最优化方法及其在机械工程中的应用

廖道训 王惠珍

余 俊 傅祥志 李元科

华中工学院机械系

一九八一年五月

最优化方法
及其在机械工程中的应用

廖道训　王惠珍　余俊
傅祥志　李元科

华中工学院机械系

1981.5.

林李英

前 言

最优化方法是求解最优设计方案的数值计算方法。如果我们能根据实际生产问题建立最优化的数学模型，我们就能运用最优化方法所提供的理论和算法，编制计算程序，在电子计算机上求出最佳设计参数。

最优化方法的理论和算法的发展及其推广应用，是与电子计算机的使用密切相关的。近二十年来，最优化方法这一新兴的数学分支进展非常迅速，方法愈来愈多，应用越来越广泛。为了适应发展的需要，我们编写了这本教材。

这本教材是我们为与机械工程有关各专业的研究生和高年级大学生开设这门课程而编写的，工程技术人员也可使用。编写本书的目的，是要求读者在有关最优化方法的数学基础，最优化计算方法，运算实例及计算程序四个方面能有较为全面的理解，以及掌握最优化方法的基本理论及运算技能方面的基本知识。我们认为，作为设计工作者，仅仅掌握最优化方法中的数学方法是不够的，必须知道如何将这些方法运用计算机来求解，得出计算结果。另一方面，有必要在学习优化方法以前补充一些有关的数学知识，以便为学习最优化方法作好准备。

根据上述的设想，我们将全书分为四个部分：第一部分是与优化方法有关的数学预备知识，编写在绪论及第一章内，包括多元函数的泰勒公式，凸函数及其性质，正定二次函数及其轭方向的基本概念，无约束函数极值的充要条件等。在学习这些内容以前，读者需要掌握线性代数的基本知识。第二部分是介绍一些常用的优化计算方法。我们尽可能地用一些浅显的几何概念及较简单的数学方法来说明，以期达到深入浅出，便于自学的目的。这一部分包括第二章一维搜索方法，第三、四章多变量无约束极值的常用算法，第五章线性规划解法，第六章多变量约束极值的算法，第七章多目标优化的算法等。有一些重要的算法，如整数规划，几何规则，动态规划等问题，容待以后补充。第三部分是介绍优化方法的实际运用情况。想找一种能够解决机械优化设计的普遍适用的方法是很困难的。我们通过介绍和分析机构、机械零件及机械加工等方面的典型例子来说明如何建立目标函数及约束条件的数学模型，然后进一步说明

如何用数学规划的方法来解决这些问题。如果读者能从这些具体的解题过程中得到一些启发，对解决他自己的设计问题能够有所帮助的话，将是我们所期望的。这一部分的第八、九章分别介绍了最优化方法在机构学及机械零件与部件设计中的应用，第十章介绍了最优化方法在机械制造工艺及企业管理方面的应用。在第九章还简略地介绍了最优化方法在机械及机械系统设计中的应用情况。

