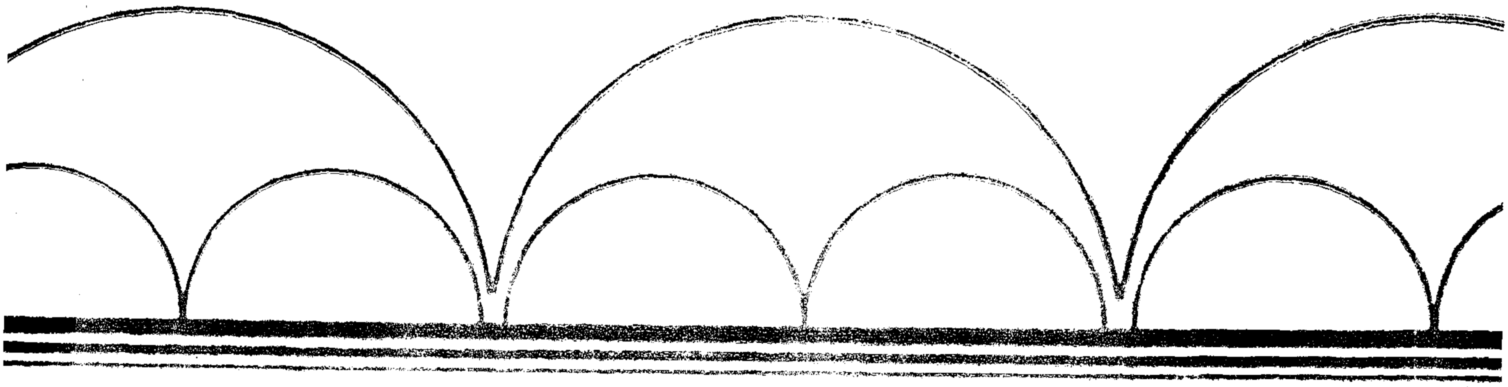
YENGYONG BOKE LEXUE

应用薄壳力学

原理、方法、示例

杨德品 编著



湖南大学出版社

应用薄壳力学

——原理、方法、示例

杨德品　编著

湖南大学出版社

内 容 简 介

本书共分六章，系统地阐述了弹性薄壳力学的基本概念、原理和方法。书中运用曲面矢量分析，从二维理论出发，建立了薄壳一般理论的基本关系和方程，从而诱导出柱壳、旋转壳、扁壳等常用薄壳的无矩理论及有矩理论的基本关系和方程。本书较为详细地讨论了上述常用壳体的经典解法，精练地介绍了差分法、变分法、有限元法以及加权残值法等近似法求解薄壳问题的基本原理和方法；最后，讨论了薄壳的振动问题和稳定问题的实用计算。全书力求深入浅出，概念清晰，推导简洁、层次分明，说理透彻，通俗易懂。本书既可供土建结构工程师及有关专业工程技术人员自学或实用参考，又可作为工程力学、结构工程等有关专业的教师，高年级本科生、研究生教学参考用书。

应 用 薄 壳 力 学

——原理、方法、示例

杨德品 编著

责任编辑 鲁期仪 朱 华

湖南大学出版社出版发行

(长沙岳麓山)

湖南省新华书店经销 江西工业大学印刷厂印装

787×1092 16开 16.8745印张 429千字

1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷

印数：3000册

ISBN 7-314-00316-5/O·21

定价： 5.95元

前　言

众所周知，薄壳由于其受力性能好，而弹性薄壳线性理论又比较成熟，因而，在工程中得到广泛应用。有关壳体理论方面的中外书籍或专著已出版不少，其中不乏权威性或优秀著作。但在这类书籍中，有的偏重于理论，有的则着重于应用。前者使一般工程技术人员或初学者感到理论复杂深奥，难以掌握；后者又使他们感到“实用可鉴”而“喻理难全”。作者积长期教学、科研及工程实践的经验，试图在这两者之间搭一“便桥”，以利上述读者得以到达“明理应手”的“彼岸”。这是本书编写的指导思想，也是一种尝试。惟恐难以奏效。若能抛砖引玉，亦为快事。

为此，本书理论阐述和推导，既注意系统性又力求避繁就简，易于理解；应用举例，简短明了，避免冗长推算，注重物理解释，以能阐明基本原理之运用为目的，期收举一反三、触类旁通之效。书中在介绍了必需的曲面理论基本知识（第一章）以后，从简单的二维理论出发系统地阐述和建立了薄壳一般理论的基本关系和方程（第二章），并着重讨论了工程中常用的薄壳无矩理论及其经典解法（第三章）；根据第二章所建立的一般薄壳的基本关系和方程，诱导出各种特定几何形状的薄壳，诸如常用的柱形薄壳、旋转薄壳、扁壳的基本关系和方程，并讨论了它们的经典解法（第四章）。鉴于经典法能解的薄壳问题甚少，工程计算大都只能借助近似解法或数值解法，因此，第五章介绍了用差分法、变分法、有限元法、加权残值法求解薄壳问题的基本原理和方法。最后，还简要地讨论了薄壳的振动问题和稳定问题。凡属必需讨论的基本概念和问题，力求讲清说透，由于篇幅所限，不能深入的问题，则指出参考文献。在文字与公式表达中，力求层次分明，条理清楚，深入浅出，通俗易懂，使具备了必需的预备知识的读者，便于自学和掌握。

