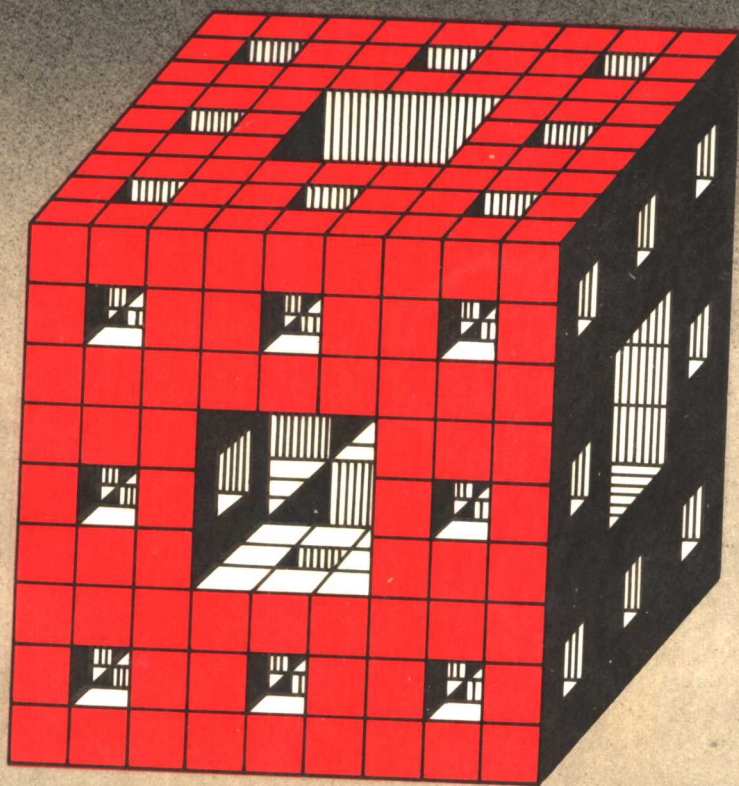


李鍾蓀譯・商務印書館

集的故事

STORIES ABOUT SETS



李鍾蓀譯・商務印書館

集的故事

STORIES

ABOUT SETS

N. Ya. Vilenkin

上海工業學院圖書館
藏書章

集的故事

譯者——李鍾蓀

出版者——商務印書館香港分館

香港鰂魚涌芬尼街2號D僑英大廈五樓

印刷者——中華商務聯合印刷(香港)有限公司

香港九龍炮仗街75號

版次——1979年1月初版

1984年1月重印

© 1979 1984 商務印書館香港分館

ISBN 962 07 2044 X

譯者語

對一位初次接觸數學上有關無限的問題的讀者來說，本書確實爲他提供了許多有趣而又令人驚奇的例子。然而，本書的最引人入勝的地方並不在於此。

作者在介紹過無限及其有關的一些有趣性質後，立即爲研究這些性質的步署提出了一連串的一個比一個深刻的問題。圍繞着這些問題，作者精彩而具體地描繪了數學的發展過程。讀者可以清楚地看到，數學上一些重要的概念，例如：集、基數、函數、曲綫、面、維數等等是如何在錯綜複雜的具體情況下逐步抽象出來的。

本書所用到的數學技巧是初等的，只要有中四或以上的程度就够用了。但由於本書作者的重點放在概念發展的描述上，讀者在閱讀本書時，需要的是：嚴謹、仔細、思考和耐心。如果讀者在概念方面要求嚴謹，本書將會把他引進一個新天地。

譯者在一些地方加入了註釋以幫助讀者理解。顯著的錯誤都盡可能改正了。單位都已改爲公制。

由於水平有限，錯誤在所難免。希望讀者們熱心指正。

原 序(節譯)

我最初有機會聽到集論是在一個由蓋爾芳德為學童而舉辦的講座裏。那時他剛剛開始他的教學生涯。在兩小時的課堂中，他為我們講了一些在我們看來是完全不可能的東西：自然數跟有理數一樣多，而一個區間和一個正方形有相同數目的點。

當我在大學還是一個數學力學系學生的時候，我就對集論的認識得到了進一步的發展。除了上課聽講和參加研討會外，我們有自己的，不是教授們所能猜測得到的學習方法。課後（我必須承認，有時甚至在內容不是特別有趣的上課時間），我們在大樓走廊裏漫步，討論有趣的問題、離奇的例子以及巧妙的證明。在這些交談裏，一年級學生們從他們那些更富經驗的同學中學到了許多東西。比如，如何作一條曲線去填滿一個正方形，如何找一個到處都沒有導數的函數等等。

