考试名家指导

考研 Maths

2005版

数学专项训练系列

第3版

北京大学 刘西垣 李正元 周民强 林源渠 编著

微积分题型精讲（经济类）

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

(考研) 数学专项训练系列

微积分题型精讲

第3版（经济类）

北京大学 刘西垣 李正元 周民强 林源渠 编著

机械工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分题型精讲/刘西垣等编著. —3版.
—北京：机械工业出版社，2004.4
［考试名家指导·(考研)数学专项训练系列］
ISBN 7-111-14267-5

Ⅰ. 微… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 微积分—研究生—入学考试—解题
Ⅳ. 0172-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第026210号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：蓝伙金 边 萌
责任编辑：荆宏智 责任印制：李 妍
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2004年4月第3版第1次印刷
787mm×1092mm1/16·17印张·364千字
定价：25.00元
凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

第3版前言

由机械工业出版社与北京大学数学科学学院的几位老师策划、出版的“考试名家指导”(2005版)考研数学专项训练系列、考研辅导教材系列、考研模拟试卷系列丛书中有关数学辅导用书共6本。其目的在于帮助有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息。这是一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的丛书。本书是根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验编写而成的。

本套丛书作者皆为北京大学多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

考研数学专项训练系列丛书分为四册：《高等数学题型精讲》第3版(理工类)、《微积分题型精讲》第3版(经济类)、《线性代数题型精讲》第3版和《概率论与数理统计题型精讲》第3版，这样不仅充分发挥了每个作者的特长，而且也方便读者根据自己的具体情况选购。

每册书都严格按照“考试大纲”的规定分章，每一章又都包括四个部分：

考试大纲要求——在这一部分中原原本本地介绍了大纲对本章考试内容以及考试要求的规定，使读者一览全局。

基本内容与重要结论——在这一部分中对大纲规定的考试内容以及重点、难点做了精心的总结和透彻的阐述，目的在于使读者对有关的基本概念、重要公式和定理获得深入的理解和全面的掌握。

典型例题分析——在这一部分中集中了经过精心挑选的部分历年考研真题和一批典型例题，总结了各种解题方法，许多解法构思精妙、匠心独运，对读者深入领会基本内容、开阔思路和灵活解题十分有利。

自测练习题与参考答案——在这一部分中有针对性地编排了若干题目(并附有答案)，供读者作为自测练习之用。由于本书篇幅所限，这里提供的练习题数量也许并不能完全满足备考的需要。为了做好研究生入学考试的复习，读者还需要从其他渠道获得更多的题目。

为了在研究生入学数学考试中取得高分，考生须切记以下几点：明确大纲规定的考试内容和要求，掌握历年数学命题的特点和重点是前提；深入掌握基本概念，牢记并能熟练运用基本公式和法则，确保基本计算准确熟练是基础；搞清有关知识间的纵向与横向的联系，按照解题为主线，重新组织有关知识，增强灵活运用知识解决综合题目的能力是关键。

研究生试题中有相当数量的综合题，即在一个题目中考查不同章节的多个知识点，甚至考

查不同学科内容的试题。这类题目着重考查考生对大纲内容的融会贯通与灵活运用，为此考生必须对所学知识进行重组，彻底搞清有关知识间的纵向与横向联系，把原来学过的内容按照解决特定问题的需要进行梳理，打乱次序后再重新编排，以期做到“成竹在胸，信手拈来”，迅速而准确地找到解决综合题的切入点。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大考生开拓思路，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心，以便考出好成绩。

我们在出版这套书时力求能够体现出以上的特色，但是由于时间仓促，疏漏之处难免，恭请读者不吝指正。

机械工业出版社

2004 年 3 月

目录

第一章　函数、极限、连续

一、考试大纲要求

按照考试大纲, 本章函数部分的考试内容包括: 函数的概念及表示法;函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;反函数、复合函数、隐函数和分段函数;基本初等函数的性质及其图形;初等函数等方面. 要求是: 理解函数的概念;掌握函数的表示法;了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数概念;掌握基本初等函数的性质及其图形;理解初等函数的概念.会建立简单应用问题中的函数关系式.