第四部分介绍常用最优化方法的计算机程序并对程序作简要的说明。这部分内容将作为本书的附录，单独编印成册。读者掌握了这些程序以后，便能着手解决具体的设计问题了。

本教材的绪论及第一、三、四、六、八、十各章，由陈道训编写，并担任本书的主编。第二、五章由王惠珍编写。第七章由傅祥志编写。第九章由余俊及李元科编写。

在编写的过程中，我们参考了国内外一些有关的论著，同时我们还征求了校内外一些同志的意见，得到了他们的支持和帮助，在此谨致谢意。

由于我们的理论水平和实践经验有限，本书中存在缺点和错误是在所难免，我们敬请同志们批评指正。

编著

1981年5月于华中工学院

目 录

绪　论

§1　优化设计的基本概念

一、实际技术问题及其数学模型

为具体说明优化设计有关基本概念，先举出如下几个简单的例子：

〔例1〕　现有一金属板，宽度 $b=24\ mm$，长度 $L=50\ mm$，如制成图 1 所示对称形槽，求斜边长 x 和倾角 α 为多大时，槽的容积最大？

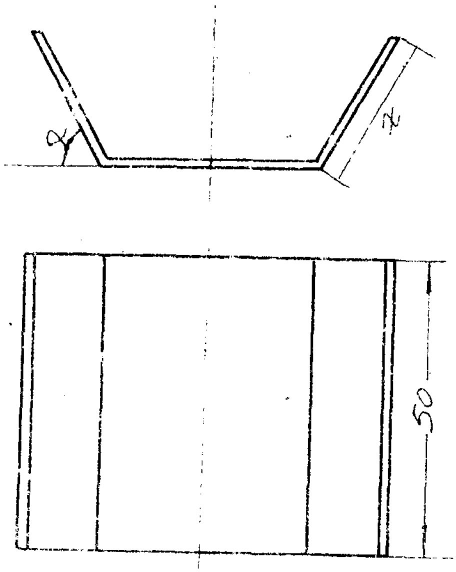


图 1

解：由于 b、l 一定，故图 1 所示的槽形，其截面积最大的槽，即是容积最大的槽。根据梯形面积的公式，可推导出槽的截面积 A 的计算公式。于是这一求解截面积 A 的极大化问题可表示为

$$\max A = \frac{1}{2}\left[(24-2x)+(24-2x+2x\cos x)\right]x\cdot\sin\alpha$$

这一优化设计问题是具有两个设计变量（即 x、α ）的无约束非线性规划问题。

〔例2〕 设计一个在负荷 P 作用下的圆柱形螺旋压缩弹簧，要求最大变形量 F 为 10 mm，压并高度 H_b 小于 50mm，弹簧内径 D_1 大于 16 mm，且重量最轻。

解：圆柱形螺旋压簧的重量 W 为

$$W = \pi D_2 n_1 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \gamma$$

式中：n 为压簧总圈数；γ 为弹簧材料的密度。

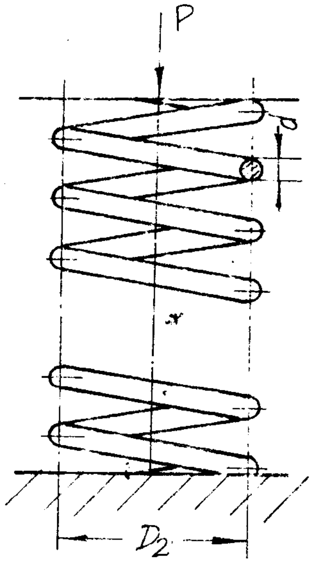


图2

设计应满足条件为：

最大变形量 $F = \dfrac{8PD_2^3 n}{Gd^4} = 10\ mm$

压并高 $H_b = n_1 d < 50mm$

压簧内径 $D_1 = D_2 - d > 16\ mm$

静强度条件 $\tau_n = \dfrac{8PD_2}{\pi d^3} \leqslant [\tau]$

式中：G 为弹簧材料的剪切弹性模量；n 为弹簧的工作圈数（有效圈数）；τ_n 为弹簧丝的剪切应力；$[\tau]$ 为许用剪切应力。

根据以上情况，整个问题的数学模型可简化表示为

$$\min \quad W=\frac{1}{4}\pi^2 D_2 d^2 \gamma n_1$$

满足于

$$\frac{8PD_2^3 n}{GD^4}=10$$

$$n_1 d<50$$

$$D_c-d>16$$

$$\frac{8PD_2}{\pi d^2}\le[\tau]$$

求设计变量 n，D_2，d。

这是一个有约束的非线性规划问题。

〔例3〕 设计一特殊需要的长卡尺（长度在1 m以上），采用如图0－3 a所示的异形方钢管。满足条件：$\frac{H}{B}=2.8\sim3.5$；$2.5\le\delta\le3$；$1\le\frac{B}{2\delta}\le5$。要求确定其断面尺寸，使自重引起的挠度 f 最小。

