江苏省五年制小学試用課本

初等数学

CHUDENG SHUXUE

第 十 册

江 苏 人 民 出 版 社

五年制小学試用課本

初 等 数 学

第十册

江苏省教材編辑委員会編

*

江苏省书刊出版业营业許可証出 001 号

江 苏 人 民 出 版 社 出 版

南 京 湖 南 路 11 号

江苏省新华书店发行 上海华文印刷厂印刷

*

开本 787×1092 耗 1/32 印张 2 1/2 字数 51,200

1960 年 5 月第 1 版 1960 年 7 月第 2 版

1960 年 7 月南京第 2 次印刷

印数 2,001—54,000

統一书号：K7100 · 1230

定 价：(1) 一角四分

目　录

第十章　一次函数

六、一次不等式

总复习

第十章　一次函数

三、直　　綫

§1.　綫段的定比分割

1.　有向直綫和有向綫段

某人沿着大路走了三公里，以后再向前走三公里，最后走到离原地六公里远的地方．可是如果后来是往回走的話，那就回到了原地．为了表示这一个事实，是走去还是回来，只用綫段就不够了，还必須对綫段规定一个方向，同样也有必要对直綫规定方向．

一条直綫有两个方向．我們任意规定一个为正方向，那么，另一个相反的方向就是負方向．

规定了方向的直綫称为有向直綫或軸．为了方便起见，一条有向直綫的正方向用一箭头来表示．（如图 1）

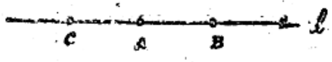

图 1

两个定点 A 和 B 决定一綫段 AB．如果把 A 作为綫段的起点，B 作为它的終点，那么从点 A 到点 B 的方向称为綫段 AB 的方向；一个规定了方向的綫段称为有向綫段，通常用 $\overline{AB}$ 来表示．有向綫段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 不同，因为它們的长度虽然相同，但方向相反．

如果把一切有向綫段放置在一条有向直綫上，那么这些綫段的方向可以用"+"号或"−"号来表示，当綫段的方向与直綫的正方向一致的時候用"+"号，当綫段的方向和直綫的正方向相反的时候用"−"号.

一个有向綫段的长度，同时带有确定的符号(+或−)就称为这个綫段的值．通常用"AB"表示有向綫段 $\overline{AB}$ 的值，如图2中有向綫段 $\overline{AB}$ 的值是正的，$\overline{AC}$ 的值是負的.

在綫段AB上不同于A，B的任意一点P，把AB分成两个綫段AP和PB.所謂点P分綫段AB的比就是綫段AP和PB的值的比，通常記为：

$$\frac{AP}{PB}=\lambda.$$

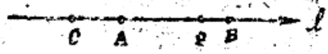

图2

当P在A，B之間，即P为内分点时，两綫段AP、PB有相同的方向，因此λ的值为正．当P在AB綫段之外，即P为外分点时，两綫段AP、PB有相反的方向，因此λ的值为負.

2. 綫段的定比分割

設平面上A、B两点的坐标分别为$A(x_1, y_1)$和$B(x_2, y_2)$，C为AB的联結綫段上的一点．已知C把綫段AB分成两部分使得

$$\frac{AC}{CB}=\lambda \qquad (\lambda\text{为定值})$$

現在要求C点的坐标(x, y).

