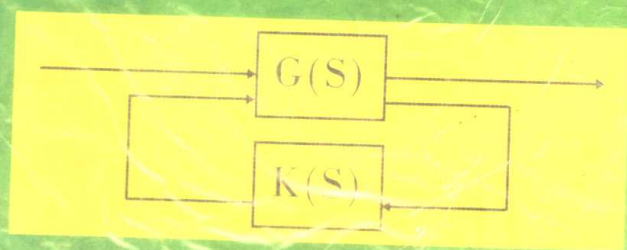
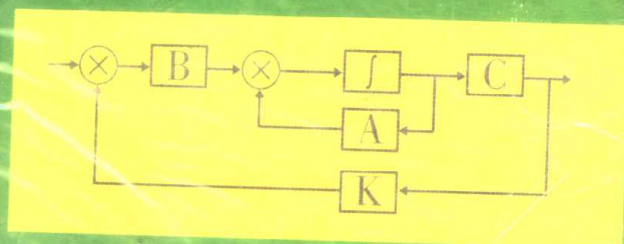
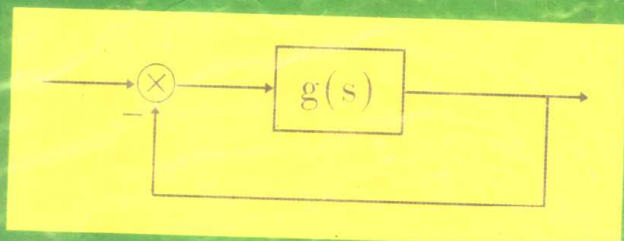


系统理论与鲁棒控制

姜长生 孙隆和 编著
吴庆宪 陈文华



航空工业出版社

系统理论与鲁棒控制

姜长生 孙隆和
吴庆宪 陈文华
编 著

航空工业出版社

内 容 提 要

本书比较全面系统地介绍了 60 年代至 90 年代初发展起来的近、现代控制理论的基本内容。主要分两大部分:第一部分(第 1~6 章)为系统理论部分,它包括时域和频域中的系统理论和设计方法;第二部分(第 7~12 章)论述了包括 H_∞ 控制理论在内的时域和频域中的各种鲁棒控制理论和方法,以及相关的矩阵方程和线性矩阵不等式的求解。第一部分是基础,第二部分是它的延伸和发展。两者有机结合,密切联系,前后呼应,构成一个系统的整体。全书内容丰富,论述由浅入深、深入浅出、语言流畅,并配有与内容密切结合的例题和习题,便于理解和自学。

本书不仅渗入了作者多年来从事研究生教学的经验和体会,也包含了作者有关的科学研究成果。

本书可作为信息与控制类各专业的研究生教材,也适合相关领域各专业研究生参考,还可供信息与控制类各专业以及相关专业高等学校教师、广大科技工作者、工程技术工作者和高年级大学生参考。

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

南京航空航天大学飞达印刷厂印刷 全国各地新华书店经售

1998 年 8 月第 1 版

1998 年 8 月第 1 次印刷

开本:787×1092

1/16

印张:41.125

字数:1027 千字

印数:1-1500

定价:65 元

ISBN 7-80134-354-9

TP·036

姜长生, 1942



年1月生, 江苏省六合县人。1968年南京航空航天大学自控理论专业研究生毕业, 90~92年曾出访美国, 现为该校自控系教授、博士生导师。已出版著作三部, 发表论文五十余篇。获省部级科研成果奖三项。

孙隆和, 1940



年10月生, 江苏省扬中县人。1966年毕业于哈尔滨军事工程学院, 现为航空工业总公司第613研究所总设计师、研究员、博士生导师。已发表著作一部, 论文卅余篇, 航空工业总公司授予部级有突出贡献专家称号, 优秀研究生导师和有突出贡献的留学回国人员。

吴庆宪, 1955



年8月生, 江苏省扬州市人。1985年在东南大学自控系获硕士学位, 现为南京航空航天大学自控系副教授、系副主任。已发表著作三部, 论文近廿篇, 获国家和省教学成果奖两项, 省部级科研成果奖三项, 江苏省先进教育工作者。

陈文华, 1965



年11月生, 江苏省大丰县人。1991年在东北大学自控系获博士学位, 现为南京航空航天大学自控系副教授。发表著作一部, 论文卅余篇, 航空工业总公司授予有突出贡献的博士学位获得者, 并列为江苏省跨世纪学术带头人培养对象。现正在英国格拉斯哥大学控制中心作访问研究。

前 言

科教兴国的伟大号召像春天的惊雷激励着中华民族的每一个炎黄子孙,向着复兴民族、振兴中华的伟大目标奋勇前进!中华民族复兴的伟大潮流浩浩荡荡、勇往直前、势不可挡,必将成为廿一世纪世界历史上最伟大的壮举!我们几位同志合作撰写的这本书就是在这一伟大历史背景下诞生的,她是在伟大号召激励之下一点微薄的努力和贡献。虽然这只是这个伟大潮流中一朵小小的浪花,但我们相信,千千万万朵飞舞的浪花必将汇合成排山倒海的大潮,将中华民族推向新世纪发展潮流的最前头!