誠然，那些交談，是屬於“範圍以外”的；而且，如果你在聽完這些討論後就去考試，還算得上是一種不可饒恕的輕佻舉止。因為，那裏根本沒有關於考試的話題——據課程規定，還有兩年我們才需學習“實變函數”。然而這個“走廊”上的先修，對於瞭解講義和考試有多麼大的幫助！對每一條定理，我們都可以回想起一些先前討論過的有趣的問題、一些感性的類比以及直觀的例子。

我想用“走廊”式的學習方式，為讀者講講集論。所以，我們

把注意力主要集中在清楚的表達問題，討論意外的出奇的例子上，不時亦會引入一些矛盾的“樸素”討論。我們將發現：實變函數論就全部都是充滿了這些東西。如果一個高中學生或大專學生在讀完本書後，希望深入一步研究集論或實變函數論，筆者就認為本書可以算是成功了。

書末列有一些實變函數論的習題；試一試去解決它們，一定會對讀者有幫助的。

目 錄

譯者語.....	1
原 序（節譯）.....	1
1. 無限集的一些奇異性質.....	1
怪酒店——文靜的離子的第一千零一次旅程.....	4
作者語.....	12
2. 集及其運算.....	13
集一詞有什麼意思？.....	13
如何確定一個集.....	14
剃還是不剃？.....	17
空 集.....	20
集論和初等數學.....	22
子 集.....	23
宇 集.....	24
交 集.....	25
和 集.....	26
集的分解.....	30
集的相減.....	32
集的代數.....	33
布爾代數.....	35
3. 集的基數.....	37

集的相等	37
在舞池中	38
此消彼長	39
部分能否等於全體？	41
可數集	42
代數數	44
不等集	46
可數集——最小的無限集	49
不可數集	50
永遠不能進行的人口普查	51
連續統(閉聯集)的不可數性	54
超越數的存在	55
長、短綫段都有同樣數目的點	56
綫段和正方形	58
不知怎麼地，還有一個問題未能解決！	60
有沒有最大基數的集？	61
無限的算術	63
無限指數	66
數的編序	67
完全有序集	69
謎樣的公理	72
一個蘋果變成兩個	73
4. 奇特的函數和曲綫——在一個數學藝術博物館中遊歷	75
函數的概念是怎樣發展的？	75
妖怪從瓶中走出來了	79

濕點	81
鬼樓梯	85
多刺的曲線	87
無限長的閉曲線	91
數學地氈	93
歐幾里德並不倚賴於歐幾里德	96
嚴謹的定義是否需要?	97
曲線是一個動點的軌迹	99
定理是明白的, 但證明却不是	102
經過正方形所有點的曲線	103
翻天覆地	105
如何創作雕像	107
連續統	108
康托爾曲線	110
曲線的面積能否異於零?	111
沒有面積的區域	115
某些奇異的例子	118
區域與邊界	119
一個大型的灌溉工程	120
一項“不能寫論文”的課題	122
維數的歸納定義	124
論文是要來刊登, 不是要來審查!	126
結 論	128
習 題, 例 題	129

1. 無限集的一些奇異性質

如果說全部數學是由無限這觀念推衍出來的，這並不算誇張。在數學中，我們通常並不是對個別的東西（數字，幾何圖形）感到興趣，而着重於這樣的一類東西：**所有的**自然數，**所有的**三角形等等。然而這樣的集合就包含了**無限**多個個體。

基於這個理由，數學家和哲學家歷來對無限這觀念很有興趣。而這個興趣正是產生在人們開始認識到每個自然數都有一個後繼數時，也就是認識到數序是無限的時候。可是，在剛開始試着處理無限的問題時，就引出了許多反論。

例如，希臘哲學家芝諾曾經用無限的概念去證明運動是不可能的！他說：要把箭射到靶就得要那箭先走完射程的一半，但在走完一半之前，它一定要走過路程的四分之一、八分之一，等等。由於分半過程是無法終止的（無限在這裏出現了！），那末箭就永遠不會離開弓弦。他同樣地證明了敏捷的亞奇里斯跑不過緩慢的烏龜^①。