本书在编写过程中，得到熊祝华教授的关怀和指导，并对初稿进行了认真的审阅，提出了许多宝贵的修改意见，特此表示由衷的感谢。

学海无涯知有涯。作者深感水平有限，书中如有不妥或错误之处，敬请读者指正。

作　者

1988年6月

目　录

第一章　曲面理论基础……（1）
§1—1　曲面的位矢描述……（1）
§1—2　曲面的第一基本形式。微元弧长……（2）
§1—3　曲面的第二基本形式。曲率……（4）
§1—4　正交曲线坐标系下的曲面几何性质……（8）
§1—5　流动坐标的单位矢量和一般矢量的导数……（13）
§1—6　科达齐——高斯条件……（18）
§1—7　高斯曲率……（20）
第二章　薄壳的一般理论……（22）
§2—1　概述……（22）
§2—2　薄壳的几何方程……（23）
§2—3　薄壳的相容方程……（33）
§2—4　薄壳的平衡方程……（36）
§2—5　薄壳的物理方程……（41）
§2—6　薄壳的边界条件……（43）
§2—7　薄壳问题求解的基本方法……（47）
第三章　薄壳的无矩理论及经典解法……（48）
§3—1　基本概念……（48）
§3—2　无矩理论的基本方程和边界条件……（49）
§3—3　柱壳无矩理论的基本方程……（53）
§3—4　柱壳无矩理论的经典解法……（54）
§3—5　旋转壳无矩理论的基本方程……（63）
§3—6　旋转壳无矩理论的经典解法（轴对称问题）……（66）
§3—7　旋转壳无矩理论的经典解法（非轴对称问题）……（74）
§3—8　扁壳无矩理论的基本方程……（82）
§3—9　扁壳无矩理论的经典解法……（86）
§3—10　扁壳的合理中面……（92）
第四章　薄壳有矩理论的经典解法……（95）
§4—1　概述……（95）
§4—2　柱壳的有矩理论……（95）
§4—3　开敞圆柱壳的单三角级数解法……（99）
§4—4　圆柱壳在法向荷载下的弯曲问题……（102）
§4—5　圆柱壳的轴对称弯曲问题……（106）
§4—6　开敞圆柱壳的简化计算法……（117）

§ 4—7 旋转壳轴对称弯曲的基本方程 ……（124）
§ 4—8 球壳的轴对称弯曲问题 ……（130）
§ 4—9 圆锥壳的轴对称弯曲问题 ……（138）
§ 4—10 扁壳的有矩理论 ……（146）
§ 4—11 混合法解扁壳弯曲问题 ……（150）
§ 4—12 简支等曲率扁壳的弯曲问题 ……（157）
第五章 薄壳的数值解法和近似解法 ……（166）
§ 5—1 概述 ……（166）
§ 5—2 差分公式的推导 ……（166）
§ 5—3 扁壳问题的差分解法 ……（168）
§ 5—4 力学问题的变分方法 ……（176）
§ 5—5 扁壳问题的变分解法 ……（180）
§ 5—6 有限元法的基本原理 ……（185）
§ 5—7 平板壳单元分析 ……（192）
§ 5—8 薄壳分析的有限元法 ……（204）
§ 5—9 加权残值法的基本原理 ……（213）
§ 5—10 薄壳问题的加权残值法 ……（223）
第六章 薄壳的振动问题和稳定问题 ……（230）
§ 6—1 薄壳的振动问题 ……（230）
§ 6—2 扁壳自由振动微分方程 ……（230）
§ 6—3 扁壳的自振频率计算 ……（232）
§ 6—4 扁壳的强迫振动 ……（237）
§ 6—5 薄壳动力响应问题的振型分析法 ……（241）
§ 6—6 薄壳的稳定问题 ……（244）
§ 6—7 薄壳稳定问题的近似微分方程 ……（244）
§ 6—8 临界荷载的基本解法 ……（246）
§ 6—9 轴向受压圆柱壳的临界荷载 ……（248）
§ 6—10 法向均匀受压圆柱壳的临界荷载 ……（255）
§ 6—11 受扭圆柱壳的临界荷载 ……（258）
参考文献 ……（260）

第一章　曲面理论基础

壳体是工程中常见的一种构件。当壳体的厚度甚小时，对壳体的分析，最终归结为对其中曲面（简称中面）的分析，而壳体的中面是一个空间曲面。为此，本章将简要地介绍有关曲面理论的基本知识。