本书比较全面系统地介绍了自 60 年代至 90 年代初发展起来的近、现代控制理论的基本内容。主要分两大部分:第一部分(第 1~6 章)为系统理论的基础部分,包括时域和频域中的系统理论和设计方法;第二部分(第 7~12 章)论述了包括 H_∞ 控制理论在内的频域和时域中的各种鲁棒控制理论和方法,以及与之密切相关的矩阵方程和线性矩阵不等式的求解。第一部分是基础,第二部分是它的延伸和发展,两者有机结合、密切联系、前后呼应,构成一个系统的整体。为了使理论和实际能密切结合,达到学术性和应用性的一致,作者力求在阐述主要理论和方法的同时,注重工程设计方法、算法的介绍。全书内容丰富、论述由浅入深、深入浅出,语言流畅,并配有与内容密切结合的例题和习题,便于理解和自学。读者只要具备矩阵理论和经典控制方面的知识,就可以读懂书中的绝大部分内容。书中涉及的泛函分析和拓扑方面的知识,初次阅读时完全可以跳过。

本书是在作者经历多年研究生教学和科学研究的基础上总结写成的,因此书中的内容不仅包含了作者多年研究生教学的经验和体会,也反映了作者有关的科学研究成果。

本书作为一本专著和培养高层次科技人才的教材,适合信息与控制领域,以及其他相关领域各专业高年级大学生、研究生作教科书,也可供高等学校教师、广大科技工作者和工程技术工作者参考。

本书在编写过程中,得到了中国科学院院士、东南大学冯纯伯教授、北京大学力学系黄琳教授、中国科学院系统研究所王恩平教授、北京航空航天大学程鹏教授、东南大学田玉平教授等的指导和帮助,作者在此对他们表示衷心的感谢。没有他们的指教和帮助,本书不可能以现在的面貌呈现在读者面前。

作者在编写本书过程中,参阅了国内外的许多同类著作和相关文献,并引用了他们的成果和论述。其中,特别要感谢清华大学的郑大钟教授、解学书教授、钟宜生教授、美籍华人陈启宗教授等。同时感谢书中所引文献的所有作者们。

本书的顺利出版是在航空工业出版社、南京航空航天大学研究生部和教务处的大力支持和帮助下完成的,航空工业出版社的同志在编审、校对方面付出了艰辛的劳动。这里我们要特别感谢邵箭教授、高德平教授、孙久厚教授、张焕春教授、王永亮副教授、吴晓琳副教授、陈旭副教授等,感谢他们的支持和帮助。作者感谢所有支持和帮助过他们的人。

最后,作者诚恳地表示,由于我们学识浅薄,水平有限,书中错误和不当之处一定很多,作者热诚地欢迎来自各方面的批评、指教。作者将衷心地感谢提出批评和指教的每一个人。

作 者

1998 年 6 月

目 录

第一章 线性系统的数学描述	(1)
第一节 系统的输入-输出描述	(1)
一、基本概念	(1)
二、线性松弛系统的脉冲响应	(3)
三、具有因果性线性松弛系统的输入-输出描述	(4)
四、系统的传递函数阵	(5)
第二节 状态变量描述	(5)
一、状态变量与动态方程	(5)
二、齐次状态方程的解	(7)
三、非齐次状态方程的解	(10)
四、时不变系统的解	(12)
五、动态方程的等价	(13)
第三节 传递函数阵和矩阵分式描述	(15)
一、传递函数阵描述	(15)
二、传递函数阵的史密斯-麦克米伦形	(17)
三、矩阵分式描述	(20)
四、传递函数阵的零、极点	(24)
第四节 微分算子描述	(27)
一、系统矩阵	(27)
二、系统的零、极点	(29)
三、严格系统等价	(30)
第五节 离散时间系统的描述	(37)
一、线性连续系统的离散化	(37)
二、离散系统的响应分析	(39)
三、离散系统的传递函数阵和多项式矩阵	(41)
第六节 组合系统的描述	(43)
一、两个子系统的并联	(43)
二、两个子系统的串联	(45)
三、两个子系统的反馈联接	(46)
参考文献	(49)
第二章 线性系统的可控性和可观测性	(50)
第一节 线性系统的可控性	(50)
一、可控性的基本含义和直观例子	(50)
二、可控性的定义	(51)
三、时间函数向量的线性无关性	(51)

