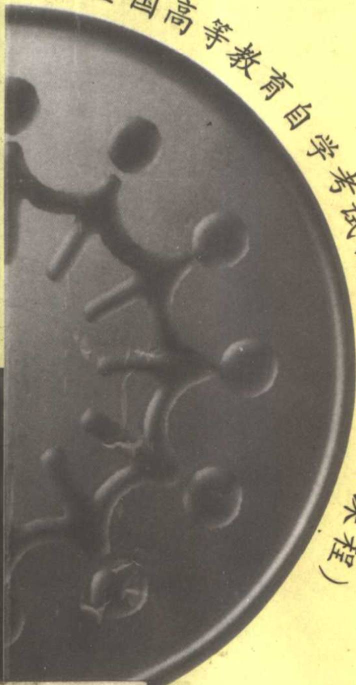
高等数学（工专）上册

附：高等数学（工专）自学考试大纲

组编／全国高等教育自学考试指导委员会
主编／陆庆乐　马知恩

全国高等教育自学考试指定教材（公共课程）



育出版社

高等数学（工专）上

全国高等教育自学考试指定教材

公共课程

高等数学

（上册）

（附：高等数学自学考试大纲

全国高等教育自学考试指导委员会　组编

陆庆乐

高等教育出版社

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 上/陆庆乐,马知恩编.—北京:高等教育出版社,1998 重印
ISBN 7-04-002622-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①陆… ②马… Ⅲ.高等数学-高等学校-自学考试-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 23110 号

高等数学(上)
陆庆乐 马知恩 编

出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
网 址	http://www.hep.edu.cn		
印 刷	北京市鑫鑫印刷厂		
开 本	880×1230 1/32		
印 张	15.75	版 次	2000年7月第2版
字 数	420 000	印 次	2000年7月第1次印刷
印 数	001—20100	定 价	18.90元

组编前言

当您开始阅读本书时，人类已经迈入了二十一世纪。

这是一个变幻难测的世纪，这是一个催人奋进的时代。科学技术飞速发展，知识更替日新月异。希望、困惑、机遇、挑战，随时随地都有可能出现在每一个社会成员的生活之中。抓住机遇，寻求发展，迎接挑战，适应变化的制胜法宝就是学习——依靠自己学习、终生学习。

作为我国高等教育组成部分的自学考试，其职责就是在高等教育这个水平上倡导自学、鼓励自学、帮助自学、推动自学，为每一个自学者铺就成才之路。组织编写供读者学习的教材就是履行这个职责的重要环节。毫无疑问，这种教材应当适合自学，应当有利于学习者掌握、了解新知识、新信息，有利于学习者增强创新意识、培养实践能力、形成自学能力，也有利于学习者学以致用、解决实际工作中所遇到的问题。具有如此特点的书，我们虽然沿用了“教材”这个概念，但它与那种仅供教师讲、学生听，教师不讲、学生不懂，以“教”为中心的教科书相比，已经在内容安排、形式体例、行文风格等方面都大不相同了。希望读者对此有所了解，以便从一开始就树立起依靠自己学习的坚定信念，不断探索适合自己的学习方法，充分利用已有的知识基础和实际工作经验，最大限度地发挥自己的潜能达到学习的目标。

欢迎读者提出意见和建议。

祝每一位读者自学成功。

全国高等教育自学考试指导委员会

1999年10月

编者的话

本书是根据全国高等教育自学考试指导委员会审定，经国家教育委员会批准，于1986年颁发的机械类专业专科《高等数学课程自学考试大纲》编写的．在编写过程中，我们考虑到自学考试的特点，结合多年来在教学中积累起来的经验和体会，在以下几个方面进行了努力．

1．鉴于自学考试缺少教师的系统传授，因此，为了便于自学，我们在编写时，对问题阐述得比较仔细，对用语力求确切，对文字注意通俗易懂．

2．注意启发引导，我们常常从实际问题引出抽象的概念，使读者知道概念的实际背景，让他们对所以要研究这一概念的重要意义有所了解，然后对概念的实质逐步进行揭示，从而逐渐加深他们对概念的理解，这样步步深入，将启发性寓于循序渐进之中．

3．对一些重要定理或公式的证明，注意了推证思路的阐述，并尽量设法结合几何直观，使读者易于接受．

4．书中例题较多，注意了对解题方法的训练，并及时指出在解题中一些在概念上或运算上易犯的错误．

5．在每节后配有帮助搞清概念的思考题与帮助掌握基本方法的运算题．在每章末还配有一些比较深入而带有综合性的总习题，对其中较难的题，给了适当的提示．每章还备有一份“自我检查题”，用以检验经过自学是否已经掌握了该章的主要内容，具有阶段性测验性质．

6．每章末写有“结束语”，其中除了对本章内容小结外，还包括了本章的内容提要、本章的基本要求、重点与难点以及对自学的建议与学习指导，以帮助读者抓住要点，提高学习质量与学习效率．书中带＊的为选学内容，不作考试要求．

7.注意了联系实际，特别是结合机械类专业的特点，举了一些有关机械方面的例子，供有关专业选学.

