



高等院校财经类专业核心课程配套辅导丛书

maths

解
题
思
路
和
方
法

最新版

微积分

主 编 北京大学数学科学学院 田 勇

编 写 双 博 士 数 学 课 题 组

$$x+y=z$$

1234

(t, y, w)



总策划：胡东华



经济数学基础教材辅导

机械工业出版社
China Machine Press

经济数学基础教材辅导

微 积 分

主 编 北京大学数学科学学院 田 勇
编 写 双 博 士 数 学 课 题 组
总策划 胡东华



机械工业出版社

声明:本书封面及封底均采用双博士品牌专用图标
(见右图);该图标已由国家商标局注册登记。
未经本策划人同意,禁止其他单位或个人使用。



图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础教材辅导.微积分/田勇主编.

北京:机械工业出版社,2002.9

ISBN 7-111-03165-2

I.经... II.田... III.①经济数学-高等学校-教学参考资料②微积分-高等学校-教学参考资料 IV.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第070539号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮编:100037)

责任编辑:吴天培 责任校对:郝峥嵘

封面设计:蒲菊祥 责任印制:何全君

保定市印刷厂印刷 机械工业出版社出版发行

2002年10月第1版 第1次印刷

850mm×1168mm 1/32 印张19.125 字数667千字

定价:23.00元

©版权所有 违法必究

盗版举报电话:(010)62534708(著作权者)

封面无防伪标为盗版

(注:防伪标揭开困难或揭起无号码皆为盗版)。

为了保护您的消费权益,请使用正版图书。所有正版双博士品牌图书均贴有电码电话防伪标识物(由16位数字组成的密码)。在查询时,只需揭开标识的表层,然后拨打全国统一免费防伪查询电话16840315或0898-95315000,按照语音提示从左到右依次输入16位数字后按#键结束,您就可以得知所购买的图书是否为正版图书。

<http://www.bbdt.cc>(中国教育考试双博士网站)

<http://www.cmpbook.com>(机械工业出版社网站)

凡购买本书,如有字迹不清、缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换。

订书电话:新华书店系统:(010)68993821 (010)68326094

邮购及各省图书批发市场:(010)62579473 (010)62534708

<http://www.bbdd.cc>

“考研押题讲座”免费授课计划

一、内容：考研政治、英语、数学(一、二、三、四)、西医综合科目考前一个半月押题讲座

二、讲座总策划及献爱心人：胡东华

三、讲座资料提供：

北大、清华、人大考研辅导班资料采编组
京城考研命题信息搜集研究组 联合提供

四、免费讲座时间：2002年12月1日～2003年1月15日

五、中国教育考试双博士网站：<http://www.bbdd.cc>

六、课程表：

时 间 科 目	12月第1周	12月第2周	12月第3周	12月第4周	1月第1周	1月第2周
政 治	马克思主义哲学、 政治经济学	毛泽东思想概论	邓小平理论概论	国际政治、 时事政治	网上通知	网上通知
英 语	听力	英语知识运用	阅读理解 A (多项选择)	阅读理解 B (英译汉)	写作命题预测 及背诵范文	网上通知
数 学 一	高 数 (1~4)	高数 (4~8)	线性代数	概率论与 数理统计	网上通知	网上通知
数 学 二	高数(1~2)	高数(3)	高数(4)	线性代数	网上通知	网上通知
数 学 三	微积分 (1~3)	微积分 (4~6)	线性代数	概率论与 数理统计	网上通知	网上通知
数 学 四	微积分 (1~3)	微积分 (4~5)	线性代数	概率论	网上通知	网上通知
西医综合	生理学 生物化学	病理学	外科学	内科学	网上通知	网上通知

(如有变化,另行通知)

双博士品牌 真情大奉献

郑州某大学学生的来信

双博士:

您好!