四、线性时变系统的可控性判据·····	(53)
五、线性定常系统的可控性判据·····	(56)
六、线性定常系统的可控性指数·····	(59)
第二节 线性系统的可观测性·····	(61)
一、可观测性的基本含义和直观例子·····	(61)
二、可观测性的定义·····	(62)
三、线性时变系统的可观测性判据·····	(63)
四、线性定常系统的可观测性判据·····	(65)
五、线性定常系统的可观测性指数·····	(67)
第三节 线性定常系统可控、可观测的其他判据·····	(69)
一、Jordan 形动态方程的可控、可观测性·····	(69)
二、可控、可观测的几何判据·····	(71)
第四节 线性系统的输出可控性和输入可观测性·····	(75)
一、输出可控性·····	(75)
二、输出函数可控性·····	(77)
三、输入函数可观测性·····	(79)
第五节 线性时变系统的一致可控性和一致可观测性·····	(81)
一、一致可控性·····	(81)
二、一致可观测性·····	(83)
第六节 线性系统的对偶原理·····	(84)
一、线性时变系统的对偶原理·····	(84)
二、线性定常系统的对偶原理·····	(85)
第七节 线性系统的结构分解·····	(86)
一、线性时变系统在非奇异变换下的可控性和可观测性·····	(86)
二、线性定常系统的可控性结构分解·····	(87)
三、线性定常系统的可观测性结构分解·····	(90)
四、线性定常系统结构的规范分解·····	(92)
第八节 离散系统的可控性和可观测性·····	(95)
一、可控性和可达性·····	(95)
二、可控性判据·····	(96)
三、可观测性及其判据·····	(97)
四、连续时间系统离散化对可控性和可观测性的影响·····	(98)
参考文献·····	(99)
第三章 线性定常系统的标准形和实现·····	(100)
第一节 单变量系统的标准形·····	(100)
一、可控标准形·····	(100)
二、可观测标准形·····	(103)
第二节 多变量系统的标准形·····	(104)

一、龙伯格第一可控标准形	(104)
二、龙伯格第二可控标准形	(106)
三、龙伯格可观测标准形	(109)
四、块三角标准形	(114)
第三节 实现的基本概念和性质	(115)
一、基本概念	(115)
二、传递函数阵的可实现性	(116)
三、最小实现的特点	(118)
第四节 可控性、可观测性的频域形式	(121)
一、传递函数的可控性和可观测性	(121)
二、传递函数阵的可控性和可观测性	(122)
三、多项式矩阵系统的可控性和可观测性	(125)
第五节 传递函数和传递函数阵的最小实现	(127)
一、传递函数的最小实现	(127)
二、传递函数阵的最小实现	(130)
三、最小实现的汉克尔阵法	(133)
四、最小实现的汉克尔阵奇异值分解法	(136)
第六节 基于矩阵分式描述的典型实现	(138)
一、列(行)既约矩阵	(138)
二、传递函数阵的控制器形实现	(141)
三、传递函数阵的观测器形实现	(144)
参考文献	(147)
第四章 线性系统的稳定性	(148)
第一节 稳定性的基本概念和定理	(148)
一、稳定性的基本概念	(148)
二、李雅普诺夫第二法的主要定理	(151)
第二节 线性时变系统的稳定性判据	(156)
一、线性时变系统稳定的特点	(156)
二、线性时变系统稳定性的两个定理	(156)
三、线性时变系统的李雅普诺夫函数	(161)
第三节 线性定常系统的稳定性判据	(163)
一、基本定理	(163)
二、线性定常系统的李雅普诺夫函数	(163)
三、劳斯、霍尔准茨和谢绪凯判据	(166)
四、李雅普诺夫第二法在系统综合方面的应用	(172)
第四节 线性系统的 BIBO 稳定性和 BIBS 稳定性	(177)
一、线性时变系统的 BIBO 稳定性	(177)
二、线性定常系统的 BIBO 稳定性	(178)

