教育部高职高专规划教材

高等数学与工程数学习题课指导

阎章杭　韩成标　杨明　主编

化学工业出版社
教材出版中心

教育部高职高专规划教材

高等数学与工程数学习题课指导

阎章杭　韩成标　杨明　主编

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

(京) 新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学与工程数学习题课指导 / 阎章杭，韩成标，杨明 主编．—北京：化学工业出版社，2003.7
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5025-4447-X

Ⅰ．高… Ⅱ．①阎…②韩…③杨… Ⅲ．①高等数学-高等学校：技术学院-教学参考资料②工程数学-高等学校：技术学院-教学参考资料 Ⅳ．①013②029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 031590 号

教育部高职高专规划教材
高等数学与工程数学习题课指导
阎章杭 韩成标 杨明 主编
责任编辑：高 钰
文字编辑：刘志茹
责任校对：洪雅姝
封面设计：郑小红

*

化学工业出版社
教材出版中心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029）
发行电话：（010） 64982530
http://www.cip.com.cn

*

新华书店北京发行所经销
北京市昌平振南印刷厂印刷
三河市东柳装订厂装订
开本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 15¾ 字数 389 千字
2003 年 7 月第 1 版 2003 年 7 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-4447-X/G・1189
定 价：20.00 元

出版说明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下，各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》)，通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成。这500种教材中，专门课（专业基础课、专业理论与专业能力课）教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求，在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上，充分吸取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位，调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础，突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下，专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用2～3年的时间，在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材，并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作，不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001年4月3日

前　言

当前，我国高职高专教育成为社会关注的热点，面临大好的发展机遇．同时，国家的经济、科技和社会发展也对高职高专教育人才的培养提出了许多更高要求．在教育部高职高专规划教材专家组关怀和指导下，开封大学、河南大学、洛阳大学、包头职业技术学院、石家庄职业技术学院、漯河职业技术学院、南阳理工学院、商丘职业技术学院、徐州建筑职业技术学院、天津渤海职业技术学院、石家庄铁路职业技术学院、无锡职业技术学院、河北科技大学理学院、合肥学院、厦门鹭江职业大学、三门峡职业技术学院等院校的优秀教师和专家，经过长时间的酝酿和研究，编写了一套面向21世纪比较符合当前高职高专院校工程类专业教学实际的数学教材《高等数学与工程数学》和配套的习题课指导．

主教材《高等数学与工程数学》内容包括：一元函数微积分、多元函数微积分、概率与数理统计初步、线性代数初步、无穷级数、常微分方程与拉普拉斯变换．该教材所用的学时数约为110～140学时左右，比较贴近各高职高专院校工程类专业的教学实际．

在该教材的编写中，我们以国家教育部关于三年制高职高专教育的教学大纲为重要依据来组织教学内容的编写，同时又进一步结合当前高等职业教育发展趋势及学校自身的状况，力争使教材更具有科学性、基础性和使用性．

配套教材《高等数学与工程数学习题课指导》，其内容包括：每章内容小结、常见问题的分类及解题方法、典型习题解答与提示、自我测验、往届试卷等．全书针对当前高职高专学生普遍存在的课程难学、规律难寻、习题难做、表述难全等问题，对主教材中的每一章，从学习内容、学习方法到习题解答、自我检测都进行系统的、科学的辅导．特别注重培养学生自学能力和运用数学知识解决实际问题的能力．该书内容的编排为主教材的习题课提供了充实的资料和素材，大大的方便了教师备课及学生学习．为了便于阅读，本书在章节顺序及内容叙述、解题方法、符号标志等方面都与主教材保持一致．另外在本书的附录中，还精选了几套期终考试试题，以供学生自我检验学习效果，提高学生学习的主动性和积极性．

该书由阎章杭总策划，负责组织实施．主编为阎章杭、韩成标、杨明．副主编为哈斯、王灵色．第一篇由拜云胜编写，第二篇由拜云胜、辛自立、白景华、郭建萍、杨明、韩成标、毛珍玲、鞠金东编写，第三篇由阎章杭、辛自立、赵炳根编写，第四篇由路世英、程传蕊、尤克义编写，第五篇由路世英、庞进生、李国凤编写，第六篇由白水周、拜云胜、哈斯编写，第七篇由孙国明、拜云胜、白水周编写．