过A、B、C分别作OX軸的垂綫AA_1、BB_1、CC_1(图3)．因为"两条直綫被三条平行綫所截，截得的綫段成比例"，所以

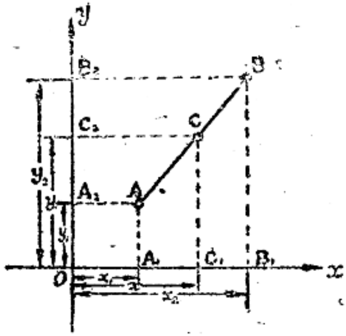

图 3

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB}.$$

但是 $$\frac{AC}{CB}=\lambda,$$

因此 $$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\lambda.$$

从图中我們可以看出

$$A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1,$$

$$C_1B_1=OB_1-OC_1=x_2-x,$$

代入上面式中就得到

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$$

从此便得到

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

如果过 A、B、C 分別作 AA_2、BB_2、CC_2 垂直于 OY 軸，則有

$$\frac{A_2C_2}{C_2B_2}=\frac{AC}{CB}=\lambda.$$

由图中可看出

$$A_2C_2=OC_2-OA_2=y-y_1$$

$$C_2B_2=OB_2-OC_2=y_2-y$$

代入上式得

$$\frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda.$$

从此得到：

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此C点的坐标可用下面的公式来表示：

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \tag{1}$$

如果C平分线段AB，也就是$AC=CB$，因此

$$\lambda=\frac{AC}{CB}=1.$$

代入(1)便可得到：

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

也就是說，綫段中点的坐标等于两端点对应坐标和的一半.

例1 已知两点$A(1,3)$、$B(4,6)$，点P分綫段AB使

$AB=3PB$，求分点P的坐标.

解：$AB=AP+PB=3PB$.

所以$AP=2PB$，　因此 $\lambda=\frac{AP}{PB}=2$.

已知：　$x_1=1$，$y_1=3$；

$x_2=4$，$y_2=6$.

代入公式有

$$x=\frac{1+2\cdot 4}{1+2}=3,$$

$$y=\frac{3+2\cdot 6}{1+2}=5.$$

所以P点的坐标为$(3,5)$.

例2　設綫段的一个端点为$A(2,8)$，它的中点为$(1,3)$求另一端点B的坐标.

解：把B点的坐标記为(x_2, y_2)，应用公式(2)有：

$$1=\frac{2+x_2}{2},$$

$$3=\frac{8+y_2}{2}.$$

$2+x_2=2$，　$8+y_2=6$.

$x_2=0$，　$y_2=-2$.

所以另一端点B的坐标为$(0, -2)$.

§2.　两点間的距离公式

在平面上給定两点$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，求以这两点的

坐标来表示AB間的距离。

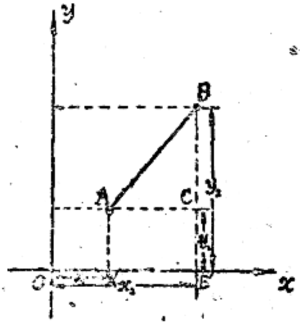

图 4

图 4，过A、B向OX軸作垂綫AA'和BB'，作AC平行OX軸交BB'于C．于是得到直角三角形ACB．根据勾股定理可知：

$$AB^2=AC^2+CB^2,$$

$$\therefore\quad AB=\sqrt{AC^2+CB^2}. \qquad (1)$$

由图上可以看出

$$AC=A'B'=x_2-x_1, \qquad (2)$$

$$CB=B'B-B'C=y_2-y_1. \qquad (3)$$

将(2)；(3)两式代入(1)得到：

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

如果用d表示AB間的距离，就有

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (4)$$

在特殊情况下点$M(x,y)$到原点$O(o,o)$的距离公式可表示为：

$$d=\sqrt{x^2+y^2}.$$

例 求点$A(4,1)$和点$B(2,1)$之間的距离。

解： $x_1=4$，$y_1=1$；$x_2=2$，$y_2=1$。

根据公式(4)

$$d=\sqrt{(2-4)^2+(1-1)^2}=\sqrt{4}=2.$$

习 題 一

1. 求下列各題中两点間的距离：

   1) $(3,3)$和$(7,6)$；　　2) $(0,5)$和$(6,-3)$；

   3) $(6,2)$和$(-2,-4)$；　　4) $\left(-\frac{1}{2},5\right)$和$\left(-\frac{1}{2},-3\right)$；

