1} & a_1\\b_{n-1} & b_1\end{matrix}\right\rangle+\cdots$$
$$=a_n\cdot b_0+b_n\cdot a_0+a_{n-1}\cdot b_1+b_{n-1}\cdot a_1+\cdots$$

$$\left\langle\begin{matrix}a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0\\b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\left\langle\begin{matrix}a_{n-1} & a_0\\b_{n-1} & b_0\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}a_{n-2} & a_1\\b_{n-2} & b_1\end{matrix}\right\rangle+\cdots$$
$$=a_{n-1}\cdot b_0+b_{n-1}\cdot a_0+a_{n-2}\cdot b_1+b_{n-2}\cdot a_1+\cdots$$

$$\left\langle\begin{matrix}a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0\\b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}a_{n-2} & a_0\\b_{n-2} & b_0\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}a_{n-3} & a_1\\b_{n-3} & b_1\end{matrix}\right\rangle+\cdots$$
$$=a_{n-2}\cdot b_0+b_{n-2}\cdot a_0+a_{n-3}\cdot b_1+b_{n-3}\cdot a_1+\cdots$$

………………

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com