三、线性系统的 BIBS 稳定性·····	(181)
第五节 正实矩阵与超稳定性·····	(183)
一、正实函数与正实矩阵·····	(183)
二、正实引理·····	(186)
三、线性定常系统的超稳定性·····	(188)
第六节 离散系统的稳定性·····	(192)
一、离散系统稳定性的主要定理·····	(193)
二、线性定常离散系统的稳定判据·····	(193)
参考文献·····	(198)
第五章 线性系统时域中的反馈控制与综合·····	(199)
第一节 状态反馈的特征配置·····	(199)
一、状态反馈系统的可控性与可观测性·····	(199)
二、单变量系统的极点配置·····	(200)
三、多变量系统的极点配置·····	(202)
四、系统的可镇定问题·····	(209)
五、多变量系统的零点配置·····	(210)
六、状态反馈的特征结构配置·····	(213)
第二节 输出反馈的特征配置·····	(219)
一、输出反馈系统的可控性与可观测性·····	(219)
二、常值输出反馈配置极点的基本定理·····	(221)
三、常值输出反馈配置极点的算法·····	(226)
四、常值输出反馈精确配置极点的问题·····	(230)
五、常值输出反馈的特征结构配置·····	(231)
第三节 动态输出反馈补偿器·····	(234)
一、动态补偿器配置极点的定理和设计方法·····	(234)
二、动态补偿器的特征结构配置·····	(242)
第四节 解耦控制问题·····	(244)
一、解耦控制问题的提法·····	(244)
二、系统状态反馈解耦的充要条件·····	(245)
三、状态反馈解耦的极点配置·····	(249)
四、稳态解耦问题·····	(252)
五、输出反馈解耦问题·····	(253)
第五节 无静差跟踪和鲁棒控制·····	(258)
一、跟踪问题的提法·····	(258)
二、参考信号和干扰的数学描述·····	(258)
三、无静差跟踪和鲁棒性·····	(259)
第六节 状态观测器和带观测器的动态系统·····	(265)
一、全维状态观测器·····	(265)

二、降维状态观测器	(270)
三、函数观测器	(275)
四、带观测器反馈的动态系统	(277)
第七节 线性二次型最优控制	(281)
一、问题的提法	(281)
二、有限时间的最优调节问题	(281)
三、无限时间的最优调节问题	(284)
四、指定衰减度的无限时间的最优调节问题	(285)
五、最优跟踪问题	(286)
参考文献	(288)
第六章 线性系统的频域分析和设计	(290)
第一节 逆奈氏阵列法	(290)
一、多变量系统的频域稳定判据	(290)
二、对角优势阵与格氏定理	(293)
三、对角优势阵的图解稳定判据	(295)
四、对角优势阵的实现和伪对角化方法	(299)
五、伪对角化方法改进	(305)
第二节 特征轨迹法	(307)
一、特征传递函数和特征轨迹	(307)
二、系统的结构和性能分析	(308)
三、控制器的形式和设计举例	(312)
参考文献	(315)
第七章 系统时域中的鲁棒控制	(317)
第一节 摄动系统的鲁棒稳定性	(317)
一、具有参数不确定的反馈系统的鲁棒稳定性	(317)
二、具有结构不确定的反馈系统的鲁棒稳定性	(319)
三、用李雅普诺夫函数研究不确定系统的稳定性	(322)
第二节 区间系统的鲁棒稳定性	(323)
一、区间矩阵的稳定性	(323)
二、区间系统的鲁棒稳定性设计	(327)
三、区间矩阵稳定性定理的推广	(328)
第三节 鲁棒极点配置	(330)
一、矩阵特征值摄动的主要定理	(330)
二、系统极点配置的正规化设计	(336)
三、指定区域的鲁棒极点配置	(341)
四、基于鲁棒性能指标的极点配置设计	(343)
五、基于参数灵敏度最小的极点配置设计	(347)

六、基于矩阵不等式的鲁棒极点配置	(351)
第四节 带观测器系统的鲁棒性	(354)
一、带降维观测器系统的鲁棒稳定性	(354)
二、带函数观测器系统的鲁棒性(LTR 法)	(357)
三、带观测器的线性二次型调节器的鲁棒性(LQR/LTR 法)	(361)
参考文献	(364)
第八章 时域中的 H_∞ 控制	(366)
第一节 预备知识	(366)
一、距离空间	(366)
二、线性赋范空间	(367)
三、Banach 空间	(367)
四、Hilbert 空间	(368)
五、时域函数空间	(369)
六、频域函数空间	(370)
第二节 时域中的 H_∞ 控制问题	(372)
一、记号和运算法则	(373)
二、广义受控对象的描述	(375)
三、标准 H_∞ 控制问题	(377)
第三节 系统的 H_∞ 范数	(380)
一、Hamiltonia 矩阵与矩阵 Riccati 方程	(380)
二、严格真有理传递函数阵的 H_∞ -范数	(382)
三、严格真有理传递函数阵的 H_∞ -范数与矩阵不等式的关系	(383)
四、真有理传递函数阵的 H_∞ 范数	(385)
第四节 状态反馈的 H_∞ 控制	(387)
一、状态反馈 H_∞ 控制问题的提法	(387)
二、状态反馈 H_∞ 控制问题的解	(390)
三、基于线性矩阵不等式的状态反馈 H_∞ 控制问题的解	(394)
第五节 H_∞ 滤波问题	(396)
一、 H_∞ 滤波问题的提法	(396)
二、 H_∞ 滤波问题的解	(397)
三、基于线性矩阵不等式的 H_∞ 滤波问题	(398)
第六节 输出反馈的 H_∞ 控制	(400)
一、输出反馈 H_∞ 控制问题的提法	(400)
二、输出反馈 H_∞ 控制问题的解	(401)
三、基于线性矩阵不等式的输出反馈 H_∞ 控制问题的解	(403)
参考文献	(407)
第九章 系统频域中的鲁棒控制	(409)
第一节 区间多项式的稳定性	(409)