在本书编写过程中，曾得到有关学校的领导、系部领导和有关专家的大力支持和帮助，杜跃鹏和杨菲老师积极参与了利用Mathematica软件进行数学实验内容的编写和审核，河南大学的教授、专家阎育华、王国胜曾对本书的工程数学部分进行了认真的审核，并提出了许

多宝贵的意见，在此一并表示衷心的谢意！

由于我们水平有限，错误和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正．

《高等数学与工程数学》教材编委会

2003 年 3 月

内 容 提 要

本书是教育部高职高专规划教材《高等数学与工程数学》的配套教材．内容主要包括：每章内容小结；常见问题分类及解法；《高等数学与工程数学》习题答案及典型习题解答和自我测验．另外还附有几套精选期终考试试卷及答案．其中常见问题分类及解法与典型习题解答是本书的主体内容．

本书紧密配合主教材每章的教学内容进行辅导和练习，其内容突出应用，讲究实效．

本书可作为高职高专各工科专业、成人高校和本科院校开办的二级成人教育学院，职业技术学院各工科专业学习“高等数学与工程数学”的辅助教材，也可作为科技工作者和从事本课程教学的教师阅读与参考用书．

目　录

第七篇　常微分方程与拉普拉斯变换

附录

注：* 为选学内容

第一篇　预备知识

*第一章　初等数学提要及重要公式

典型习题解答与提示

习题 1-6

1. 略.

2. N[Pi^2+Sqrt[E], 30]

11.5183256717894867656831417877

3. f[x_]=E^x * Sin[x], e^xSin[x],

N[f[-1]], -0.30956;　　N[f[-100]], 1.88372×10^{-44};

N[f[-10]], 0.0000246985;　　N[f[-1000]], $-4.197206560965\times10^{-435}$.

4. (1) Plot[ArcTan[x], {x, -10,10}] (图 1-1)

(2) Plot[{Exp[x], Exp[-x]}, {x, -2, 2}] (图 1-2)

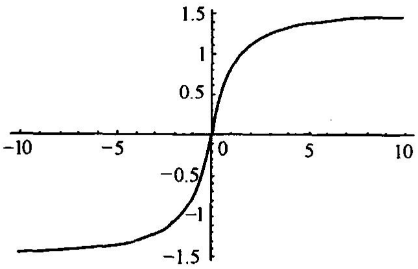

图 1-1　$y=\arctan x$ 图像

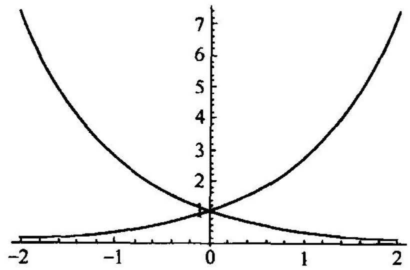

图 1-2　$y=e^x$ 和 $y=e^{-x}$ 图像

(3) Plot[Exp[1/x], {x, -10, 10},PlotRange→{0, 10}] (图 1-3)