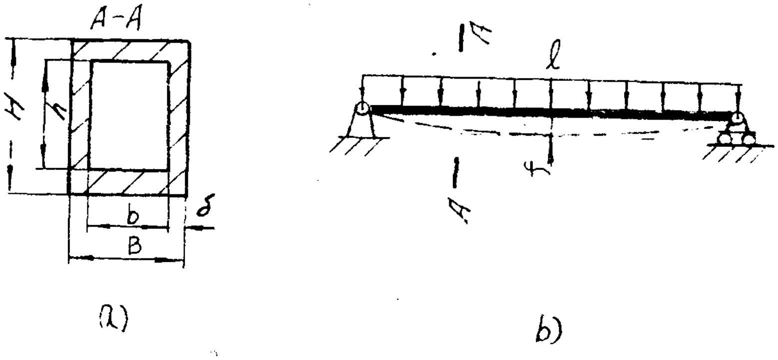


图 3

解：按简支梁计标，中点的最大挠度为

$$f=\frac{5gl^4}{384EJ}$$

式中：惯性矩 $J=\frac{BH^3-bh^3}{12}$

$$=\frac{1}{12}[BH^3-(B-2\delta)(H-2\delta)^3];$$

载荷集度 $q=S\gamma$;
断面积 $S=HB-(H-2\delta)(B-2\delta)$;
E 为弹性系数；γ 为材料密度。

这一最优化问题的数学模型可表示为

$$\min \quad f(H,\ B,\ \delta)$$

满足于 $2.5\leqslant\delta\leqslant 3$

$$2.8\leqslant\frac{H}{B}\leqslant 3.5$$

$$1\leqslant\frac{B}{2\delta}\leqslant 5$$

求设计变量 H, B, δ。

根据以上三例可以看出，所谓优化设计，就是在一定的约束条件（即限制条件）下，选择合适的设计变量，使某项设计目标达到最优值（极小或极大）。

优化设计的主要内容有两项；第一项是将实际技术问题抽象成为最优化的数学模型；第二项是选择最优化计标方法，使用电子计标机求解数学模型。

二、设计变量

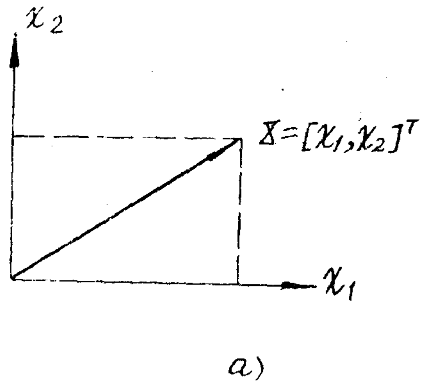
设计变量是设计时待定的参数。如果有n个设计变量，一般表示为 x_i（$i=1$, 2, ……, n），我们用X表示按一定次序排列，由n个实数构成的数组

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=[x_1,\ x_2,\ \dots\dots,\ x_n]^T \qquad (1)$$

并把数组看作是一个n维（列）向量。这就是说，x_i 是X的第i个分量。我们用 R^n 表示由n个设计变量为坐标轴来组成的欧氏空间（n维向量空间）。这样，向量X在设计空间中又叫做设计点，

而把 x_1，x_2，……，x_n 叫做点 X 的坐标。

例如：当 $n=2$ 时（图4a），二维向量 $X=[x_1, x_2]^T$ 表示平面坐标为 x_1 和 x_2 的一个点；当 $n=3$ 时（图4b），三维向量 $X=[x_1, x_2, x_3]^T$ 表示空间坐标为 x_1，x_2 和 x_3 的一个点。



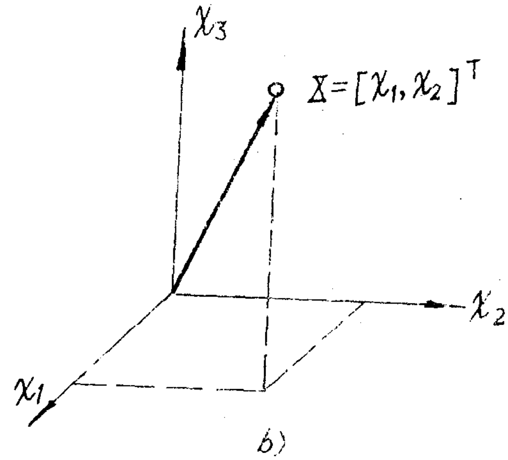


图 4

按照设计空间的概念，在设计空间的某一点代表一个方案，因为这一点将由各设计变量的值（n 维的坐标值）所确定。

在机械设计中，多数设计变量是连续量，但也有设计变量是离散量。例如齿轮齿数要取整数，模数要取标准值；板材和型钢的尺寸必须按一定的规格选取等。对于离散变量，目前一般是先作为这种设计变量是连续量，当取得最优值后，再取成整数或按标准选取一个靠近的数，也有采用整数规划来处理这类问题的。