收到您的回信十分高兴,您能如此重视一名普通读者的意见,在百忙之中给予回复,并提供赠书,令我这名学管理的学生看到了贵公司完善的管理机制,也看到了“双博士”品牌光辉的前景。

我曾购买了“双博士”的《大学英语精读课文辅导》(3)、(4)册,并且我认为质量很好,因为我在准备2001年6月份的全国四级考试前没买太多的辅导资料,仅是每天背《辅导》上的知识点,另外又做(看)了双博士的模拟题、真题解析及词汇,而我却考出了94.5分的骄人成绩,真应感谢双博士为我们带来了如此上乘的资料。我信赖双博士,也相信考研中借助双博士的力量,会取得更好的成绩。所以我在您寄来的书目中挑了一下,如果可以的话,我想得到代号为“RB12”的《考研应试教程(英语分册)》,或者是代号为“B18A”的《研究生入学考试英语词汇备考手册》。两本书中的任何一本,我都相信会给我带来好运!

另外,……

最后,预祝双博士前途无量,事业有成!

李 XX

2001年11月22日

天津某高校学生的来信

双博士:

你们好!

期待中,我们收到了所需要的书目,同时也收到了对我们学生工作热情的支持与无偿的帮助,这更加证明“双博士”是我们真诚的朋友,你们已经用你们的信誉与忠诚占领了一个将永远信任你们的市场!我在此代表我校所有爱好英语的同学,向你们道一声:谢谢!

我们都知道,英语学习中,口语是非常重要的,而《英美流行口语》正是我们所需要的,是一场及时雨。五一、五四前后,我校将举办一次口语演讲比赛,我们将把这几本书作为奖品赠送给口语出色的同学,相信他们会很意外,也很高兴的。双博士为我们着想,我们也希望能以微小之力量,给她的工作以支持和回报。其实,我想,只要我们真正为爱好英语的同学做了事,使他们从中受了益,英语有了提高,就是对“双博士”最好的回报了,对不对?

还有,我校对购买“双博士”图书比较困难,到书店买,常被抢购一空,由老师订购又“姗姗来迟”,所以,我想与你们联系,能否帮同学们统一订购?如可以,请将你们的订购时间、办法等以传真方式告诉我。

好了,再次感谢我们的朋友——双博士!

祝:

一马当先!

马到成功!

英语俱乐部部长:于 XX

2002年5月

前 言

微积分是财经类专业的核心课程之一,它的重要性是毋庸置疑的。作为读者,一方面希望能深刻领会掌握教材的内容,另一方面又希望学习能具有前瞻性,能为以后的具体工作及各类考试服务。因此需要有一本既紧扣教材内容,与教学同步,同时又能反映当前各类考试情况的教学参考辅导书,这样就能在归纳,总结学习内容、测试学习效果的同时,同步了解考研等考试试题动向。

基于这一需要,我们精心地编写了这本书。在书的每一节里,我们首先列出了该节的要求和说明,主要内容及计算公式,然后给出大量详细的例题,使读者能在较短的时间内掌握该节内容。在每一章后面,我们列出了历年的考研真题,以便考研的同学能参考借鉴。为便于读者的自我测试,最后,又给出了一套自测题,做完后可参考解答来评价掌握的情况。

欢迎垂询中国教育考试网站 <http://www.bbdd.cc>,该网站将在 2002 年 12 月 1 日 ~ 2003 年 1 月 15 日举行“考研押题讲座”。

双博士数学课题组
2002 年 9 月北京

第一章 函数与极限	(1)
§ 1.1 函数	(2)
§ 1.2 极限	(13)
§ 1.3 无穷小量与无穷大量	(29)
§ 1.4 函数的连续性	(35)
本章知识网络图	(44)
历届考研真题评析	(45)
同步自测题	(49)
同步自测题参考答案	(51)
第二章 导数与微分	(59)
§ 2.1 导数	(59)
§ 2.2 高阶导数与微分	(73)
本章知识网络图	(80)
历届考研真题评析	(81)
同步自测题	(87)
同步自测题参考答案	(90)
第三章 中值定理与导数的应用	(100)
§ 3.1 微分中值定理	(100)
§ 3.2 洛必达法则与函数的单调性	(111)
§ 3.3 函数的极值以及最大值和最小值	(128)
§ 3.4 曲线的凹凸性、拐点、渐近线以及函数作图	(141)
§ 3.5 微分学在经济中的应用	(152)
本章知识网络图	(154)
历届考研真题评析	(155)
同步自测题	(182)
同步自测题参考答案	(183)
第四章 不定积分	(192)
§ 4.1 不定积分	(192)
本章知识网络图	(221)