§1—1　曲面的位矢描述

由两个闭合空间曲面所围成的物体（例如空心球体）或由不闭合的两个空间曲面及与其（中面）垂直的直纹曲面所围成的物体(例如球形顶盖)统称为壳体，此两个曲面称为壳面。对于后一种壳体所具有相交于壳面的直纹曲面称为壳体的边界。两个曲面之间的垂直距离称为壳体的厚度，平分厚度的曲面称为壳体的中面。当壳体厚度甚小时，壳体的几何性质可用曲面（中面）的几何性质来表征。一个空间曲面是三维空间内的一个子空间，其上的任一点可用两个参数（x_1，x_2）来描述。于是，设 $\mathbf{r}$ 为由参考点（原点 0 ）到曲面上任一点的位矢（图 1 — 1 (a)），则该曲面可用下列参数式表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2) \qquad (1-1)$$

显然，x_1、x_2的定义域是一个闭合域Ω（它可以是一个平面闭合域，如图 1 — 1 (c)所示）。

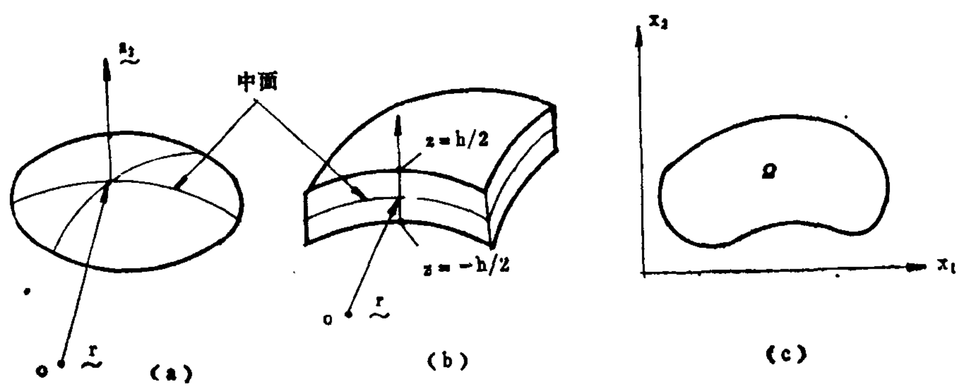


图1－1*

设$\mathbf{a}_3(x_1,\ x_2)$为对应于曲面上点$(x_1,\ x_2)$处的单位法线矢量，并命

$$h = h(x_1,\ x_2) \qquad (h>0) \qquad (1-2)$$

为壳体在点（x_1，x_2）处的厚度(图 1 — 1 (b))，它是一个给定的函数。于是壳体可定义为下述空间封闭域S，其中各点用位矢给出为

$$\mathbf{r}(x_1,\ x_2) + z\,\mathbf{a}_3(x_1,\ x_2) \qquad (1-3)$$

其中

$$(x_1,\ x_2)\in\Omega,\quad |z| \leqslant \frac{1}{2}h(x_1,\ x_2)$$

* 图例中，在字母下有"～"者，表示矢量或张量，与文中粗体字母等同。

而曲面（1—1）就是壳体的中面，式（1－3）决定了壳体在空间的位置。为了保证空间域S的各点和（x_1，x_2，z）之间有一一对应关系，假定

$$\frac{1}{2}h < |R_{min}| \neq 0$$

其中R_{min}为中面的最小曲率半径。

§ 1—2 曲面的第一基本形式。微元弧长

一、曲线坐标和坐标曲线

若使$x_2 = c_2 = const.$，则由式（1—1）得到

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, c_2) \qquad (1-4a)$$

这是一个单变量x_1的矢量函数，它表示曲面上的一条曲线方程。如果给出c_2的一系列常数值，则得到曲面上的一族曲线，叫做x_1曲线（图1—2）。

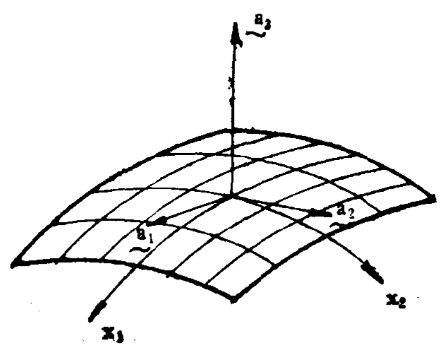


图1－2

同理，令$x_1 = c_1 = const.$，有

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(c_1, x_2) \qquad (1-4a)$$

它代表曲面上的另一条曲线方程，给出c_1的一系列常数值，则得到曲面上的另一族曲线，叫做x_2曲线（图1—2）。

由于假定（x_1，x_2）值和曲面上的点是一一对应的，因此，这两族曲线中各只有一条曲线通过曲面上的一点。x_1，x_2叫做曲面的曲线坐标，x_1曲线和x_2曲线叫做坐标曲线。

二、曲面的基矢

曲面的基矢定义为

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1}, \qquad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2}$$