本书分上、下两册出版.上册内容为函数、极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用，分成三篇共六章.下册内容为空间解析几何、多元函数微积分学简介、常微分方程、无穷级数，分成两篇共五章.本书熔教材、习题集、学习指导书三者于一体，便于读者使用.

由于专科段与本科段的大纲中对一元函数微积分学的要求基本上是一样的，为了有利于读者在专科段学习通过的基础上进一步转入本科段学习，我们在编写该内容的重要部分时，比较靠近本科段水平，使读者能有比较扎实的数学基础.

本书是机械类专业自学考试教材，但也可供函授大学、职工大学、电视大学以及大专班师生参考或作为教材.

本书一定还存在不少的缺点与不足之处，诚恳希望读者提出批评与指正.

编者

1990年6月

目　录

第一篇　函数、极限、连续

第二篇 一元函数微分学

第三篇　一元函数积分学

附　录

第一篇　函数、极限、连续

第一章　函　　数

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是高等数学的主要研究对象．在这一章中，我们将在中学里已有知识的基础上，进一步阐明函数的一般定义，总结在中学里已经学过的一些函数，并介绍一些关于函数的简单性态．

1—1　常量与变量

自然界的现象无一不在变化之中，我们在观察自然现象、研究某些实际问题或从事生产的过程时，总会遇到许多量．如面积、体积、长度、时间、速度、温度等等．我们遇到的量，一般可以分为两种，一种是在过程进行中不断变化的量，这种量称为**变量**．变量常用 $x, y, z, u, v\cdots$ 等字母来表示．另一种是在过程进行中保持不变的量，这种量称为**常量**．常量往往用 $a, b, c, \alpha, \beta\cdots$ 等字母来表示．例如，一个物体作匀速直线运动，那末时间与位移的大小都是变量，而速度则为常量．又如，一个金属圆环．由于热胀冷缩，在受热的过程中，圆环的直径与周长在不断变大，冷却时又不断变小．因此，直径与周长都是变量．但在整个过程中，周长和直径之比却始终不变，是一个常量，就是圆周率 $\pi = 3.141592\cdots$．

应当注意，在研究一些特定的自然现象时，同一个量在这一现象中是常量，而在另一现象中却是变量．例如速度，在匀速运动中

是常量，在匀加速运动中是变量．还须注意常量与变量的相对意义．一个量是常量还是变量，跟所研究问题的具体情况有关．例如，气温的变化会引起机器上的轴热胀冷缩，如果引起的轴长变化极为微小，而这种变化对机器精度的影响又微不足道．那末为了简化研究过程，我们宁可把它当作常量来处理；但对比较精密的机器上的轴，即使轴长的变化极为微小，也会影响机器的精度，这时就应把它当作变量来处理．

区间　一个变量能取得许多数值，这些数值的集合往往随着所研究的问题的性质不同而不同．例如要在室温为 16℃ 的情况下把水烧开，于是水的温度将从 16℃ 增加到 100℃，即温度 T 这个变量取得从 16 到 100 之间的各个数值．又如变量 $x=\cos t$ 就只能取得从 -1 到 $+1$ 之间的所有数值．

在几何上，一个变量的值可用数轴上的点来描述．象上述的变量 $x=\cos t$，对所有 t 可取的值，就可用从 -1 到 $+1$ 线段上所有的点来表示，包括 -1 与 $+1$ 两个端点在内（图 1.1）．

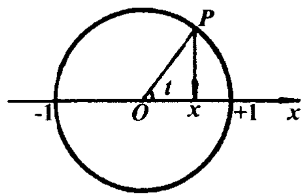


图 1.1

一个变量能取得的全部数值的集合，称为这个变量的**变化范围**或**变域**，今后我们经常遇到的变域是区间．所谓变量 x 的**区间**就是介于两个实数 a 与 b 之间的一切实数，在数轴上就是从 a 到 b 的线段．a 与 b 称为区间的**端点**，当 $a<b$ 时，a 称为**左端点**，b 称为**右端点**．

区间是否包括端点要看所研究的问题而定．按照包括或不包括端点在内，区间可以分为：

(1) **闭区间**，两个端点都包括在内，记作 $a\leqslant x\leqslant b$，或 $[a,b]$；

(2) **开区间**，两个端点都不包括在内，记作 $a<x<b$，或 (a,b)；

(3) **半开区间**，只包括一个端点在内，记作 $a\leqslant x<b$，或 $[a,b)$ 及 $a<x\leqslant b$ 或 $(a,b]$（图 1.2）．

在图 1.2 中，区间的端点包括在内时，把端点画成实点，不包括在内时，把端点画成空点.