(4) Plot[Sin[x]/x, {x, -10, 10}] (图 1-4)（注：箭头"→"用"—"+">"操作）

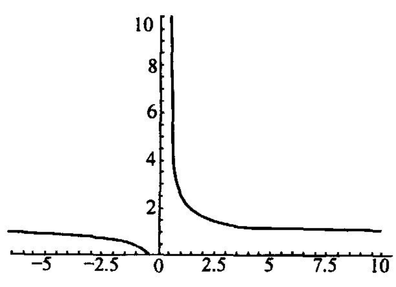

图 1-3　$y=e^{\frac{1}{x}}$ 图像

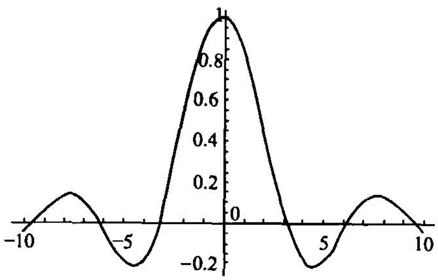

图 1-4　$y=\frac{\sin x}{x}$ 图像

（5）Plot[(1+1/x)^x，{x，1，50}]（图 1-5）

（6）Plot[(1+x)^(1/x)，{x，－0.9，1}]（图 1-6）

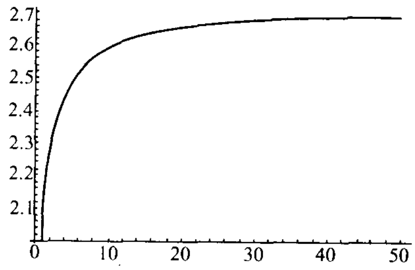

图 1-5　$y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 图像

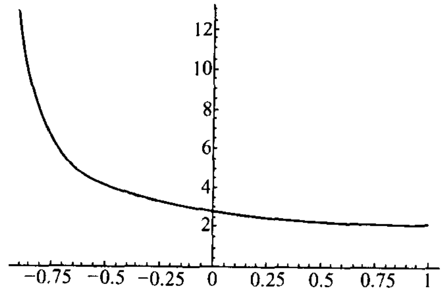

图 1-6　$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 图像

复习题一

1.（1）$(a^{\frac{9}{2}}a^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\div(a^{-\frac{7}{3}}a^{\frac{13}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^3)^{\frac{1}{3}}\div(a^2)^{\frac{1}{2}}=a\div a=1$；

（2）$e^{\ln 2^{-2}}-e^{\ln 3}+4\ln e-0=\dfrac{1}{4}-3+4=1\dfrac{1}{4}$；　（3）$\dfrac{1-1-1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

2.（1）$-3<x<3$；　（2）$-7<x-4<7$，得 $-3<x<11$；

（3）$\begin{cases}-2\leqslant x-2\leqslant 2\\ x\neq 2\end{cases}$，得 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 4\\ x\neq 2\end{cases}$；　（4）$x<-3$ 或 $x>1$.

3.（1）$9-x^2\geqslant 0$，所以 $-3\leqslant x\leqslant 3$；　（2）$\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -2\end{cases}$；

（3）$-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$，得 $-1\leqslant x\leqslant 3$；

（4）$\begin{cases}3-x>0\\ |x|-1>0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x<3\\ x<-1\text{ 或 }x>1\end{cases}$，即 $x<-1$ 或 $1<x<3$；

（5）$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1\\ x^2-x+6>0\end{cases}$，$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\ x<-2\text{ 或 }x>3\end{cases}$，即 $-3\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 4$；

（6）$x-1>0$ 且 $x-1\neq 1$，即 $x>1$ 且 $x\neq 2$.

4. $f(0)=2$，$f(1)=0$，$f(2)=0$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x}+2$，

$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2=x^2-x$.

5.（1）$-1\leqslant 3m+1\leqslant 1$，即 $-\dfrac{2}{3}\leqslant m\leqslant 0$；

（2）$\begin{cases}\left|\dfrac{1}{2m+1}\right|\leqslant 1\\ m\neq-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}|2m+1|\geqslant 1\\ m\neq-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}2m+1\geqslant 1\text{ 或 }2m+1\leqslant -1\\ m\neq-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，

即 $m\geqslant 0$ 或 $m\leqslant -1$；

（3）$\left|\dfrac{m-1}{2m}\right|\leqslant 1$，故 $|m-1|\leqslant|2m|$，得 $m^2-2m+1\leqslant 4m^2$，$3m^2+2m-1\geqslant 0$，

所以 $m\leqslant -1$ 或 $m\geqslant \frac{1}{3}$.

6. (1) $f(-x)=[\sin(-x)]^2+\cos(-x)=\sin^2 x+\cos x=f(x)$，故该函数为偶函数；

(2) $f(-x)=[\sin(-x)]^3+\tan(-x)=-\sin^3 x-\tan x=-f(x)$，故该函数为奇函数；

(3) $f(-x)=\frac{-\sin x}{1+\cos x}=-f(x)$，故该函数为奇函数.

7. $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{3}{4}$，得 $3\tan^2\alpha-8\tan\alpha-3=0$，所以 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$（因 α 位于第四象限），所以 $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=-\frac{1}{3}$，$\sin^2\alpha=\frac{1}{10}$，$\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ 同理可得 $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

8. 令 $[-(m+2)]^2-4\times 4\geqslant 0$，得 $m+2\leqslant -4$ 或 $m+2\geqslant 4$，即 $m\leqslant -6$ 或 $m\geqslant 2$ 时，方程有实根.

9. (1) 当 $x^2+1=2x$，即 $x=1$ 时，有 $y_1=y_2$；

(2) 当 $a>1$ 时，$x^2+1>2x$ 即 $(x-1)^2>0$，

故 $x\neq 1$ 且 $x>0$，有 $y_1>y_2$，当 $a<1$ 时，$x^2+1<2x$ 无解；

(3) 当 $a>1$ 时，$x^2+1<2x$ 无解；

当 $a<1$ 时，$x^2+1>2x$，得 $x\neq 1$ 且 $x>0$ 时，有 $y_1<y_2$.