或简写为

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2) \qquad (1-5)$$

基矢$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{a}_2$分别平行于经过曲面上坐标点(x_1，x_2)的沿x_1曲线和x_2曲线的切线(图1—2)。

由式（1—5）有

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2) \qquad (1-6)$$

这里记号

$$(\quad)_{,\alpha}=\partial(\quad)/\partial x_\alpha$$

对于固定卡氏直角坐标系$oxyz$（图1—3），曲面上任一点的坐标为

$x=x(x_1,\ x_2)$，$y=y(x_1,\ x_2)$，$z=z(x_1,\ x_2)$

位矢 r 可表为

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z \qquad (1—7)$$

其中i、j、k分别为沿卡氏直角坐标x、y、z的单位矢量。

于是基矢$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$又可表示为

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a}_1&=\frac{\partial x}{\partial x_1}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial x_1}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial x_1}\mathbf{k}\\ \mathbf{a}_2&=\frac{\partial x}{\partial x_2}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\mathbf{k}\end{aligned}\right\}\quad(1—8)$$

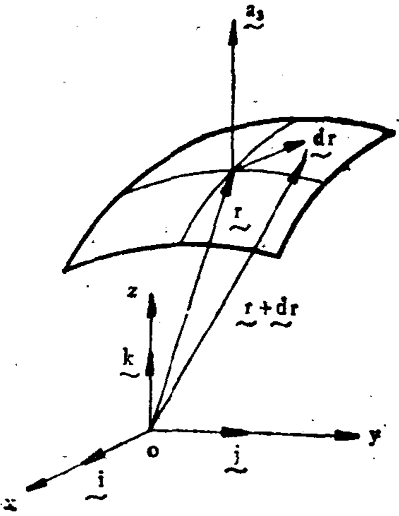


图1—3

三、第一基本形式。微元弧长

在曲面上联结坐标x_α和$x_\alpha+dx_\alpha$两点的无限小矢量（图1—3）为

$$d\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_2}dx_2=\mathbf{a}_\alpha dx_\alpha \qquad (1—9)$$

这一矢量的长度由下式决定：

$$(ds)^2=d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=\mathbf{a}_\alpha\cdot\mathbf{a}_\beta\,dx_\alpha dx_\beta \qquad (1—10)$$

引入基矢的标积记号为

$$a_{\alpha\beta}=\mathbf{a}_\alpha\cdot\mathbf{a}_\beta=a_{\beta\alpha} \qquad (1—11)$$

则式（1—10）可写成

$$(ds)^2=a_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta \qquad (1—12)$$

该式右边的二次式可以决定曲面的微元弧长，叫做曲面的第一基本形式，其系数$a_{\alpha\beta}$称为度量张量，它是二维问题的二阶对称张量，即

$$a_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

且有$a_{12}=a_{21}$

式（1—12）的展开式为

$$(ds)^2=a_{11}(dx_1)^2+2a_{12}(dx_1)(dx_2)+a_{22}(dx_2)^2 \qquad (1—12a)$$

这是本式的惯用写法。对于固定坐标系，按照式（1—8），$a_{\alpha\beta}$可写成

$$\left.\begin{aligned}a_{11}&=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_1}=\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2\\ a_{22}&=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_2}=\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2\end{aligned}\right\}\quad(1—13)$$

$$a_{12}=a_{21}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2}$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)$$

现在考察$a_{\alpha\beta}$的几何意义。设沾坐标曲线x_1的微元弧长为ds_1，则有$x_2=c_2=const.$，$dx_2=0$，位矢为$\mathbf{r}=\mathbf{r}(x_1, c_2)$，于是

$$a_{11}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1}=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1,\quad a_{22}(dx_2)^2=0,\quad a_{12}dx_1dx_2=0$$

由式（1—12a）得

$$(ds_1)^2=a_{11}(dx_1)^2$$

同理有

$$(ds_2)^2=a_{22}(dx_2)^2$$

这样，我们得到

$$ds_1=\sqrt{a_{11}}\,dx_1,\quad ds_2=\sqrt{a_{22}}\,dx_2 \tag{1—14}$$

其中ds_2为沿坐标曲线x_2的微元弧长。可见，沿坐标曲线x_1和x_2的微元弧长ds_1和ds_2分别等于坐标增量dx_1和dx_2各自乘以“尺度”$\sqrt{a_{11}}=|\mathbf{a}_1|$与$\sqrt{a_{22}}=|\mathbf{a}_2|$。这就是$a_{\alpha\beta}$叫做度量张量的来由。

四、基矢$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{a}_2$构成的面积

基矢$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{a}_2$的夹角θ，可由下式

$$a_{12}=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|\cos\theta=\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}\cos\theta$$

求得为

$$\cos\theta=\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \tag{1—15}$$

$\mathbf{a}_1$与$\mathbf{a}_2$两个基矢构成的平行四边形面积为

$$|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2|=\sqrt{a_{11}a_{22}}\sin\theta=\sqrt{a_{11}a_{22}}\left(\sqrt{1-\frac{a_{12}^2}{a_{11}a_{22}}}\right)=\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}$$