历届考研真题评析	(222)
同步自测题	(228)
同步自测题参考答案	(230)
第五章 定积分及其应用	(238)
§ 5.1 定积分的概念、性质及计算方法	(238)
§ 5.2 广义积分	(284)
§ 5.3 定积分的应用	(305)
本章知识网络图	(313)
历届考研真题评析	(314)
同步自测题	(339)
同步自测题参考答案	(341)
第六章 多元函数微积分	(349)
§ 6.1 空间解析几何基础	(350)
§ 6.2 多元函数的极限与连续	(354)
§ 6.3 偏导数与全微分及其求法	(362)
§ 6.4 多元函数的极值	(380)
§ 6.5 二重积分及其应用	(389)
本章知识网络图	(409)
历届考研真题评析	(410)
同步自测题	(433)
同步自测题参考答案	(435)
第七章 无穷级数	(444)
§ 7.1 常数项级数	(445)
§ 7.2 幂级数	(465)
本章知识网络图	(485)
历届考研真题评析	(486)
同步自测题	(492)
同步自测题参考答案	(494)
第八章 常微分方程与差分方程	(506)

§ 8.1 常微分方程	(506)
§ 8.2 差分方程	(537)
本章知识网络图	(549)
历届考研真题评析	(549)
同步自测题	(559)
同步自测题参考答案	(560)
附录一 2002 年硕士研究生入学考试数学(三)试卷	(569)
附录二 2002 年硕士研究生入学考试数学(四)试卷	(586)

目
录



第一章 函数与极限

基本要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念.
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.
6. 了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念.
7. 了解无穷小的概念和基本性质,掌握无穷小的阶的比较方法.了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.
8. 了解极限的性质与极限存在的两个准则(单调有界数列或函数必有极限、夹逼定理),熟练掌握极限四则运算法则,熟练掌握两个重要极限(不含证明).
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)与函数间断的概念,掌握间断点的分类.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有界性,最大值与最小值定理和介值定理)及其简单应用.



•••••

§ 1.1 函数

•••••

1.1.1 主要内容及理解记忆方法.

表 1:1-1 函数及相关的定义

名称	定 义	要点	补充说明
函数	设 D 是一个非常集合, 若按照某一确定的对应法则 f , 对于每一个 $x \in D$, 都有惟一确定的实数 y 与之对应, 则称对应法则 f 是定义在 D 上的函数, D 称为函数 f 的定义域	对应规则、定义域	1. x 称为自变量, y 为因变量 2. $R_f = \{f(x) \mid x \in X\}$ 为函数的值域
函数的图形	平面上点集 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		
复合函数	设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域, 则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y = f[g(x)]$, 称之为 g 与 f 的复合函数. 记作 $y = f[g(x)]$ 或 $y = f \circ g$	对应规则、定义域、值域	
反函数	设 $y = f(x)$ 为定义在 D 上的函数, R_f 为值域, 如果对任意的 $y \in R_f$, 有惟一的 $x \in D$ 使得 $f(x) = y$, 这其实确定了 x 为 y 的一个函数, 称之为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 或 $y = f^{-1}(x)$		当 $y = f(x)$ 反函数用 $y = f^{-1}(x)$ 表示时, 其图像与原函数 $y = f(x)$ 的图像关于 $y = x$ 对称
初等函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后所得到的函数	有限次复合	基本初等函数见后

第一章 函数与极限

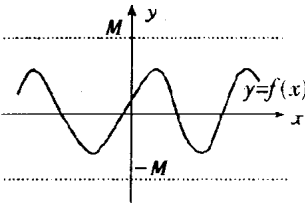


表 1.1-2 函数的几种特性

性质	定 义	图例或说明
奇偶性	奇函数 如果函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 并且对任意的 $x \in D$ 均有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为奇函数	
	偶函数 如果函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 并且对任意的 $x \in D$ 均有, $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数	
单调性	单调上升(单调递增) 函数 $f(x)$ 在 D 上有定义, 对任意的 $x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) \leq f(x_2)$	
	单调下降(单调递减) 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, 对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 且 $x_1 < x_2$ 均有 $f(x_1) \geq f(x_2)$	



(续)