10. 设 $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=3$，

则 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2+3}{1-2\times 3}=-1$，所以 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$，故另一个内角为 $\frac{\pi}{4}$.

11. $\frac{7}{25}=\cos\beta=\cos(180^\circ-2\alpha)=-\cos 2\alpha$，　所以 $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1+\frac{7}{25}}{2}=\frac{16}{25}$，

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3}{5}$.

12. (1) 原式 $=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=\sqrt{1-x^2}$；　(2) 原式 $=\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $\begin{cases}x^2-3x+2>0\\ x^2-2x-3<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2-3x+2<0\\ x^2-2x-3>0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x<1 \text{ 或 } x>2\\ -1<x<3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1<x<2\\ x<-1 \text{ 或 } x>3\end{cases}$ 无解，

即 $-1<x<1$ 或 $2<x<3$.

14. $\sqrt{1-\sin 2\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=|\sin\alpha-\cos\alpha|$，

因为当 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 时，$\sin\alpha\geqslant\cos\alpha$，这时有 $\sqrt{1-\sin 2\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha$.

15. (1) $\in$；　(2) $\subset$；　(3) $\notin$；　(4) $\subset$.

16. $A\cup B$.

17. $A\cap B=\{(0,0)\}$，$A\cup B=\{(x,y)\mid x=0 \text{ 或 } y=0\}$，

$\overline{A}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x\neq 0,\ y\in\mathbf{R}\}$，$\overline{B}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R} \text{ 且 } y\neq 0\}$.

18. (1) 9 种；　(2) 20 种.

19. (1) P_{20}^2；　(2) P_{10}^2.

20. (1)“某人必须站在中间”，则该人可先选定中间位置站着，其他 4 人可在剩下的 4 个位置上任意排列，因此此时的站法有 $P_4=4\times 3\times 2\times 1=24$(种)

(2)“某两人必须站在两边”，如此的站队可分两步安排：第一步先安排这两个人排在两边位置，其站法有 $P_2=2$(种)，第二步安排剩余 3 人的站法，有 $P_3=6$(种)；因此，按要求的

站法有 $P_2\times P_3=2\times6=12$(种)

(3)“某人不站在中间也不站在两边”，这种站法可分两步完成；第一步先安排该人，其站法为 P_2^1；第二步再安排剩余的 4 人，站法为 P_4 种，因此，按要求的站法有

$$P_2^1\times P_4=2\times4\times3\times2\times1=48(种)$$

(4)“某两人必须站在一起”，此时可把他们作为一组，另外 3 人作另 3 组，共 4 组进行全排列，有 P_4 种排法，又某两人在组内可互换位置，因此共有站法为

$$P_2\times P_4=2\times4\times3\times2\times1=48(种)$$

21. (1) $\binom{20}{2}$；　(2) $\binom{10}{2}$.

22. (1) 由于采用的是单循环赛，每两队要比赛一场，因此 20 个队共需比赛

$$\binom{20}{2}=\frac{20\times19}{2!}=190(场)$$

(2) 三个小组各自比赛的场次分别为 $\binom{7}{2}$，$\binom{6}{2}$，$\binom{7}{2}$；三个小组赛出的第一名进行冠军决赛的场次为 $\binom{3}{2}$；因此，共需比赛的场次为 $\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}+\binom{3}{2}=60$(场)

23. (1) 因为 $P_x^4+P_x^5=4P_x^3$

所以 $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+x(x-1)(x-2)(x-3)$

$=4x(x-1)(x-2)$，且 $x\geqslant5$

故有 $(x-3)(x-4)+(x-3)=4$.　即 $x^2-6x+5=0$，得 $x=5$，$x=1$(舍去)；

(2) 因为 $\binom{x}{3}+\binom{x}{2}=15\binom{x-1}{1}$，故由组合数的性质得

$\binom{x+1}{3}=15\binom{x-1}{1}$，且 $x\geqslant3$；于是有 $\frac{(x+1)x(x-1)}{3!}=15\times(x-1)$，

即 $x^2+x-90=0$，得出 $x=9$，$x=-10$(舍去).