   5) $(0,0)$和$(12,5)$。

2. 已知两点$A(-3,4)$、$B(9,-1)$求AB綫段的长度和点A到坐标原点的距离。

3. 已知点$P(5,9)$是某圆的圆周上的一点，这圆的中心是$(1,6)$，求它的半径。

4. 三角形三頂点是$O(0,0)$、$A(5,12)$、$B(4,0)$，求出它的周长。

5. 試証頂点为$A(9,21)$、$B(-13,17)$、$C(2,-2)$的三角形是等腰三角形。

6. 綫段的端点为$A(2,5)$、$B(4,8)$，C点将此綫段分成两段的比为$2:3$，求C点的坐标。

7. C点把$A(-2,1)$、$B(3,2)$間的綫段分成$-3:2$，求C的坐标。

8. 联結点$A(5,4)$和点$B(6,-9)$，并延长到C，使$BC=\frac{1}{2}AB$，求点C。

9. 已知点$C(-2,1)$分綫段AB使$AC:CB=2$。如果綫段起点A的坐标为$(10,5)$，求終点B的坐标。

10. $A(2,y)$、$B(x,6)$間的綫段被$C(3,2)$平分，求x,y。

11. 已知三角形ABC三个頂点的坐标：$A(4,5)$、$B\left(+\frac{9}{2},10\right)$、

$C(-3,\ -9)$，又知P是AC边的中点求这三角形的中綫BP的长。

12. 已知梯形$ABCD$四个頂点坐标：$A(-4,3)$、$B(2,3)$、$C(4,-5)$、$D(-6,-5)$，証明联結两腰AD和BC的中点的綫段等于上底AB与下底CD的和的一半。

§3. 直綫的斜截式方程

我們现在来研究这样一个問題：

已經知道某个函数的图象是一条直綫，那末，这条直綫上的点的坐标应該适合怎样的关系式？

設l为已知直綫，我們分两种情况来討論：

1）假定l不平行于OY軸，它的傾斜角为φ，并交y軸于点$B(o,b)$，要求这条直綫上的点的坐标应該适合的关系式。

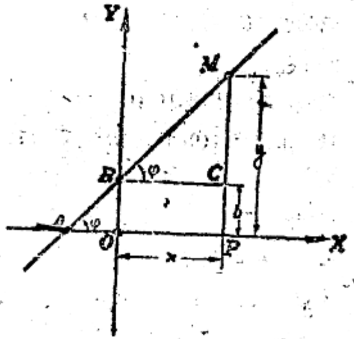

图 5

在直綫l上任意取一点$M(x,y)$，过点M作MP垂直于OX軸。

从图5，可以看出

$$OP=x,$$

$$PM=y.$$

再过点B作BC平行于OX軸，那末

$$\angle CBM=\angle PAM=\varphi.$$

在直角三角形BCM中

$$CM=BC\cdot\text{tg}\varphi. \qquad (1)$$

由于 $CM=PM-PC=PM-OB=y-b$,

$BC=OP=x$.

将BC与CM的値代入(1)，則得关系式

$$y-b=x\cdot\text{tg}\varphi,$$

卽

$$y=\text{tg}\varphi\cdot x+b.$$

把$\text{tg}\varphi$記为k,于是得到:

$$y=kx+b. \qquad (2)$$

这就表示了所求直綫上点的坐标x,y間的关系，它們是一次函数的关系.我們也称这个关系式是所求直綫的方程.

这里的b就是直綫在OY軸上的截距，$k=\text{tg}\varphi$是直綫的斜率.我們就把这种方程称为直綫的斜截式方程.

若直綫通过原点，則$x=0,y=0$；代入(2)得$b=0$,那末直綫方程变为如下形式

$$y=kx. \qquad (3)$$

如果直綫l平行于OX軸，那末直綫l对OX軸的傾斜角φ等于零.

由于$\text{tg}0°=0$，則方程变为:

$$y=b.$$

2) 若直綫l平行于OY軸，l和OX軸所成的角φ等于$90°$，由于$\text{tg}90°$不存在，因此方程(2)没有意义，但在直綫l平行于OY軸时必与OX軸相交，令其交点的横坐标为a,那末,这直綫的方程为:

$$x=a.$$

事实上，在这直綫上的点的横坐标都等于 a；反过来，不在这直綫上的点，它的横坐标不等于 a.

从以上的結果，我們可以把平面上的所有直綫分成两类：

(i) 与 OY 軸相交的直綫，其方程可以写成 $y=kx+b$.

(ii) 与 OY 軸平行的直綫，其方程可以写成 $x=a$.