设计自由度是指某项设计任务所取变量的多少。一般说，设计变量愈多，设计自由度就愈大，也比较容易达到最优设计目标；但目标函数的维数也就愈高，问题的求解会更困难。根据设计变量的多少，优化设计课题分为三类，即小型设计（变量2～10个），中型设计（变量10～50个），大型设计（变量50～200个）。

三、目标函数

目标函数是用来评价目标优劣的数学关系式。例如本节所列的三个实例中，分别表示的函数 $A(x, \alpha)$，$W(n, D_2, d)$，

$f(H, B, \delta)$均是目标函数。当然，目标函数是设计变量的函数，并且是标量函数。设计变量的个数，确定了目标函数的维数。

目标函数有单目标和多目标两类。本节的三个实例都是单目标函数。应当指出，实际的工程技术问题，多数是多目标问题。例如图5所示的港口起重机的四杆变幅机构，其优化设计的要求是确定l_1，l_2，l_3，l_4，l_5，x_0，y_0等七个设计变量，使机构在运动过程中（即在主动杆的位置角α取不同的值时），连杆上A点的落差Δy最小，水平移动速度的波动量Δv最小，驱动力矩的变化量ΔM最小（当A点悬挂的起吊重量一定时）。这是三个目标的优化设计问题。

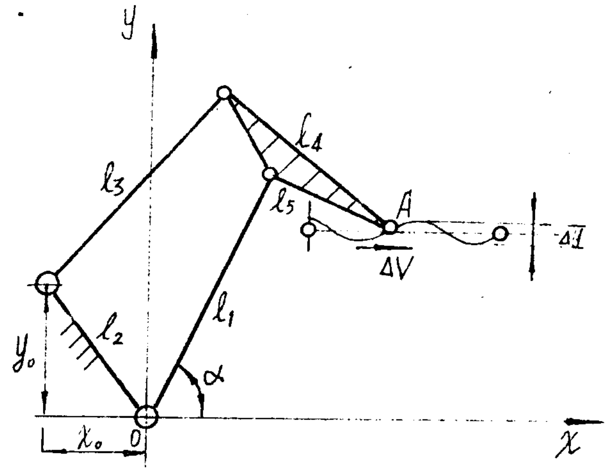


图 5

再例如，设计一齿轮变速箱，传递一定的功率，输出若干级数的转速，要求确定各齿轮的模数、齿数和齿宽，使各齿轮轴向的中心距的总和最小，也使重量最轻。这是两个目标的设计问题。还可举出其他的例子。

一般地说，根据实际问题的需要，考虑多个目标进行优化设计比只考虑一个目标函数能获得较好的设计结果。当然，多目标问题的计算比单目标要复杂些。多目标问题一般都是通过一定的方法处理成一个综合的单目标问题，或者处理成逐次求解的单目标序列。

四、约束条件

约束条件（约束方程）是对设计变量的取值给以某些限制的数学关系式。

约束条件可分为边界约束与性能约束两类。边界约束是考虑设计变量的变化范围，如例3中的约束条件(1)。性能约束是由某种性能设计要求推导出来的一种约束条件，如例2中的约束条件。

从另一方面来考虑，约束条件又可区分为等式约束与不等式约束。

等式约束可以是由外力求机械零件内力、或变形的恒等关系式。例2的约束条件(1)便是一个恒等约束条件。有一个等式约束条件，就有从最优化问题消除一个设计变量的机会，亦即降低最优化问题维数的一次机会。对于简单的等式约束，可将其参数式代入目标函数及不等式约束关系式中，从而达到上述降低最优化问题维数的目的。但对于复杂的等式约束，就不可能象上面那样做了。一般是把它分离出来，设计成子程序，根据需要随时调用。