性质	定 义	图例或说明
	若严格不等号成立,则称严格单调上升(下降)	
有界性	函数 $f(x)$ 在 D 上定义, 若存在 $M > 0$, 使得对任意的 $x \in D$, 均有 $f(x) \leq M$ (或存在 m, M, 使得 $m \leq f(x) \leq M$ 成立), 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界函数	 即函数的图形位于 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间
无界性	函数 $f(x)$ 在 D 上定义, 若对任意的 $M > 0$, 都存在 $x_m \in D$, 使得 $f(x_m) > M$, 则称 $f(x)$ 在 D 上无界	例: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界, 因为对任意的 $M > 0$, 取 $x_m = \frac{1}{M+1}$, 则 $f(x_m) = M+1 > M$
周期性	设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D, 如果存在 $T > 0$, 使得对任意的 $x \in D$ 均有 $x \pm T \in D$ 且 $f(x+T) = f(x)$ 成立, 则称 $y = f(x)$ 为周期函数, T 称为函数的一个周期, 通常所说的周期为最小正周期	若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 (1) $f(x+kT) = f(x)$, (k 为整数); (2) $f(ax+b)$ ($a \neq 0, b \in R$) 是一个以 $\left \frac{T}{a} \right$ 为周期的函数

第一章 函数与极限



表 1.1-3 基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x) = C, (-\infty < x < +\infty)$. 过 $(0, C)$ 点的直线	
幂函数	$y = x^a, (0 < x < +\infty, a \neq 0)$ $a > 0$ 时, 函数 x^a 在 $[0, +\infty)$ 上严格上升 $a < 0$ 时, 函数 x^a 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降 $y = x^a$ 与 $y = x^{\frac{1}{a}}$ 互为反函数 $x \in (0, +\infty)$	
指数函数	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 过点 $(0, 1)$	
对数函数	$y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1, 0 < x < +\infty)$ $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数, (若 $a = e$, 记 $y = \log_e x$ 为 $y = \ln x$)	



(续)

名称	定义式及性质	图例
三角函数	正弦函数 $y = \sin x, (-\infty < x < +\infty)$	
	余弦函数 $y = \cos x, (-\infty < x < +\infty)$	
	正切函数 $y = \tan x, (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	
	余切函数 $y = \cot x, (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	



(续)

名称	定义式及性质	图例
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x, (-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$	
	反余弦函数 $y = \arccos x, (-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi)$	
	反正切函数 $y = \arctan x, (-\infty < x < +\infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$	
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x, (-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi)$	



1.1.2 典型例题解析

例1 求 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{\ln \cos x}$ 的定义域.

[解题提示] 求复杂函数的定义域,就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集.因此熟练掌握基本初等函数的定义域是有帮助的.

解: 只有 $\sqrt{4-x^2}$, $\ln \cos x$ 同时有意义,且分母不为0时, $f(x)$ 才有定义.即

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ \cos x > 0 \\ \ln \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 2n\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2} \\ x \neq n\pi \end{cases}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

上述不等式组的解集为 $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ (参见图1-1), 因此 $f(x)$ 的定义域为 $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$.

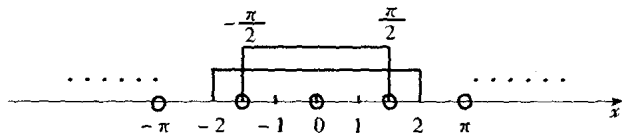


图 1-1

例2 设 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 问(1) $f(x^2)$, (2) $f(\sin x)$, (3) $f(x+a)$ ($a > 0$), (4) $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域各是什么?

解: (1) 要使 $f(x^2)$ 有意义, 须且只须 $x^2 \in [0, 1]$, 即 $0 \leq x^2 \leq 1$
即 $x \in [-1, 1]$. 故 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

(2) 要使 $f(\sin x)$ 有意义, 须且只须 $0 \leq \sin x \leq 1$, 即

$$2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

故函数 $y = f(\sin x)$ 的定义域为 $[2n\pi, (2n+1)\pi], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

(3) 要函数 $y = f(x+a)$ 有意义, 须且只须 $0 \leq x+a \leq 1$, 即 $-a \leq x \leq 1-a$.