本章的重点之一是极限.这部分的考试内容是: 数列极限和函数极限的定义及性质;函数的左极限和右极限;无穷小和无穷大的概念及关系;无穷小的性质及无穷小的比较;极限四则运算;极限存在的两个准则(单调有界准则和夹逼准则);两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad 和 \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

考试大纲对极限的要求是: 了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念.理解无穷小的概念和基本性质;掌握无穷小的比较方法;了解无穷大的概念以及它与无穷小的关系;了解极限的性质与极限存在的两个准则;掌握极限四则运算法则;会应用两个重要极限;会用洛必达法则求未定式极限.

判断函数连续性以及判断间断点的类型等问题也是本章的重点.这部分考试内容包括: 函数连续与间断的概念, 初等函数的连续性, 闭区间上连续函数的性质.考试要求是: 理解函数连续性概念(含左连续与右连续);会判断函数间断点的类型;了解连续函数的性质和初等函数的连续性;了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)及其简单应用.

二、基本内容与重要结论

1.1 函数的有关概念和几类常见的函数

(一) 函数的定义

定义1.1 设D是一个给定的数集,如果对于每个数$x \in D$,变量y按照一定法则总有一个确定的数值和它对应,则称变量y是变量x的**函数**,记作$y = f(x)$,数集D叫做函数$y = f(x)$的**定义域**,x叫做**自变量**,y叫做**因变量**.

当x取数值$x_0 \in D$时,与x_0对应的y的数值称为函数$y = f(x)$在点x_0的**函数值**,记作$f(x_0)$,当x取遍D的每一个数值时,对应的函数值的全体组成的数集

$$Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数$y = f(x)$的**值域**.

(二) 几类常见的函数

定义1.2 设函数$f(x)$的定义域是D,集合$X \subset D$.如果存在数K_1,使得

$$f(x) \leqslant K_1$$

对于任何$x \in X$成立,则称函数$f(x)$在X有**上界**,数K_1称为函数$f(x)$在X的一个上界;如果存在数K_2,使得

$$f(x) \geqslant K_2$$

对于任何$x \in X$成立,则称函数$f(x)$在X有**下界**,数K_2称为函数$f(x)$在X的一个下界;如果存在数$M > 0$,使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对于任何$x \in X$成立,则称函数$f(x)$在X上**有界**,数M称为函数$f(x)$在X上的一个界,否则称函数$f(x)$在X上**无界**.

容易证明,函数$f(x)$在X上有界的充分必要条件是它在X上既有上界又有下界.注意,如果M是函数$f(x)$在X上的一个界,则任何比M更大的正数也是函数$f(x)$在X上的界,所以一个有界函数必有无穷多个界,可以证明其中必有一个最小的界.对于函数的上界和下界也有类似的结论.

如果函数$f(x)$在其定义域上有界,则称为有界函数;否则称为无界函数.

想要证明一个函数$f(x)$是有界函数,应按照定义找到$f(x)$在其定义域上的一个界M;反之,如果想要证明一个函数$f(x)$是无界函数,则应说明任何正数M都不是$f(x)$的界,也就

是说：对于任意给定的 $M>0$，都存在 $x_M\in D$，使得 $|f(x_M)|>M$ 成立.

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，区间 $I\subset D$. 如果对于任何 $x_1,x_2\in I$，只要 $x_1<x_2$，就有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**；如果对于任何 $x_1,x_2\in I$，只要 $x_1<x_2$，就有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**.

如果函数 $f(x)$ 在其定义域上单调增加，则称 $f(x)$ 为单调增加函数（简称增函数）；如果函数 $f(x)$ 在其定义域上单调减少，则称 $f(x)$ 为单调减少函数（简称减函数）；单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

如果对任何 $x_1,x_2\in I$，只要 $x_1<x_2$，就有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调不减（单调不增）.

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任何 $x\in D$，总有

$$f(x)=f(-x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任何 $x\in D$，总有

$$f(x)=-f(-x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的；奇函数的图形关于原点是对称的.

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 的定义域是 D. 如果存在常数 $l\neq 0$，使得对于任何 $x\in D$，总有

$$x\pm l\in D,$$
$$f(x+l)=f(x)$$

同时成立，则称 l 是 $f(x)$ 的一个**周期**，称 $f(x)$ 是以 l 为周期的**周期函数**.