① 譯註：芝諾的論據是這樣的：首先，在亞奇里斯未起步時，龜在他前頭爬着，設位置為 S_0 。當他進到龜的原來位置 S_0 時，不論龜爬得多慢，它一定已經離開原有位置，而且在亞奇里斯到達 S_0 之前。設這時龜的位置為 S_1 。但當亞奇里斯走到 S_1 時，龜已經走到新的位置 S_2 。如此下去，雖然 $S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$ 愈來愈接近，但龜始終在亞奇里斯之前（相距 $S_n - S_{n-1} > 0$ ）。芝諾從而論證了亞奇里斯永遠追不到龜。

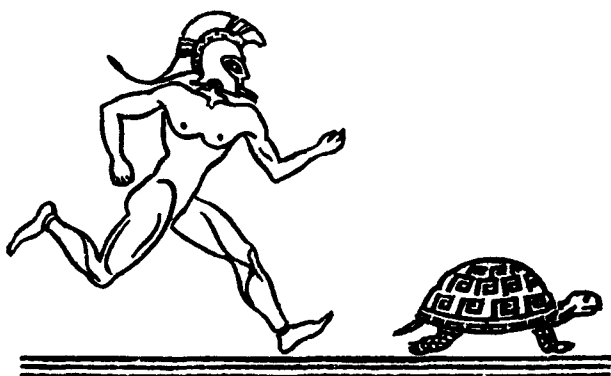


圖 1 亞奇里斯和龜

既然有這些反論和詭辯，古希臘的數學家就避開任何與無限的概念有關的東西，將它排斥於數學論證之外。他們假定所有幾何圖形都由有限數目的、細小而不可分割的部分（原子）組成。不過，從這個假設出發却又引出了不可能的事，比如說，要平分一個圓^①——但圓心只能屬於其中的一個等份，然而，這跟等分的意義就產生了矛盾。

中世紀時，關於無限的問題主要集中於這樣的爭論：能够坐在針尖上的天使的集是不是一個無限集。十七世紀數學分析建立起來後，無限集的概念才開始得到較為廣泛的應用。諸如“無限大量”和“無限小量”都用於數學的每一步論證裏。然而，當時還未探討包含無限個元的集；所研究的是終極可以大過任何給定數字的變量，這樣的量當時稱為“潛在性無限大”，意思是任你喜歡多大就多大〔潛在性(Potential)，即可能性〕。

只有到了十九世紀中葉，有關一個無限大數目的元組成的無

① 譯註：指圓周及其內部。

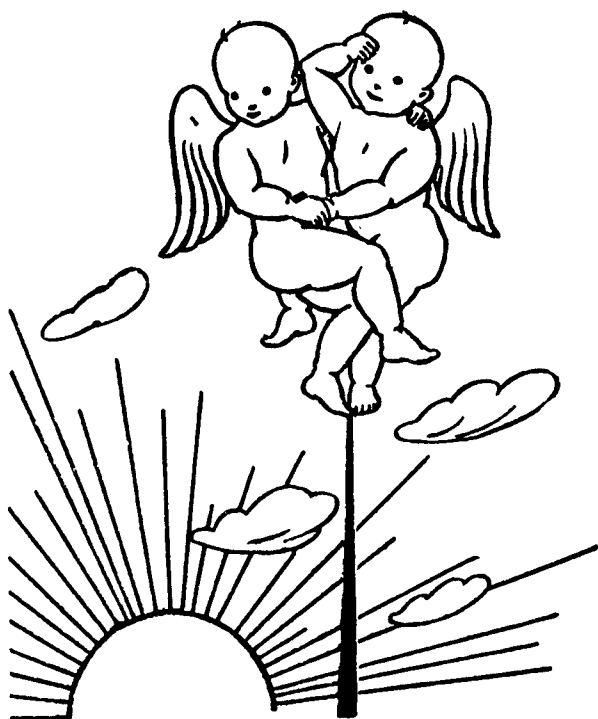


圖 2 有多少天使能坐在針尖上

限集的研究才開始出現在無限概念的分析中。無限集的數學理論的創始人是捷克學者波爾查諾（不幸直到他死後許多年，1848 年他的主要著作才發表）和德國數學家哥爾·康托爾。令人驚奇的是他們都很熟習學院派的科學^①。然而却能在學院派的基礎上向