命$\sqrt{a}$代表$\mathbf{a}_1$与$\mathbf{a}_2$构成的平行四边形面积，则

$$\sqrt{a}=\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} \tag{1—16}$$

§ 1—3　曲面的第二基本形式。曲率

一、曲面的单位法线矢量

曲面上任一点P的基矢a_1和a_2构成的平面称为该点的切平面，其单位法线矢量为n（图1—4）。曲面上任一点的单位法线矢量a_3就是过该点切平面的单位法线矢量，即

$$a_3 \equiv n, \quad 且 |a_3| = |n| = 1$$

按照a_1，a_2，a_3构成右手坐标系，则有

$$a_3 = a_1 \times a_2 / |a_1 \times a_2|$$

故

$$a_3 \equiv n = \frac{1}{\sqrt{a}}(a_1 \times a_2) \qquad (1-17)$$

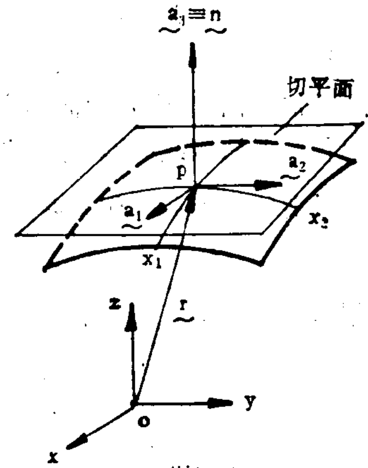


图1—4

由于任一点P的基矢a_1和a_2位于该点的切平面上，故有

$$a_3 \cdot a_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, 2) \qquad (1-18)$$

将式（1—18）对x_α求导得

$$a_{3,\alpha} \cdot a_\beta + a_3 \cdot a_{\beta,\alpha} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2) \qquad (1-19)$$

对于固定坐标系，有

$$a_3 \equiv n = i\, n_x + j n_y + k n_z \qquad (1-20)$$

其中n_x，n_y，n_z为单位法线矢量n在固定坐标系的分量。

应用式（1—17）和（1—8）得

$$\begin{aligned} a_3 \equiv n = & \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} - \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) i + \\ & + \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_2} - \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x}{\partial x_1}\right) j + \\ & + \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2} - \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) k \end{aligned} \qquad (1-21)$$

将式（1—20）和（1—21）对比，得到

$$\left.\begin{aligned} n_x &= \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} - \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) \\ n_y &= \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_2} - \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x}{\partial x_1}\right) \\ n_z &= \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2} - \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (1-22)$$

二、曲面上曲线的单位切线矢量

通过曲面上任一点P的法线可作无数个平面，称为曲面的法平面，它们与曲面相交的曲线，称为法截线。现研究任一条法截线L上P点处的单位切线矢量t（图1-5）。

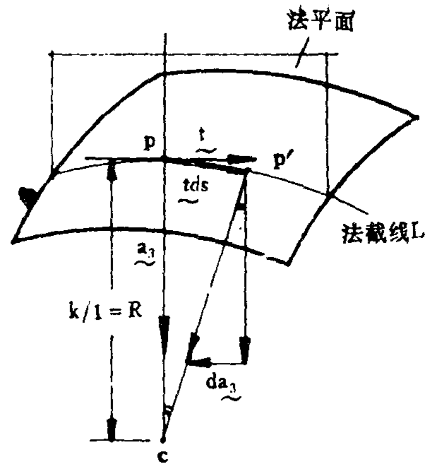


图1－5

设曲线L用弧长s作为参数坐标，即

$$x_1 = x_1(s) \qquad x_2 = x_2(s)$$

应用式（1—7），则有

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dx_\beta}\frac{dx_\beta}{ds}$$

$$= \mathbf{a}_\beta \frac{dx_\beta}{ds} \qquad (1—23)$$

而

$$\frac{d\mathbf{a}_3}{ds} = \frac{d\mathbf{a}_3}{dx_\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} = \mathbf{a}_{3,\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} \qquad (1—24)$$

由图1—5所示几何关系可知

$$\frac{\mathbf{t}\,ds}{\mathbf{a}_3 R} = -\frac{d\mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_3} \qquad (1—25)$$

或

$$\mathbf{t} = -R\frac{d\mathbf{a}_3}{ds} \qquad (1—26)$$

其中R为法截线L在P点处的曲率半径。

三、第二基本形式。曲率

现在讨论曲面上任一点P的法曲率，它的绝对值等于法截线L在该点的曲率的绝对值。若法截线的曲率半径为R(图1—5)，则法曲率$k=\pm 1/R$，$\mathbf{a}_3$与$\overrightarrow{PC}$同向时为正，反之为负。

将式（1—26）两边点乘t，得

$$\frac{1}{R} = -\frac{d\mathbf{a}_3}{ds}\cdot\mathbf{t} \qquad (1—27)$$

再将式（1—23）和（1—24）代入上式，得到

$$\frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{a}_{3,\alpha}\cdot\mathbf{a}_\beta dx_\alpha dx_\beta}{(ds)^2} \qquad (1—28)$$