一、Kharitonov 定理	(409)
二、棱边定理	(411)
三、圆盘多项式族的稳定性	(413)
第二节 系统的奇异值分析与设计	(413)
一、复矩阵的奇异值及其性质	(413)
二、系统性能的奇异值分析	(415)
三、系统稳定性的主增益、主相角分析	(419)
四、系统频域中的正规化设计-逆标架方法	(423)
五、主导特征向量的配正设计方法	(430)
参考文献	(434)
第十章 频域中的 H_∞ 控制	(436)
第一节 频域中的 H_∞ 控制问题	(436)
一、频域 H_∞ 控制问题的表述	(436)
二、鲁棒稳定性问题	(437)
三、性能鲁棒	(440)
四、模型匹配问题	(443)
第二节 Youla 参数化问题	(444)
一、稳定性问题	(444)
二、稳定控制器的参数化	(455)
三、基于观测器型的稳定控制器	(463)
四、闭环传递函数阵的参数化	(466)
第三节 模型匹配问题的解	(468)
一、内-外函数与内-外矩阵	(468)
二、典范分解、谱分解、内外因式分解和 J-谱分解	(471)
三、模型匹配问题的最优解和 Nehari 问题	(480)
四、矩阵 $G(s)$ 的 Hankel 范数和 Hankel 范数界	(484)
五、最优 Hankel 范数逼近问题的一类解	(498)
六、模型匹配问题的一种解法	(503)
参考文献	(505)
第十一章 鲁棒控制的间隙拓扑方法	(506)
第一节 鲁棒稳定性与间隙拓扑方法	(506)
一、鲁棒稳定性问题	(506)
二、间隙拓扑结构	(511)
三、鲁棒 BIBO 稳定的充分条件	(516)
第二节 最优鲁棒控制	(521)
一、标准 Bezout 分解	(521)
二、最优鲁棒控制	(527)
三、最优鲁棒稳定控制器及其稳定半径的计算	(530)

第三节 最优鲁棒稳定控制器及其稳定半径的算法	(533)
一、矩阵 G 的状态空间实现	(533)
二、最优稳定半径 w_g^{-1} 的计算、Hankel 算子	(537)
三、Nehari 问题的解	(540)
四、最优鲁棒稳定控制器及其稳定半径的算法	(542)
五、控制器的降阶化简	(545)
参考文献	(549)
第十二章 矩阵方程和线性矩阵不等式的求解	(551)
第一节 矩阵 Riccati 方程的求解	(551)
一、基本定理	(551)
二、不变特征子空间解法	(557)
三、线性矩阵方程解法	(564)
四、牛顿迭代法	(566)
五、矩阵符号函数法	(567)
第二节 离散矩阵 Riccati 方程的求解	(571)
一、基本定理	(571)
二、不变特征子空间解法	(579)
三、线性矩阵方程解法	(587)
四、牛顿迭代法	(589)
第三节 矩阵 Lyapunov 方程的求解	(590)
一、基本定理	(590)
二、基于特征多项式互质的代数方法	(592)
三、和式逼近法和线性方程组解法	(594)
四、Schur 向量化简算法	(596)
五、构造性解法	(597)
六、矩阵符号函数法	(598)
第四节 离散矩阵 Lyapunov 方程的求解	(600)
一、基本定理	(600)
二、迭代法和解线性方程组方法	(602)
三、Schur 向量化简算法	(603)
四、解析算法	(605)
第五节 线性矩阵不等式的求解	(608)
一、线性矩阵不等式的提出和发展	(608)
二、一般矩阵不等式向线性矩阵不等式的转化	(609)
三、线性矩阵不等式问题	(612)
四、线性矩阵不等式问题的求解	(615)
参考文献	(621)
附录	(624)

第一章 线性系统的数学描述

(Mathematical Description of Linear Systems)

根据系统运动过程的物理或化学规律所写出的,描述系统动态和静态行为的数学表达式,称为系统的数学描述或数学模型。然而,现实系统的数学模型往往是非线性的,为了研究的方便,在系统某个运行点附近将其看成是线性的,也就是说,在该点对系统的非线性数学模型进行线性化处理,这对于解决实际工程问题是足够准确的。称线性化处理以后的数学模型为线性模型,由线性模型描述的一类系统称为线性系统。线性系统理论不研究具体的物理或化学系统,而是在线性数学模型的基础上研究系统的结构性质、系统的分析和设计方法。