① 譯註：學院派由卡路里時期（第九世紀）至笛卡兒哲學興起時（第十七世紀）止，統治了西方基督教文明。其哲學結構和思考傾向源自古老的，神秘的，直覺的傳統，初期特別受奧古斯丁派哲學影響，以後則以亞里士多德為宗師。

前進展，將集論變成數學一個重要部分。

波爾查諾和康托爾的主要成就是對於無限集性質的研究。有限集的性質早已為他們的前人所熟識了。他們證明了無限集的性質跟有限集的性質毫不相像；許多對有限集不可行的運算，對於無限集竟能輕易地完成。比方，試圖從一個客滿的酒店裏找空房，並假定每間房不許住一人以上。這當然不行！原因是酒店房間的數目有限！但如果有無限個房間呢，……這樣的酒店却可以在星際旅行家——文靜的離子——的故事裏找到。這是波蘭幻想小說家史丹尼斯羅夫·雷姆寫的《星際送奶人——文靜的離子》一書中的主角。

怪酒店——文靜的離子的第一千零一次旅程

我參加仙女座星雲俱樂部的叙會，一直延續至深夜，回家時已相當遲了。整晚我受着惡夢折磨。我夢見我吞下一個巨大的庫爾度，又夢見再踏足於杜秩多夫行星上，我不曉得怎樣逃避一個可怕的能將人變為六角形的機器；然後呢……人們通常勸告老年人不要與味濃的蜜酒打交道。一個意外的電話把我帶回現實。原來是我的老朋友和星際旅伴達蘭托教授打來的。

“有件急事，親愛的離子，”我聽見他說，“太空人發現了宇宙裏有一個奇異物體——一道神秘黑綫由一個銀河系伸到另一個中，誰也不知道是什麼回事。甚至最好的望遠鏡和火箭上的無線電望遠鏡亦無法找出結果。我們最後求助於你，請立即依星雲 ACD—1587 的方向飛去。”

翌日我由修理店取回我的舊光子火箭，裝配上我的時間加速

器和電子機械人。它通曉所有語言和關於星際旅行的故事，它能使我至少在五年長的旅程中得到娛樂。然後我就出發去處理那件急事。

正當電子機械人剛講完他所有的故事，正在開始重複時（沒有比第十次重聽那些老話更煩了），我的旅程目的地就不遠處出現。遮着那條神秘綫的銀河都在我後面，前面就是……宇宙酒店。不久前我為那些星際流浪者建造了一個小行星，可是他們把它拆開了，結果一個庇護所也沒有了。之後，他們在另外一個銀河系決定終止流浪，並建造一所壯觀建築物——為所有宇宙旅客而設的酒店，這間酒店幾乎跨越過所有的銀河。我說“幾乎所有”，原因是流浪者們拆掉了一些無人住的銀河系，同時帶走了餘下的每個銀河中某些位置不好的星團。

然而，他們把建築酒店的工作做得極好，每間房都裝有供應冷、暖等離子體的龍頭，如果你願意，你可以在晚上分散為原子，明早服務員會把你合回原形。

但是，最重要的是酒店有無限個房間。流浪者希望沒有人再聽到那句在他們流浪時經常困擾他們的話：“沒有空房”。

話雖如此，我的運氣却不好。進入門廊時第一眼就看到一個牌：參加宇宙動物學家會議的代表請上 127 樓登記。

由於所有銀河都派來了宇宙動物學家，因此代表有無限個，於是，與會者佔用了所有房間。沒有我的地方。真的，經理試圖勸服一些代表兩人用一房，使得我可以與其中一人共用房間。可是當我知道一個同房要吸氣，另一個則認為 860°C 室溫方才正常時，我只得婉言拒絕這些“好”鄰居。

僥倖的是酒店的總管曾經是個流浪者，還記得我幫過他和他

的朋友。他想替我在酒店找個地方。畢竟在太空過夜，會染上肺炎的。幾經思量之下，他就對經理說：

“送他去一號。”

“那我把一號房客安置在何處？”

“送他去二號。二號房的房客搬往三號，三號的去四號，依此類推。”

就是從這點我才開始領悟到酒店的特殊性。如果只是有限個房間，排在最後號碼的房客便要搬到太空去。正因為有無限個房間，於是人人都有地方了，而我亦無須剝奪宇宙動物學家們的房間。