对上式右边的分子应用关系式（1—19），并引用记号：

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_{3,\alpha}\cdot\mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = b_{\beta\alpha} \qquad (1—29)$$

按照式（1—29）和（1—12），并取$k=+1/R$，则式（1—28）可写成

$$k = \frac{1}{R} = \frac{b_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta}{a_{\xi\eta}dx_\xi dx_\eta} \quad \begin{pmatrix}\alpha,\ \beta=1,2\\ \xi,\ \eta=1,2\end{pmatrix} \qquad (1—30)$$

这就是曲面的法曲率表达式。式中右边分子所表示的二次式 $b_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta$ 叫做曲面的第二基本形式，系数 $b_{\alpha\beta}$ 为曲率张量，它也是二维问题的二阶对称张量，即

$$b_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

且有 $b_{12} = b_{21}$。

由式（1—30）可见，曲面的法曲率由第二基本形式和第一基本形式的比值决定。第二基本形式的惯用写法为

$$b_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta = b_{11}(dx_1)^2 + 2b_{12}dx_1dx_2 + b_{22}(dx_2)^2 \qquad (1-31)$$

按照式（1—29），其中

$$\left.\begin{aligned} b_{11} &= \mathbf{a}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial x_1} = \mathbf{a}_3 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_1^2} \\ b_{22} &= \mathbf{a}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial x_2} = \mathbf{a}_3 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_2^2} \\ b_{12} = b_{21} &= a_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial x_2} = a_3 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned}\right\} \qquad (1-32)$$

对于固定坐标系，由式（1—7）导得

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\mathbf{k}$$

应用式（1—21）可得

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} - \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_2} - \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2} - \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\right] \qquad (1-33a)$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} - \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_2} - \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2} - \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\right] \qquad (1-33b)$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} - \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_2} - \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2} - \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\right] \qquad (1-33c)$$

现考察b_{11}，b_{22}，b_{12}的几何意义。设法载线L为沿坐标曲线x_1的一条曲线，则有$x_2=c_2=const.$，$dx_2=0$，$\mathbf{r}=\mathbf{r}(x_1,\ c_2)$，$ds=ds_1=\sqrt{a_{11}}dx_1$，$k=k_1=1/R_1$，由式（1—32）及（1—31）可得

$$b_{11}=\mathbf{a}_3\cdot\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x_1^2},\quad b_{22}(dx_2)^2=0,\quad b_{12}dx_1dx_2=0$$

于是由式（1—30）得到坐标曲线x_1的曲率为

$$k_1=\frac{1}{R_1}=\mathbf{a}_3\cdot\frac{\partial^2\mathbf{r}}{a_{11}\partial x_1^2}=\frac{b_{11}}{a_{11}} \qquad (1—34a)$$

同理得到坐标曲线x_2的曲率为

$$k_2=\frac{1}{R_2}=\mathbf{a}_3\cdot\frac{\partial^2\mathbf{r}}{a_{22}\partial x_2^2}=\frac{b_{22}}{a_{22}} \qquad (1—34b)$$

而曲面在任一点P的扭率定义为

$$k_{12}=\frac{1}{R_{12}}=\mathbf{a}_3\cdot\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}\ \partial x_1\partial x_2}=\frac{b_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \qquad (1—34c)$$

k_1、k_2和k_{12}分别称曲面的曲率和扭率，由上式可见，曲面的第二基本形式的系数b_{11}，b_{22}和b_{12}分别表征曲面的曲率和扭率。

若过曲面上任一点P作任意曲线L'，其在P点的单位主法线矢量$\mathbf{m}$与曲面在该点的单位法线矢量$\mathbf{a}_3$夹角为φ（图1—6），则有