系统的描述方法主要分两大类:实变量法和复变量法。实变量法有状态方程描述法和微分算子方程描述法,它以时间 t 为实变元直接研究系统行为随时间变化的情形,又称时域法。复变量法有传递函数阵描述法和矩阵分式描述法,它以复变数 S 为变元,与频率有关,并通过系统随其输入量频率的变化所表现出的行为来研究系统的特性。此法又称频域法。

第一节 系统的输入-输出描述

(Input-Output Description of Systems)

一、基本概念(Basic Concepts)

给定 p 个输入, q 个输出的系统如图 1-1 所示。图中, $u = [u_1, u_2, \dots, u_p]^T \in R^{p \times 1}$, $y = [y_1, y_2, \dots, y_q]^T \in R^{q \times 1}$ 分别为系统的输入和输出向量信号。假定,系统的内部信息是未知的,现仅研究系统输入 u 和输出 y 之间的数量关系,建立 u 和 y 之间的数学方程式,称为系统的输入-输出描述。若 $p = q = 1$,则系统为单输入-单输出系统(Single Input-Single Output System),亦称单变量系统

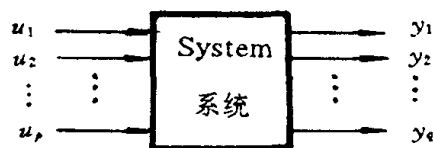


图 1-1 多输入-多输出系统

(Single Variable System),否则称多变量系统(Multivariable System)。系统输入 u 和输出 y 有定义的时间区间为 $(-\infty, \infty)$,或为 $[t_0, t_1]$;记为 $u_{(-\infty, \infty)}$, $y_{(-\infty, \infty)}$,或记为 $u_{[t_0, t_1]}$, $y_{[t_0, t_1]}$ 。

1. 松弛性 (Relaxed Property)

若系统在 t_0 时刻的输出仅取决于 t_0 时刻的输入,则称该系统为瞬时系统,或无记忆系统。仅由电阻元件组成的网络是这种系统的例子。然而,更普遍、更一般的不是瞬时系统,即系统在 t_1 时刻的输出不仅取决于 t_0 时刻的输入,也取决于 t_0 以前和(或)以后的输入。这对于讨论系统输入和输出之间的关系是不方便的。为此,假定在时刻 $t = t_0$,系统的输出 $y(t)$ ($t \geq t_0$) 仅由输入 $u(t)$ ($t \geq t_0$) 所唯一确定,系统的这一性质称为松弛性。就物理系统而言,从能量的观点来看,这就意味着,若系统在 t_0 时刻是松弛的,就表明系统在 t_0 时刻不储存任何能量。在工程实践中,总可以假定系统在 $t = -\infty$ 时是松弛的或静止的。这时若加入系统的输

人为 $u_{(-\infty, \infty)}$, 那么由之确定的系统的输出完全由 $u_{(-\infty, \infty)}$ 所唯一确定。我们称 $t = -\infty$ 松弛或静止的系统为初始松弛系统。如果系统具有松弛性, 那么系统的输入 $u(t)$ 和输出 $y(t)$ 之间有如下对应关系, 即

$$H: u \rightarrow y; \quad y = Hu \quad (1-1)$$

式中 H 为算子, 它由系统的特性唯一确定。上式也可以表示成

$$\left. \begin{array}{l} \text{对 } t_0 \text{ 时刻松弛的系统 } y_{[t_0, \infty)} = Hu_{[t_0, \infty)} \\ \text{对初始松弛的系统 } y_{(-\infty, \infty)} = Hu_{(-\infty, \infty)} \end{array} \right\} \quad (1-2)$$

2. 线性性质 (Linear Property)

定义 1-1 若系统在 $t = t_0$ 时刻具有松弛性, 并设 α_1, α_2 为任意两个实数, $u_1(t), u_2(t)$ 是任意两个输入 ($t \geq t_0$), 如果有

$$y = H(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 H u_1 + \alpha_2 H u_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \quad (1-3)$$

式中, y_1, y_2 为对应于 u_1, u_2 的输出, 则称系统满足线性性质, 或称系统为线性系统。

式(1-3)包含可加性和齐次性, 可加性和齐次性合称为叠加原理。符合叠加原理的系统就是线性系统。

应当指出, 可加性和齐次性是两个不可替代的概念, 具有齐次性的系统并不意味着可加性也成立。例如, 下式所描述的单变量系统, 其输入-输出之间的关系, 对所有 t 有:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{u^2(t)}{u(t-1)} & \text{当 } u(t-1) \neq 0 \\ 0 & \text{当 } u(t-1) = 0 \end{cases}$$

易证, 该系统满足齐次性, 但不满足可加性。同样, 满足可加性的系统也不意味着齐次性成立。例如, 若假定 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 为任意实数, 则不可能使 α 为无理数时, 下式也成立

$$H(\alpha_1 u + \alpha_2 u + \dots + \alpha_k u) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) H u = \alpha H u$$

3. 因果性 (Causal Property)