图 1.2

除了上述这些**有限区间**外，还有各种**无限区间**：

(4) 小于(不大于) c 的一切实数，记作 $-\infty<x<c$ 或 $(-\infty, c)$ ($-\infty<x\leqslant c$ 或 $(-\infty, c]$)；

(5) 大于(不小于) c 的一切实数，记作 $c<x<+\infty$ 或 $(c, +\infty)$ ($c\leqslant x<+\infty$ 或 $[c, +\infty)$)；

(6) 一切实数，记作 $-\infty<x<+\infty$ 或 $(-\infty, +\infty)$.

以后我们会看到，有些定理的成立将跟变量的区间的开闭有很大关系，因此我们在学习时要多加注意.但有些情形并不一定要指明区间的开闭，在这种场合，为了方便起见，我们常用 I 或 X 等来表示区间.

邻区　在下一章讲极限时，我们要用到邻区的概念.设 x_0 为一已知点，包括 x_0 的任意一个开区间 (a, b) 称为 x_0 的**邻区**.但我们通常考虑的往往是以 x_0 为中点的区间 (a, b)，这时我们称 x_0 为邻区的中心，$\frac{1}{2}(b-a)$ 为邻区的半径.图 1.3 所表示的是以点 x_0 为中心，ε 为半径的邻区 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$，称为 **$x_0$ 的 ε 邻区**.

设 x 为这邻区内的任一点，那末 x 满足不等式

$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon.$$

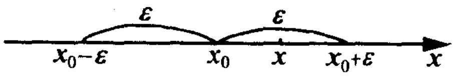


图 1.3

这个不等式可写成

$$|x-x_0|<\varepsilon. \tag{1—1}$$

所以(1—1)式也可用以表示 x_0 的 ε 邻区. 在这个邻区中, 如果再把它的中心 x_0 去掉, 就称为 **x_0 的 ε 去心邻区**, 可用不等式

$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon, x\neq x_0$$

或

$$0<|x-x_0|<\varepsilon \tag{1—2}$$

表示. (1—2)式中的 $0<|x-x_0|$ 的含意就是 $x\neq x_0$.

应当指出, 邻区的半径虽然没有明确规定其大小, 但一般总是取很小的正数.

习 题 1—1

1. 在把圆钢锻打成圆盘的过程中, 圆钢的体积 V, 直径 D, 长度 L 这三个量中, 哪一个是常量? 哪一个是变量?

2. 一个人的身高与体重是常量还是变量?

3. 试把下列区间:

$$[c,+\infty),(c,+\infty),(-\infty,c]$$

在数轴上表示出来.

4. 用不等式或绝对值不等式表示下列各区间:

(1) $(-2,3)$; (2) $[-2,2]$; (3) $(-5,+\infty)$.

5. 开区间 $(1,3)$ 是不是下列各点的邻区?

(1) 1.1; (2) 2; (3) 2.5; (4) 3.001.

6. 试用绝对值不等式表示 3 的 $\frac{1}{2}$ 去心邻区.

1—2 函 数 概 念

现在让我们在上节所讲的变量概念的基础上来阐明函数概念.

在研究某一自然现象或实际问题的过程中, 总会发现问题中的变量并不都是独立变化的, 它们之间往往存在着依存关系. 下面我们先考察几个具体例子.

例 1　一个自由落体，从开始下落时算起经过的时间设为 t（秒），在这段时间中落体的位移的大小设为 s（米）. 如果不计阻力，那末 s 与 t 之间有如下的依存关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \qquad (1—3)$$

其中 g 为重力加速度，是一个常数（$g=9.8$ 米/秒^2）.

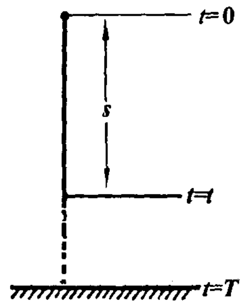


图 1.4

如果落体从开始到着地所需的时间为 T（图 1.4），那末变量 t 的变化范围（或称变域）为

$$0\leqslant t\leqslant T.$$

当 t 在这变化范围内任取一值时，都可以从（1—3）求出 s 的对应值. 例如

$t=1$（秒）时，$s=\frac{1}{2}\times 9.8\times 1^2=4.9$（米）；

$t=2$（秒）时，$s=\frac{1}{2}\times 9.8\times 2^2=19.6$（米）.

例 2　金属棒受热后要伸长，根据实验的结果，棒长 l 与温度 T℃ 之间有如下的依存关系：

$$l=l_0(1+\alpha T), \qquad (1—4)$$

其中 l_0 是 0℃ 时的棒长，α 是一个常数，称为“线胀系数”，它的值随着金属材料不同而不同. 在 T 可以取值的范围内任取一值时，由（1—4）可求出 l 的对应值.

在以上两例中，变量之间的依存关系都由一个确定的公式表出. 但应指出，有无这种确定的表达式，对问题中变量之间有依存关系存在是无关紧要的.

例 3　下面是一台发电机启动后一小时内每分钟的转速记录：