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{a}_3=\cos\varphi$$

曲线L'在P点的曲率k'为

$$k=k'\cos\varphi \qquad (1—35)$$

或

$$R'=R\cos\varphi \qquad (1—36)$$

这表明，任意曲线L'的曲率半径R'等于法曲率半径R在曲线L'的主法线上的投影。

从以上讨论可见，曲面的主要几何性质取决于曲面上曲线的弧长和曲率，而弧长和曲率则取决于曲面的第一基本形式和第二基本形式。

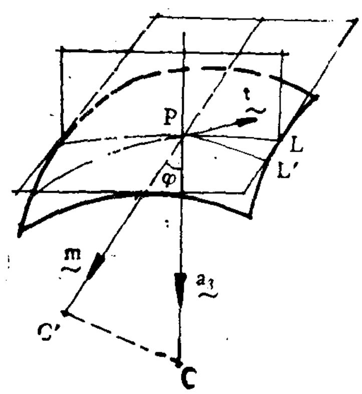


图 1－6

§1—4　正交曲线坐标系下的曲面几何性质

在以上两节的讨论中，对曲面的曲线坐标没有作特殊的规定，采用的是一般曲线坐标系。为了简化壳体理论，今后我们采用一种特定的曲线坐标即所谓的正交曲线坐标。

一、主曲率、曲率线和正交曲线坐标

众所周知，通过曲面上任意一点 P 的无数条曲线（法截线）在该点的曲率一般是各不相同的（圆球面除外）。在这些曲线中有一条曲线，它的曲率最大，相应的曲率半径为最小；另有与它正交的一条曲线，它的曲率最小，相应的曲率半径为最大。沿着这两条曲线的方向，曲面的扭率等于零。这两条曲线在 P 点的曲率称为曲面在 P 点的主曲率，以后用 k_1、k_2 表示。在 P 点的这两条曲线的切线方向，称为曲面在 P 点的曲率主向。由于在曲面上的任意一点都有两个相互正交的曲率主向，因此就可以在曲面上作无数多这样的曲线，它们的切线方向总是沿着曲率主向。这样的两族相互正交的曲线称为曲面的曲率线（或称主曲率线）。取曲面的曲率线为坐标线，叫做曲率线坐标（或称主曲线坐标），这就是以后在研究壳体理论中将采用的正交曲线坐标，仍以 x_1，x_2 表示。在这种坐标系下导出的壳体理论的全部方程具有简单的形式，而且便于分析。

曲面理论表明，坐标线 x_1 和 x_2 是曲率线的充要条件应是在曲面上每一点满足如下方程：

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \tag{1—37a}$$

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{1,2} = 0 \tag{1—37b}$$

根据式（1—11）和（1—29），上二式可写成

$$a_{12} = 0 \tag{1—38a}$$

$$b_{12} = 0 \tag{1—38b}$$

这表明沿曲率线坐标方向，曲面的扭率为零。

由式（1—19）和（1—6）得

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{1,2} = -\mathbf{a}_{3,2} \cdot \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{1,2} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{2,1} = -\mathbf{a}_{3,1} \cdot \mathbf{a}_2$$

所以式（1—37b）等价于以下两个方程

$$\mathbf{a}_{3,1} \cdot \mathbf{a}_2 = 0,\quad \mathbf{a}_{3,2} \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \tag{1—39}$$

式（1—39）表明，曲面的单位法线矢量 $\mathbf{a}_3$ 对一个曲线坐标的导数在另一个坐标曲线的切线方向的分量为零。

总之，只要曲面上每一点满足式（1—37a）和（1—39），就可保证坐标线是曲率线，而且这种坐标就是正交曲线坐标。

二、曲面的几何性质

在正交曲线坐标系中，由式（1—37a）可知

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = a_{12} = 0$$

而

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = a_{11},\quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = a_{22}$$

基矢 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 的长度分别用 A_1 和 A_2 表示为

$$A_1 = |\mathbf{a}_1| = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1)^{1/2} = \sqrt{a_{11}}$$

$$A_2 = |\mathbf{a}_2| = (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2)^{1/2} = \sqrt{a_{22}}$$

或简写为

$$A_\alpha = |\mathbf{a}_\alpha| = (\mathbf{a}_{\underline{\alpha}} \cdot \mathbf{a}_\alpha)^{1/2} \qquad (1\text{—}40)$$

（$\alpha=1$，2。$\underline{\alpha}$表示对α不求和，下同）*

A_α叫做曲面的拉梅（*Lame*）系数。对于固定坐标系，由式（1—13）可得

$$\left.\begin{aligned} A_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 \\ A_2^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{—}41)$$

应用式（1—12）和（1—40）得到沿坐标线方向的微元弧长

$$(ds_1)^2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 (dx_1)^2 = A_1^2 (dx_1)^2$$

$$(ds_2)^2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 (dx_2)^2 = A_2^2 (dx_2)^2$$

或简写为

$$(ds_\alpha)^2 = A_{\underline{\alpha}}^2 (dx_\alpha)^2 \qquad (\alpha = 1, 2)$$

即

$$ds_\alpha = A_{\underline{\alpha}} dx_\alpha \qquad (\alpha = 1,\ 2) \qquad (1\text{—}42)$$