若系统在 t 时刻的输出, 不取决于 t 时刻之后的输入, 而仅取决于 t 时刻之前的输入, 即 t 时刻(不包括 t 时刻)以后的输入对系统的输出不产生影响。称这样的系统具有因果性, 简言之, 任何实际物理过程, 其结果不可能在引起这种结果的原因发生之前产生。

对于具有因果性的松弛系统, 其输入-输出之间的关系可写成

$$y(t) = H u_{(-\infty, t)}, \quad \forall t > -\infty \quad (1-4)$$

4. 时不变性 (或定常性) (Time Invariant Property)

系统的时不变性是指系统的输入和输出之间的动态特性不随时间的改变而改变。可以用位移算子 Q_α 来说明时不变性的概念。位移算子 Q_α 的作用效果如图 1-2 所示。输入信号 $u(t)$ 经 Q_α 作用后, 延迟了 α 秒, 数学表示为

$$\bar{u}(t) = Q_\alpha u(t), \quad \forall t \quad (1-5)$$

上式表明, 对任意的 t , 有 $\bar{u}(t) = u(t - \alpha)$, 或 $\bar{u}(t + \alpha) = u(t)$ 成立。

定义 1-2 一个松弛系统称为时不变的, 当且仅当对于任何输入 u 和任何实数 α , 均有

$$H Q_\alpha u = Q_\alpha H u \quad (1-6)$$

成立。否则称为时变的。上式的含义是, 若系统的输入信号位移 α 秒, 则其输出信号波形除位移 α 秒外保持不变。换言之, 不论何时将输入信号加入时不变系统, 其输出波形总是相同的。

二、线性松弛系统的脉冲响应 (Impulse Response of Linear Relaxed Systems)

1. Dirac δ -函数的定义和性质 (The Definition and Properties of Dirac δ -Function)

考虑图 1-3 和下式描述的脉动函数

$$\delta_{\Delta}(t-t_1) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \frac{1}{\Delta} & t_1 \leq t < t_1 + \Delta \\ 0 & t \geq t_1 + \Delta \end{cases}$$

对于所有的 Δ , $\delta_{\Delta}(t-t_1)$ 的面积总是 1, 它表明脉动的强度。当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $\delta_{\Delta}(t-t_1)$ 的极限

$$\delta(t-t_1) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t-t_1)$$

称为脉冲函数, 或称 Dirac δ -函数, 简称 δ -函数。 δ -函数

最重要的性质是采样性, 即对任何在 t_1 连续的函数 $f(t)$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_1) dt = f(t_1) \quad (1-7)$$

2. 单变量线性松弛系统的输入-输出描述 (The Input-Output Description of Single-Variable Linear Relaxed Systems)

利用脉冲函数的概念和性质, 很容易导出单变量线性松弛系统的输入-输出描述。因为任何分段连续的输入 $u(\cdot)$ 均可用一系列脉冲函数来近似, 如图 1-4 所示。即

$$u_1 \approx \sum_i u(t_i) \delta_{\Delta}(t-t_i) \Delta$$

因为系统为初始松弛的线性系统, 故系统输出为

$$y = H u_1 \approx \sum_i [H \delta_{\Delta}(t-t_i)] u(t_i) \Delta$$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, 上式成为

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} [H \delta(t-\tau)] u(\tau) d\tau \quad (1-8)$$

若对所有的 τ , $H \delta(t-\tau)$ 为已知, 则对任何输入,

系统的输出可由式(1-8)求出。 $H \delta(t-\tau)$ 称为系

统的脉冲响应函数, 其物理意义是, 在 τ 时刻对线性松弛系统施加一脉冲函数而得到的系统输出。 $H \delta(t-\tau)$ 又可表示为

$$H \delta(t-\tau) = g(t, \tau) \quad (1-9)$$

式(1-9)中 $g(t, \tau)$ 的变量 τ 表示 δ 函数加于系统的时刻, 而变量 t 则为观测输出的时刻。利用式(1-9), 可将式(1-8)写成

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1-10)$$

由上式可见, 单变量线性松弛系统的输入-输出关系完全由式(1-10)的卷积积分确定。

3. 多变量线性松弛系统的输入-输出描述 (Input-Output Description of Multivariable Linear Relaxed System)