显然，如果 l 是函数 $f(x)$ 的一个周期，则 l 的任何整数倍倍数也是函数 $f(x)$ 的周期，因而一个周期函数必有无穷多个周期；为了确定起见，我们所说的周期函数的周期都是指它的**最小正周期**.

设 l 是函数 $f(x)$ 的周期，则在它定义域内每个长度为 l 的区间上，$f(x)$ 的图形有相同的形状.

（三）反函数，复合函数，初等函数与隐函数

定义 1.6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 Z. 如果对于每个 $y\in Z$，存在惟一的 $x\in D$ 满足 $f(x)=y$，把 y 看作自变量，把 x 看作因变量，则 x 是一个定义在 $y\in Z$ 上的函数，记此函数为

$$x = f^{-1}(y) \quad (y \in Z)$$

称为 $y = f(x)$ $(x \in D)$ 的**反函数**.

习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以通常把反函数表达式中的 x 和 y 对换,写成

$$y = f^{-1}(x) \quad (x \in Z)$$

的形式.这样一来,在同一个直角坐标系中,函数 $y = f(x)$ $(x \in D)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ $(x \in Z)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

很明显,单调函数一定有反函数;若某个函数不是单调函数,但是它的定义域能够分为若干个单调区间,则在每个单调区间中该函数就有一个相应的反函数.

定义 1.7 设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 D_f,值域是 Z_f,函数 $u = g(x)$ 的定义域是 D_g,值域是 Z_g.如果 $Z_g \cap D_f \neq \varnothing$,则称函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D = \{x \mid g(x) \in D_f\}$$

是由函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的**复合函数**.变量 u 称为**中间变量**.

定义 1.8 常数函数、幂函数、对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数等六类函数称为**基本初等函数**.基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的函数称为**初等函数**.

初等函数有很多好的性质,它们是微积分的重要研究对象.

定义 1.9 设 $F(x, y)$ 是一个已知二元函数,I 是一个区间.如果在区间 I 上存在函数 $y = y(x)$ 满足方程 $F(x, y) = 0$,则称这个函数 $y = y(x)$ 为方程 $F(x, y) = 0$ 在区间 I 上确定的**隐函数**.

从定义 1.9 可知,把隐函数 $y = y(x)$ 代入方程 $F(x, y) = 0$,就得到在区间 I 上成立的恒等式

$$F[x, y(x)] \equiv 0, \quad x \in I. \tag{1-1}$$

尽管在大多数情况下,不能从方程 $F(x, y) = 0$ 解出隐函数 $y = y(x)$ 的显式表达式,然而,却可利用恒等式(1-1)来研究隐函数的许多性质,如:隐函数的可微性以及导数公式等.

(四)分段函数与积分上限的函数

在自变量的不同变化范围中,自变量与因变量的对应法则需用不同解析式来表示的函数,称为**分段函数**.绝对值函数 $y = |x|$,取整函数 $y = [x]$ 等都是分段函数.

若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积,它在部分区间 $[a, x]$ 上的定积分在区间 $[a, b]$ 上定义了一个函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

称为**用变上限定积分定义的函数**,或称为**积分上限的函数**.

在考研数学试题中经常出现这两类函数,因此有必要重视这两类函数的有关概念和运算.

1.2　极限的性质与两个重要极限

(一) 基本性质

1. 极限的不等式性质

定理 1.1　设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. 若 $a > b \Rightarrow \exists N$，当 $n > N$ 时 $x_n > y_n$. 若 $n > N$ 时 $x_n \geqslant y_n \Rightarrow a \geqslant b$.

推论(保正性)　设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. 若 $a > 0 \Rightarrow \exists N$，当 $n > N$ 时 $x_n > 0$. 若 $n > N$ 时 $x_n \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 0$.

定理 1.2　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. 若 $A > B \Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > g(x)$. 若 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow A \geqslant B$.

推论(保正性)　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. 若 $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > 0$. 若 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) \geqslant 0 \Rightarrow A \geqslant 0$.

其他极限过程也有类似的结论.

2. 极限的惟一性

3. 有界性性质

定理 1.3　设 x_n 收敛 $\Rightarrow x_n$ 有界[即 $\exists$ 常数 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leqslant M$ $(n = 1,2,3,\cdots)$].

定理 1.4　设存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 有界，即 $\exists \delta > 0, M > 0$，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x)| \leqslant M$.