24. (1) 从 2，3，5，7 四个数字中任取两个组成真分数时，要求分子小于分母，换句话说，小的数字排在上边，大的数字排在下边，每一对数字只能组成一个真分数，因此可组成的真分数的个数为 $\binom{4}{2}=\frac{4\times3}{2!}=6$(个)

(2) 组成分数时，分子、分母的大小没有限制，因此每一排列对应一个分数，那么组成的分数个数为 $P_4^2=4\times3=12$(个)

第二篇　一元函数微积分

第二章　函数、极限与连续

第一节　本章内容小结

一、本章的主要内容

函数的定义；函数的几种特性；复合函数、反函数与初等函数的概念；数列与函数极限的定义；极限的运算法则；无穷小与无穷大的概念；两个重要极限；无穷小的比较；函数在点与区间的连续性及间断性；闭区间上连续函数的性质．

二、几个常用的基本极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} c=c$ （c 为常数）；　(2) $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}=0$ （α 为正的常数）；

(5) $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}，当 n=m\\ 0，当 n>m\\ \infty，当 n<m\end{cases}$$

（其中 a_0、a_1、…、a_m 和 b_0、b_1、…、b_n 都是常数，且 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$）；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；　(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$；

(9) $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$；　(10) $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x=0$ （$|q|<1$）.

三、几个充要条件

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$ $\left[当\begin{matrix}x\to x_0\\(x\to\infty)\end{matrix}时\ \alpha\to0\right]$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$；

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

四、图 2-1 给出了当 $x\to\infty$ 和 $x\to x_0$ 时函数的极限与由此引申出来的有关概念之间的关系

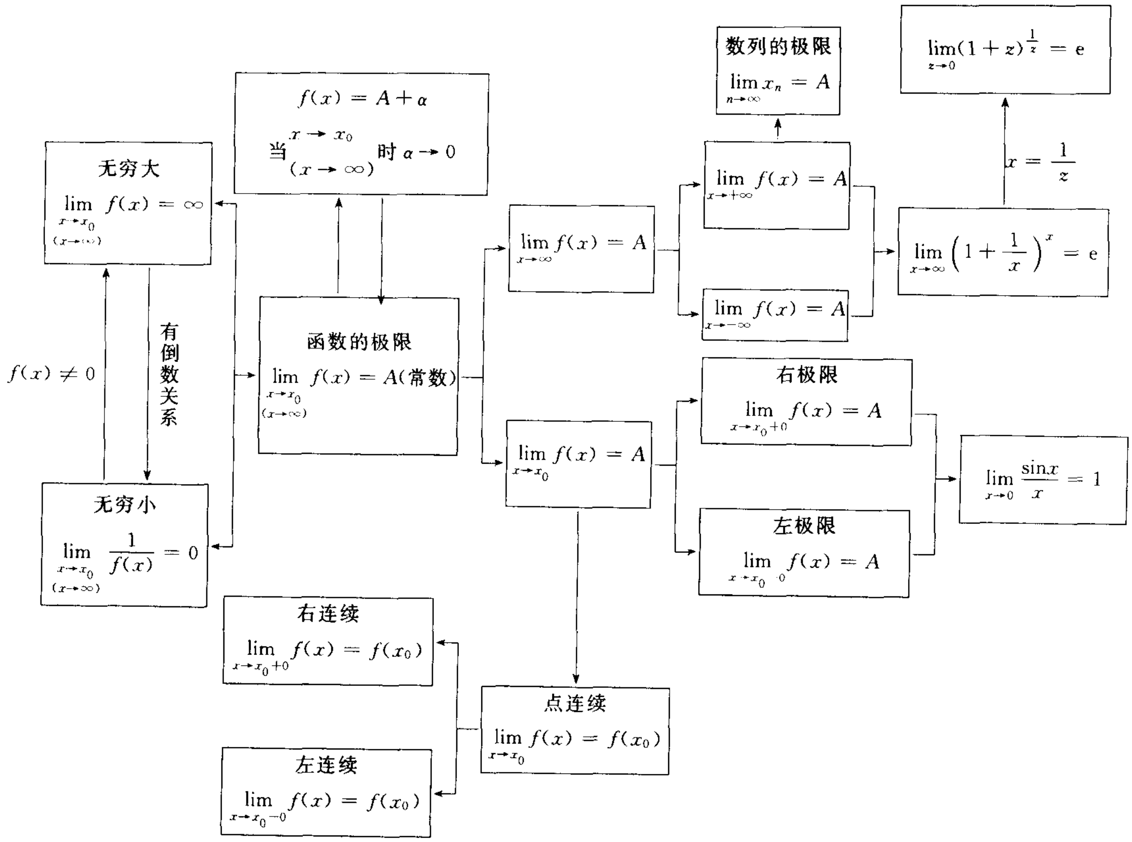

图 2-1　函数的极限及其引申概念之间的关系

五、表 2-1 列出了函数 $y=f(x)$ 的点连续与区间连续的概念

表 2-1

条　件	结　论
(1)如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$	那么 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续
(2)如果 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内每一点连续	那么 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续
(3)如果 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$	那么 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

六、本章关键词

函数　极限　连续

第二节　常见问题分类及解法

一、求函数的定义域

函数的定义域就是指使函数有意义的自变量 x 的取值范围．判断函数有意义的方法有以

下几种.