次早，詫異得很，他們要求我搬到一百萬號。原來，VSK—3472 銀河來了一批遲到的宇宙動物學家，酒店又得騰空 999,999 個房子給他們。但是，逗留到第三天我到經理處付賬時，很震驚地見到經理的窗外竟排着長龍，一直排到馬哲侖星雲。就在這個時候，我聽到一個聲音：

“我想出兩個仙女座星雲的郵票換取一個天狼星的郵票。”

“誰人有宇宙紀元 57 年的厄比安郵票？”

我迷惑地轉身問那個經理：

“這是什麼人？”

“這是星際集郵家會議。”

“很多人嗎？”

“是個無限集——每個銀河有一代表。”

“但你怎樣找房子呢，到明天以前宇宙動物學家是不會遷出的。”

“知道了，我正要找總管談幾分鐘。”

不過，發覺這次問題複雜得多，他們由幾分鐘講上一個小時。最後，經理離開總管的辦公室，進行他的新安排。首先他叫一號房客搬去二號；對我來說很出奇，因為憑我的經驗，那樣只會空出一個房間，而他却要找出不少於集郵家的無限集的空房。然而經理繼續發令：

“把二號房客搬進四號，三號的去六號；總括來說，住在 n 號的房客到 $2n$ 號去。”

現在他的計劃清楚了；用這個法則，他可以空出奇數號房組成的無限集，去安置集郵家。而讓宇宙動物學家佔用偶數號房，集郵家則佔用奇數號房。（我沒有提及自己——三日來我與動物學家相處得很友好，以致我被選作名譽代表去參與會；所以同所有的宇宙動物學家一樣，我也要搬房間，由一百萬號搬去二百萬號。）我的一個集郵家朋友，他排在第 574 位，得到了 1147 號房。總之，排第 n 位的集郵家得到 $2n-1$ 號房。

次日，房間問題緩和了——宇宙動物學家會議結束，他們要起程回家。我搬進總管住所，他住所那裏有間空房。但是對住客是好的事並不常使管理人開心，幾天後我那慷慨的主人有點愁悶了。

我問他：“有什麼不妥？”

“半數房間都空了，我們的經濟計劃不能完成。”

其實我不太了解他說的是什麼經濟計劃，無論如何，他已收過無限個房間的租金，不過我還是向他建議：

“好吧，何不把客人們安置得緊密點；四處搬動他們使得所有的房間住滿為止。”

這倒是易事。集郵家住的是單數號房：1, 3, 5, 7, 9 等等。

他們不動 1 號，將 3 號房客搬去 2 號，5 號去 3 號，7 號去 4 號等等。最後，即使沒有新客到，所有房間却又再次住滿了。

雖然如此，總管的愁悶依然沒有過去。原來流浪者並不滿足單單建立宇宙酒店，他們毫不疲倦地建造無限間酒店，每間都有無限個房間。為此，他們拆了很多個銀河，使得銀河間的平衡破壞了，這會產生嚴重的後果。所以人們要求除了我們住着的那間外，其餘所有的都要關閉，把所用的材料放回原處。可是剛好全部酒店（包括我們那間在內）都已住滿了，這個命令很難執行。他受命要將無限間酒店的房客（其中每間都有無限位房客）都搬到我們這裏，但這裏早已住滿了！

“我受够了！”總管叫着。“我首先安置好多出的一位，接着是另外 999,999 位新客，然後甚至是一個旅客們的無限集；如今他們竟然要我去為無限個多的無限位住客的集安排房間。這不行，酒店不是橡皮造的，隨便他們怎樣安置好了。”

然而命令終究是命令，他們有五晷時間去準備迎接新房客。在這五晷中，酒店無人工作——人人都思量如何解決才好。為此，他們宣佈舉行一個競賽——獎品是遊覽某銀河；可惜所有提出的解答都沒有成功，後來有個正在受訓的厨子建議：不須動 1 號房客，2 號的搬到 1001 號，三號的則去 2001 號等等。之後將第二間酒店的房客安置在我們的 2 號，1002 號，2002 號等等，第三間的則入住 3 號，1003 號，2003 號等。這個辦法被否定了，因為我們不知如何給第 1001 間酒店的房客找地方；然而，依此法，最初 1000 間酒店所有的房客都有房住。這使我們想起這樣的故事：奴性十足的羅馬元老院提議改稱九月為梯伯里亞斯，以此榮耀皇帝（七、八兩個月已分別命名為朱里安斯和奧古斯脫