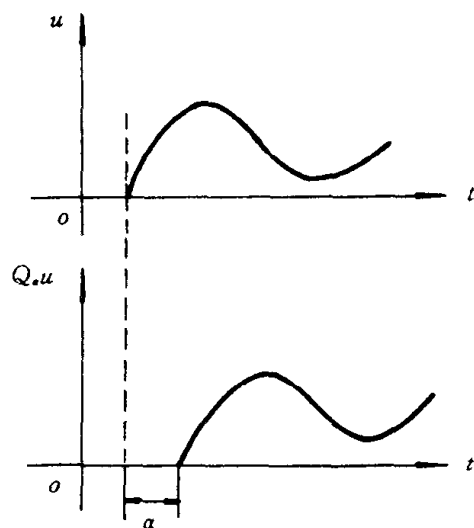


图 1-2 位移算子的作用效果

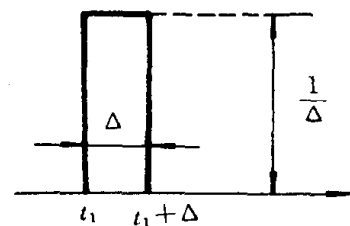


图 1-3 脉动函数 $\delta_{\Delta}(t-t_1)$

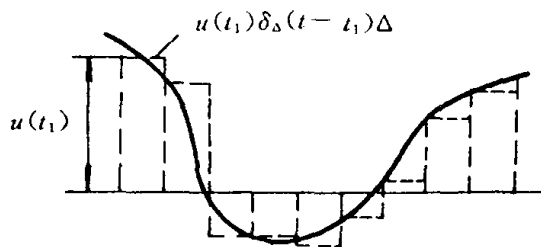


图 1-4 用脉冲函数逼近输入信号

若一个初始松弛的线性系统,具有 p 个输入、 q 个输出,则式(1-10)可推广为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1-11)$$

式中 $y(t) \in R^{q \times 1}, u(t) \in R^{p \times 1}$, 而 $G(t, \tau)$ 为

$$G(t, \tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t, \tau) & \cdots & g_{1p}(t, \tau) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{q1}(t, \tau) & \cdots & g_{qp}(t, \tau) \end{bmatrix}$$

$G(t, \tau)$ 称为系统的脉冲响应矩阵。 $G(t, \tau)$ 的元 $g_{ij}(t, \tau)$ 的物理意义是,在 τ 时刻,仅对系统的第 j 个输入端施加一脉冲函数,而在系统的第 i 个输出端引起的 t 时刻的响应。简言之, $g_{ij}(t, \tau)$ 是第 i 个输出端对第 j 个输入端的脉冲响应。

三、具有因果性线性松弛系统的输入-输出描述 (Input-Output Description of Multi-variable Linear Relaxed Systems with Causality)

1. 时变情形 (Time Variable Case)

根据式(1-2)和式(1-4),对具有因果性的初始松弛系统,其输入-输出关系可写成

$$y(t) = H u_{(-\infty, t]} \quad \forall t \in (-\infty, \infty) \quad (1-12)$$

对具有因果性的线性松弛系统,根据 $G(t, \tau)$ 的定义,有

$$G(t, \tau) = 0 \quad \forall t < \tau, \quad \tau \in (-\infty, \infty)$$

故具有因果性的线性松弛系统的输入-输出描述为

$$y(t) = \int_{-\infty}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1-13)$$

如果系统在 t_0 时刻松弛,则其输入-输出关系可写成

$$y_{[t_0, \infty)} = H u_{[t_0, \infty)} \quad (1-14)$$

显然,若系统初始松弛,且 $U_{(-\infty, t_0)} \equiv 0$, 则该系统在 t_0 是松弛的。但对于初始松弛的系统, $u_{(-\infty, t_0)} \equiv 0$ 并非系统在 t_0 时刻松弛的必要条件。例如,设有系统

$$y(t) = u(t-1)$$

虽然, $u_{(-\infty, t_0)} \neq 0$, 但只要 $u_{(t_0-1, t_0)} \equiv 0$, 则该系统在 t_0 是松弛的。对于线性系统而言,不难证明,系统在 t_0 时刻松弛的充要条件是,对于所有的 $t \geq t_0$, 有 $y(t) = H u_{(-\infty, t_0)} = 0$ 。

对于具有因果性且 t_0 时刻松弛的线性系统,其输入-输出描述为

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1-15)$$

应当指出,对于相当广泛一类系统,其中包括有理传递函数矩阵和线性时不变方程所描述的系统,若系统在 t_0 时刻松弛,必要且只要存在某个正数 ϵ , 由 $u_{[t_0, t_0+\epsilon)} \equiv 0$ 隐含着 $y_{[t_0, t_0+\epsilon)} \equiv 0$ 。

2. 时不变情形 (Time Invariable Case)

若线性松弛系统是时不变的,在 τ 时刻施加系统一个脉冲,那么系统在观测时刻 t 的输出为 $g(t, \tau)$ 。若将脉冲加入系统的时刻改为 $\tau + \alpha$ (α 为任意实数),则系统在观测时刻 $t + \alpha$ 的输出将和 $g(t, \tau)$ 相等,即

$$g(t + \alpha, \tau + \alpha) = g(t, \tau)$$

上式对任何 t, τ, α 均成立。若取 $\alpha = -\tau$, 则上式写成