（1）分式的分母不等于零.

（2）偶次方根式中，被开方式大于等于零.

（3）含有对数的式子，真数式大于零.

（4）反正弦、反余弦符号内的式子绝对值小于等于 1.

（5）分段函数的定义域是各段函数定义域的并集.

（6）若已知 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a,b]$，求 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域，方法是解不等式组 $a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$.

例 1　求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}+\arccos(3x-18)$；　（2）$y=\dfrac{\ln(5x-2)}{x^2-7x+10}+\sqrt{10-x}$.

解　所求定义域应使函数式中各部分都有意义，即求解不等式组.

（1）若使函数有意义，必须

$\begin{cases}x^2-3x+2>0\\|3x-18|\leqslant1\end{cases}$　解得 $\begin{cases}x<1\text{ 或 }x>2\\\dfrac{17}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{19}{3}\end{cases}$　故所求函数定义域为 $\dfrac{17}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{19}{3}$；

（2）若使函数有意义，必须

$\begin{cases}5x-2>0\\x^2-7x+10\neq0\\10-x\geqslant0\end{cases}$　解得 $\begin{cases}x>\dfrac{2}{5}\\x\neq2,x\neq5\\x\leqslant10\end{cases}$　故所求函数的定义域为 $\dfrac{2}{5}<x\leqslant10$ 且 $x\neq2$，$x\neq5$.

例 2　已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[2,5]$，求函数 $y=f(4x-3)$ 的定义域.

解　由已知得　$2\leqslant4x-3\leqslant5$，即 $\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant2$，故所求函数的定义域为 $\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant2$.

二、判断两个函数是否相同

一个函数的确定取决于其定义域和对应关系的确定，因此判断两个函数是否相同必须判断其定义域是否相同，且要判断函数表达式是否统一即可.

例 3　判断下列各对函数是否相同？

（1）$f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)$；　（2）$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 与 $g(x)=1$.

解　利用定义域和对应规则来判断.

（1）因为 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$ 的定义域是一切实数，而 $g(x)=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)$ 的定义域也是一切实数，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的定义域；又因为 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)=g(x)$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的对应规则，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的函数；

（2）因为 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 的定义域是 $x\neq0$ 的一切实数，而 $g(x)=1$ 的定义域是一切实数，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数.

三、判断函数奇偶性

判断函数的奇偶性，主要的方法就是利用定义，其次是利用奇偶的性质，即奇（偶）函数

之和仍是奇(偶)函数；两个奇函数之积是偶函数；两个偶函数之积仍是偶函数；一奇一偶之积是奇函数.

例 4　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$　$(a>0$ 且 $a\neq 1)$；　(2) $f(x)=x^3(2x^2+\tan x^2)$.

解　(1) 用定义判断

因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$，所以 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$是奇函数；

(2) 用性质判断

因为 x^3 是奇函数，$2x^2+\tan x^2$ 是偶函数，所以 $f(x)=x^3(2x^2+\tan x^2)$是奇函数.

四、数列极限的求法

利用数列极限的四则运算法则、性质以及已知极限求极限.

1. 若数列通项的分子、分母都是关于 n 的多项式，则用分子分母中 n 的最高次项的幂函数同除分子分母，然后由四则运算法则求极限.

例 5　求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+5}{n^3+3n^2+5n-3}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-1}{5n^2+3n-4}$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+3n-2}}$.

解

(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}}=0$；　(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{5+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{2}{5}$；

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}}=1$.

2. 若通项中含有根式，一般采用先分子或分母有理化，再求极限的方法.

例 6　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1})$

解　对通项式有理化得

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

3. 若所求极限是无穷项之和，通常先利用等差或等比数列的前 n 项和的公式求和，再求极限.

例 7　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2^n}\right)$

解　先求由 $a_1=1$，$q=-\dfrac{1}{2}$所构成的等比数列的前 $n+1$ 项和，再求极限，