注一　定理 1.4 中函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内有界，是函数的局部有界性.

注二　其他的极限过程如 $x \to x_0 + 0$，$x \to x_0 - 0$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 等也有类似的结论.

(二) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

1.3　极限的存在与不存在问题

(一) 数列 x_n 敛散性的判别

1. 通过 x_n 与其他数列的关系

定理 1.5 (夹逼定理) 若$\exists N$,当$n>N$时$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,又$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a$,

则
$$\lim_{n\to+\infty} x_n=a.$$

还有其他一些极限运算法则,不仅证明了x_n收敛还可求得极限值.如若$x_n=y_n+z_n$或$x_n=y_n\cdot z_n$,y_n,z_n均收敛,则x_n收敛.

2. 通过x_n的自身性质来判断

定理 1.6 (单调有界数列必存在极限定理)

若数列x_n单调上升有上界,即$x_{n+1}\geqslant x_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$并存在一个数M使得对$\forall$的n有$x_n\leqslant M$,则x_n收敛.即存在常数a使得$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$并有$x_n\leqslant a$ $(n=1,2,\cdots)$.

若数列x_n单调下降有下界,即$x_{n+1}\leqslant x_n$ $(n=1,2,\cdots)$并存在一个数m使得对$\forall n$有$x_n\geqslant m$,则x_n收敛.即存在数a使得$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$且有$x_n\geqslant a$ $(n=1,2,\cdots)$.

(二) 函数 $y=f(x)$ 的极限存在与不存在问题

1. 关于函数极限存在性的两个结论

定理 1.7 (夹逼定理) 设$\exists\delta>0$,$0<|x-x_0|<\delta$时
$$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x),$$
又
$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=A.$$
则
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

定理 1.8 (极限与左右极限的关系)
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

对于分段函数$f(x)=\begin{cases} g(x), & x_0-\delta<x<x_0, \\ h(x), & x_0<x<x_0+\delta. \end{cases}$
考察$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$是否存在时,就要分别求
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} h(x) \quad 与 \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} g(x).$$

2. 证明一元函数$y=f(x)$极限不存在的方法

(1) 若$f(x_0+0)\neq f(x_0-0)\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

(2) 若$\exists x_n\to x_0$,$x_n\neq x_0$,$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$不存在或$\exists x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$,$y_n\to x_0(y_n\neq x_0)$使得$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)\neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

1.4　无穷小和它的阶

(一) 无穷小、极限、无穷大及相互间的关系

1. 无穷小与无穷大的定义

定义 1.10　在某一极限过程中以零为极限的变量称为**无穷小量**(或无穷小). 无穷小量记为 $o(1)$, 并在其后的括号内标出极限过程.

定义 1.11　x_n 为**无穷大量**($\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$): $\forall M>0$, $\exists$ 自然数 N, 当 $n>N$ 时 $|x_n|>M$.

可类似定义 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 为无穷大量($\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$); $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大量, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

也可类似定义正无穷大量和负无穷大量. 无穷大量也称为**无穷大**.

2. 无穷小与极限, 无穷小与无穷大的关系

无穷小与极限的关系: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)=o(1)\ (x\to x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

无穷小与无穷大的关系: 在同一个极限过程中,

$$f(x)\text{ 为无穷小}, f(x)\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}\text{ 为无穷大}.$$

$$f(x)\text{ 为无穷大} \Rightarrow \frac{1}{f(x)}\text{ 为无穷小}.$$

(二) 无穷小的阶

1. 定义

定义 1.12　设在同一个极限过程中, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 为无穷小量, 且 $\exists \lim\frac{\alpha}{\beta}=l$. ① 若 $l\neq 0$, 称 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 在该极限过程中为**同阶无穷小**; ② 若 $l=1$, 称 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 在该极限过程中为**等价无穷小**, 记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$; ③ 若 $l=0$, 称在此极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的**高阶无穷小**, 记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$; ④ 若 $l=\infty$, 称在此极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的**低阶无穷小**. 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在(且不为 ∞), 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 不可比较.

定义 1.13　设在同一个极限过程中, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 为无穷小. 以 $\alpha(x)$ 为基本无穷小, 若 $\exists \lim\frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)}=l\neq 0$ 即 $\beta(x)$ 与 $\alpha^k(x)$ 为同阶无穷小, 称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 **k 阶无穷小**.