不等式约束将设计变量的选择区域加以限制。如图6所示，每个不等式约束 $g_i(X) \geq 0$ 的极限情况 $g_i(X)=0$ 在设计空间是以一个几何面（在二维问题是直线或曲线）的形式出现，图中阴影线围成的区域即为可行区域（或称容许区域），在这个区域内的一切点均满足 $g_i(X) \geq 0$ $(i=1,2,3,4,5,6)$ 的条件。这也就是说，在可行区域内的一切方案，均为允许设计方案，所以其中的任一个设计点称为自由点。

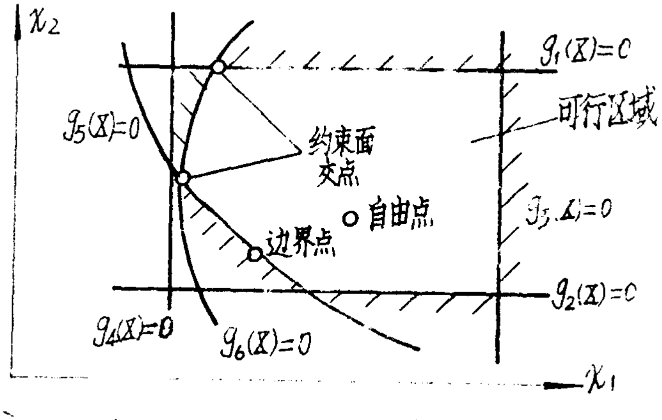


图 6

当自由点移至某一个约束面上时，这一点称为边界点，即为某项约束所允许的极限设计方案，这时把这个约束称为起作用的约束。约束面的交线或交点，系指某项设计方案同时有两个以上的起作用约束所

容许的极限设计方案。

不满足约束条件$g_i(X)\geq 0$的变量选择区，称为不可行区域，在这个区域上的一切点均为非允许的设计方案。

有些设计方法，其迭代过程在可行区域内进行，最终确定的优化点即优化设计方案，在此区域之内（或边界上）。也有这样的迭代方法，其迭代过程是在非可行区域进行，最后逼近边界。

§2 最优化方法概述

工程中的实际优化问题，大都是有约束条件的，故其数学模型可写为：

$$\begin{cases} \min f(X), & X\in R^n \\ \text{满足于} & g_i(X)\geq 0,\quad i=1,2,\cdots\cdots,p \\ & h_j(X)=0,\quad j=1,2,\cdots\cdots,k \end{cases}$$

因为等式约束$h(X)=0$等价于$h(X)\geq 0$和$h(x)\leq 0$，故等式约束也归併到不等式约束中去，于是数学模型可简化为

$$\begin{cases} \min\limits_{X\in D} f(X) \qquad X\in R^n \\ D=\{X\ g_i(X)\geq 0,\ i=1,2,\cdots\cdots,m\} \end{cases}$$

实际技术问题中的极大化问题，可以表示成$\max f(X)$，约束条件同上面的写法一样。但由于$\max f(X)$与$\min(-f(X))$有相同的极值点X^*（如图7所示），故求解目标函数的极大化问题也可转化为极小化问题。

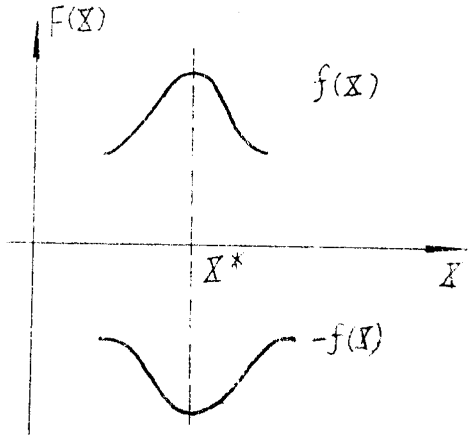


图 7

求解某一既定的目标函数，满足一定的约束条件下的最优解的数值（迭代）计算方法，称为最优化方法。迭代的最优化方法区别于古典的数学方法