坐标线x_1、x_2和微元弧长ds_1、ds_2所围成的微面积为（图1—7）

$$dA = ds_1 ds_2 = A_1 A_2 dx_1 dx_2 \qquad (1\text{—}43)$$

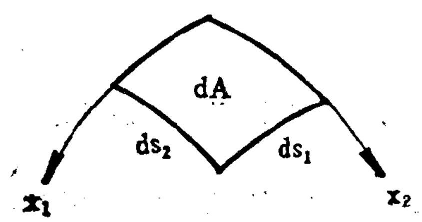


图1—7

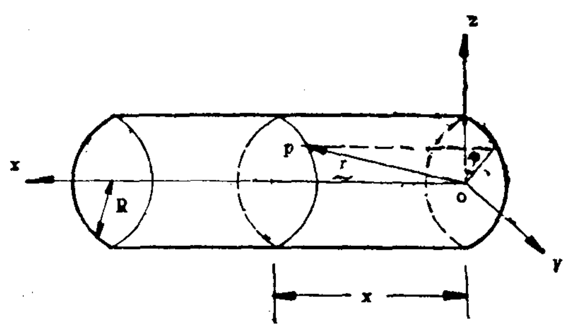


图1—8

由于沿坐标线方向有$b_{12}=0$及$a_{11}=A_1^2$，$a_{22}=A_2^2$，故由式（1—34）得到曲面的主曲率为

$$k_1 = 1/R_1 = b_{11}/A_1^2, \quad k_2 = 1/R_2 = b_{22}/A_2^2 \qquad (1\text{—}44)$$

而扭率为零，即$k_{12}=0$。

下面具体讨论今后常用的几种曲面的主要几何性质。

（1）圆柱曲面（图1—8）。取固定坐标系$oxyz$，则该曲面方程可写成

* 在同一项中，重复出现两次的字母标号为求和标号(68)，当遇同一项重复出现两次的字母标号不表示求和时，一律在字母标号下加标记“—”，以示区别。

$$x = x,\quad y = R\sin\varphi,\quad z = R\cos\varphi\ 。$$

该曲面的位矢表达式为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x\mathbf{i} + R\sin\varphi\,\mathbf{j} + R\cos\varphi\,\mathbf{k} = \mathbf{r}(x,\ \varphi)$$

取曲线坐标$x_1 = x$，$x_2 = \varphi$，则有

当$x_1 = x = const.$时，得到x_2坐标线即圆周线；

当$x_2 = \varphi = const.$时，得到x_1坐标线即母线。因为圆柱曲面的圆周线和母线都是主曲率线，所以$x_1 = x$，$x_2 = \varphi$为主曲线坐标，即正交曲线坐标。

按照式（1—41）可求得该曲面的拉梅系数为

$$A_1 = 1,\quad A_2 = R\ 。$$

从而分别由式（1—42）和（1—43）求得微元弧长和微面积为：

$$ds_1 = A_1dx_1 = dx,\quad ds_2 = A_2dx_2 = Rd\varphi;$$

$$dA = ds_1ds_2 = Rdxd\varphi\ 。$$

应用式（1-33a、b）及(1-44)，求得主曲率k_1和k_2为

$$k_1 = 0,\quad k_2 = 1/R\ 。$$

（2） 圆锥曲面（图1-9）。取图示固定坐标系，则该曲面方程可写成

$$x = x,\quad y = \frac{R}{H}x\sin\varphi,\quad z = \frac{R}{H}x\cos\varphi$$

其中H为圆锥曲面的高度。该曲面的位矢表达式为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + \frac{R}{H}x(\sin\varphi\,\mathbf{j} + \cos\varphi\,\mathbf{k}) = \mathbf{r}(x、\varphi)$$

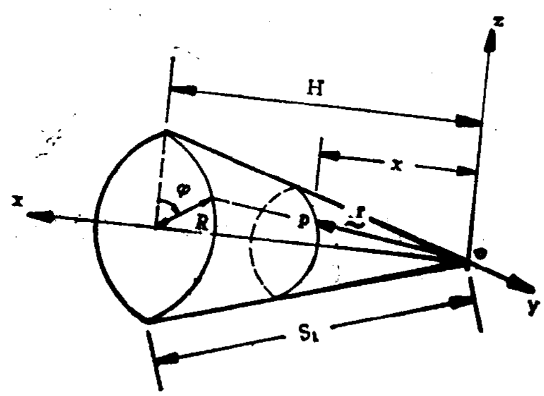


图1-9

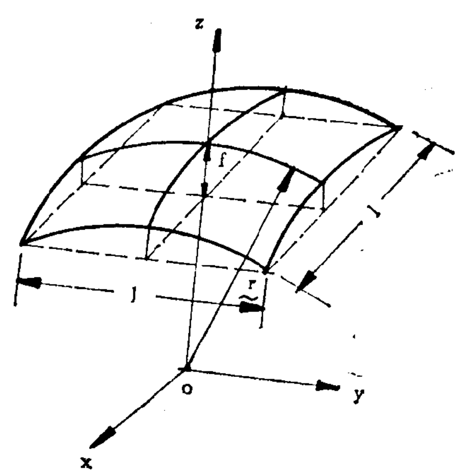


图1-10

曲线坐标取为$x_1 = x$，$x_2 = \varphi$，则x_1坐标线($x_2 = const.$)为母线，x_2坐标线（$x_1 = const.$）为圆周线，它们都是主曲率线。

应用式(1—41)至(1-44)可分别求得该曲面的拉梅系数、微元弧长、微面积和主曲率为

$$A_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2} = \frac{S_1}{H},\quad A_2 = \frac{R}{H}x,\quad（S_1为圆锥曲面的母线长度）$$