2. 常见的等价无穷小量

$x\to 0$ 时

$$\sin x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \tan x \sim x,\ \arctan x \sim x,$$
$$\ln(1+x) \sim x,\ e^x - 1 \sim x,\ a^x - 1 \sim x\ln a, \tag{1-2}$$
$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

(三) 无穷小阶的运算性质

设 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x), \beta(x)$ 分别是 $(x-x_0)$ 的 n 阶与 m 阶无穷小，又 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A \neq 0$，则

$\alpha(x)\cdot h(x)$ 是 $(x-x_0)$ 的 n 阶无穷小.

$\alpha(x)\cdot\beta(x)$ 是 $(x-x_0)$ 的 $n+m$ 阶无穷小.

$n > m$ 时 $\alpha(x)+\beta(x)$ 是 $(x-x_0)$ 的 m 阶无穷小.

$n > m$ 时 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 是 $(x-x_0)$ 的 $n-m$ 阶无穷小.

$\alpha(x) \geqslant 0\ (0 < |x-x_0| < \delta)$，$k > 0$ 时 $\alpha^k(x)$ 是 $(x-x_0)$ 的 kn 阶无穷小.

注意：$n = m$ 时，不能确定 $\alpha(x)+\beta(x)$ 是 $x-x_0$ 的几阶无穷小.

$x \to 0$ 时 $x, \sin x, \tan x$ 均是 x 的一阶无穷小. $x+\sin x$ 也是 x 的一阶无穷小，因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x} = 2.$$

但 $\tan x - \sin x$ 是 x 的三阶无穷小，因为

$$\tan x - \sin x = \tan x\cdot(1-\cos x),$$

式中 $\tan x$ 是 x 的一阶无穷小，$1-\cos x$ 是 x 的二阶无穷小.

(四) 等价无穷小的重要性质

等价无穷小有下面的性质

在同一个极限过程中

$$\alpha(x) \sim \alpha^*(x),\ \beta(x) \sim \beta^*(x) \Rightarrow \lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}.$$

该结论表明：在求 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式的极限过程中分子和分母均可用各自的等价无穷小做替换.

在求极限过程中，等价无穷小因子替换常常会简化计算. 因此要充分地应用它.

(五) 确定无穷小阶的方法

设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$，如何确定当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 是 $(x-a)$ 的几阶无穷小？

(1) 利用洛必达法则确定 $k > 0$ 使得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^k} = l \neq 0.$$

则 $x \to a$ 时 $f(x)$ 是 $x-a$ 的 k 阶无穷小.

(2) 用无穷小阶的运算性质.

判断无穷小 $f(x),g(x)\ (x\to a)$ 是同阶、等价或高阶的最基本方法是求 $\frac{0}{0}$ 型极限:

$$
若\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases} l\neq 0 且 l\neq 1, & 则 f(x) 与 g(x) 同阶而不等价,\\ 1, & 则 f(x) 与 g(x) 等价,\\ 0, & 则 f(x) 比 g(x) 高阶,\\ \infty, & 则 f(x) 比 g(x) 低阶. \end{cases}
$$

1.5　求极限的方法

本节综述求极限的各种方法.

(一) 极限的四则运算与幂指数运算法则

我们应掌握以下极限运算法则:

定理 1.9

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A,\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\ \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=AB,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0),\quad \lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=A^B\ \ (A>0).$$

(2) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0.$$

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$(或 $+\infty$),$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$(或 $+\infty$)或 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\neq 0(A>0)\Rightarrow$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\infty(或+\infty).$$

(4) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$(或 $+\infty$),当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty(或+\infty).$$

(5) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$,则 $\lim\limits_{x\to a}A^{f(x)}=\begin{cases}0 & (0<A<1)\\ +\infty & (A>1)\end{cases}$.

注　对以下未定式不能直接用上述运算法则:

$\frac{0}{0}$ 型,$\frac{\infty}{\infty}$ 型,$0\cdot\infty$ 型,$\infty-\infty$ 型,$0^0,1^\infty,\infty^0$ 型.

这些未定式中最基本的是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,其他的可转化为这两种类型.

求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限的一种方法是:设法消去分子与分母中极限为零或 ∞ 的因子,转化