由于这两种方程都是一次方程，因此我們得到一个結論：

平面上任意一条直綫的方程必为 x 和 y 的一次方程.

§4. 直綫的一般式方程

从上一节的結論，我們立刻会想到一个問題，就是任何 x 和 y 的一次方程是否一定表示一条直綫？为了解决这个問題，我們分两种情况来討論：

任何含 x、y 的一次方程可写成形式：

$$Ax+By+C=0, \tag{1}$$

其中 A、B、C 为常数，且 A 和 B 不能同时为零.

1) 假定 $B\neq 0$，　　(1)式可以化为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}. \tag{2}$$

把方程(2)与直綫 $y=kx+b$ 比較，可以看出方程(2)为一直綫的斜截式方程，它的斜率 $k=-\frac{A}{B}$，截距 $b=-\frac{C}{B}$.

2) 假定 $B=0$，那末方程(1)变为

$$Ax+C=0.$$

因为　$A\neq 0$，　　　所以

$$x=-\frac{C}{A}=\text{常数}. \qquad (3)$$

因此方程(3)为平行于OY轴的直綫.

从以上結果，我們可以得到：

含x、y的一次方程$Ax+By+C=0$的图象是一条直綫，我們把方程$Ax+By+C=0$称为直綫的一般式方程.

§5. 直綫的点斜式方程

已知一直綫通过点$M(x_0, y_0)$，并且它的斜率为k，求这条直綫的方程.

假設所求直綫的方程为：

$$y=kx+b. \qquad (1)$$

因为这条直綫通过点$M(x_0, y_0)$，所以点M的坐标适合方程(1)，即

$$y_0=kx_0+b. \qquad (2)$$

由(2)式可以确定出b的值，

$$b=y_0-kx_0.$$

将b的值代入(1)得：

$$y=kx+y_0-kx_0.$$

即

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (3)$$

方程(3)称为直綫的点斜式方程.

例 一条直綫过点$M(2, 3)$且与OX軸成$45°$角，(如图6)，求它的方程.

解：这里，$k=\operatorname{tg}45°=1$，而且 $x_0=2$，$y_0=3$. 因此所求

的方程为

$$y-3=x-2,$$

或 $$y=x+1.$$

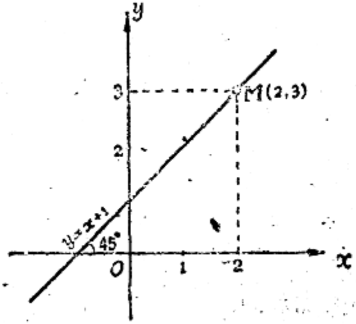

图6

§6. 直綫的两点式方程

已知两个定点$M_1(x_1,y_1)$和$M_2(x_2,y_2)$，求通过这两点的直綫方程.

設通过点$M_1(x_1,y_1)$的直綫方程为

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (1)$$

因为这直綫还通过点$M_2(x_2,y_2)$，因此点M_2的坐标适合(1)式，即

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1). \qquad (2)$$

我們可从(2)式求出k的值：

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad (3)$$

代入(1)便得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

或
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (4)$$

这就是所求的通过两定点 $M_1(x_1,y_1)$和$M_2(x_2,y_2)$的直綫方程.

方程(4)称为直綫的两点式方程.

例1 求通过两点(1,−1)和(4,1)的直綫方程，并写出它的斜率.

解：这里 $x_1=1,\ y_1=-1,\ x_2=4,\ y_2=1,$

代入公式，得

$$y-(-1)=\frac{1-(-1)}{4-1}(x-1),$$

化简后得：$y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}.$

它的斜率：$k=\frac{2}{3}.$

例2 証明三点(1,−1)、(5,2)、(−3,−4)在同一直綫上.

解：过两点(1,−1)和(5,2)的直綫方程为：

$$\frac{x-1}{5-1}=\frac{y-(-1)}{2-(-1)},$$

即
$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{3}.$$

现在把第三点的坐标(−3,−4)代入上式得−1=−1. 这就說明第三点(−3,−4)在前两点(1,−1)和(5,2)所决定的直綫上，所以三点在同一直綫上.