

高考 数学题型 和方法

李义真 张致和 主编
西安交通大学出版社

Gaokao Shuxue Tixing he fangfa

教师益友•学生良师•考生指南

教师益友•学生良师•考生指南

教师益友•学生良师•考生指南

高考数学题型和方法

李义真 张致和 (主编)
战维华 杨战旗 吴志超
杨金丽 李生财

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书是高考数学复习用书，也是高中各年级学生和教师的一本很好的参考书。

本书的特点是：为减轻学生繁重的学习负担，对学生熟知的教材内容不再重复；对有助于学生理解概念和开阔思路、提高解题能力的问题进行深入研究并作出规律性的总结。无论是例题和练习题都经过精心挑选、努力做到题题有特点，每解有启发，不搞题海战术，不选偏难怪题。书后附有练习题的答案及提示。在附录中有反映1986-1988年三年的高考数学试题与高中数学教材内容内在联系的对照统计表6张，便于教师辅导和学生复习时了解命题的基本情况和应掌握的重点内容。

高考数学题型和方法

李义真、张致和 主编

责任编辑 陆薇、张明烈

*

西安交通大学出版社出版

（西安市咸宁路23号）

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32 印张 13.625 字数：290千字

1988年9月第1版 1989年1月第1次印刷

印数：1—25000

ISBN7-5605-0193-2/G·18 定价：3.95元

前 言

为了帮助高中学生系统而又有重点地复习、掌握好高中的数学内容，我们编写了这本《高考数学题型与方法》。

参加本书编写的是省、市部分重点中学的高中数学教师。他们把多年教学和指导毕业复习中积累的丰富经验和总结出的规律，都融会在本书的内容中。

《高考数学题型与方法》的特点是：以教学大纲为纲，以课本为根本，重视基础，精选例题，摆脱题海；着重题型分析，启迪思维，开拓思路；通过题型的研究，指出各类问题的解法；各章后面都附有一定数量的练习题和答案及提示；书后附录了近三年来高考数学试题与高中数学教材的内在联系统计表，供大家在教学和复习过程中分析参考。

本书第一章、第三章由杨战旗执笔；第四章、第五章和第六章由杨金丽执笔；第二章、第七章和第八章由吴志超和李生财执笔；第九章和第十章执笔分别由战维华和张致和执笔；

本书也可供自学青年使用。

不妥之处，欢迎批评指正。

编 者

1988.9

目 录

第一章 高中数学常见的题型与方法	(1)
一 客观型试题.....	(1)
二 一般题型及常用的数学方法.....	(15)
第二章 函数	(39)
一 正确应用集合的概念.....	(39)
二 关于函数概念的题目.....	(42)
三 关于函数定义域的题目.....	(49)
四 关于求函数值域的题目.....	(54)
五 关于函数的奇偶性、单调性问题.....	(59)
六 函数及其性质应用的题目.....	(65)
七 函数的图象及其应用.....	(72)
练习答案与提示.....	(78)
第三章 三角函数	(81)
一 三角函数的重要性质.....	(81)
二 三角函数的应用.....	(87)
三 三角中的证明题.....	(94)
练习答案与提示.....	(105)
第四章 数学归纳法	(109)
一 一般原理.....	(109)
二 应用数学归纳法的关键.....	(109)
三 由 $P(K) \rightarrow P(K+1)$ 的常用方法和技巧 (在证明等式或不等式中).....	(110)

四	数学归纳法在证明整除性上的应用·····	(125)
五	数学归纳法在证明数列性质中的应用·····	(126)
六	利用数学归纳法证明三角恒等式·····	(128)
七	归纳起点与归纳变形·····	(130)
八	倒推归纳法·····	(131)
第五章	不等式的证明方法及其应用·····	(135)
一	比较法·····	(135)
二	应用基本不等式(或绝对不等式)法·····	(136)
三	分析综合法·····	(141)
四	变量代换法·····	(143)
五	数学归纳法·····	(144)
六	判别式法·····	(145)
七	图象法·····	(146)
八	三角不等式的证明·····	(149)
	练习答案与提示·····	(152)
第六章	数列·····	(155)
一	等差数列·····	(155)
二	等比数列·····	(163)
三	递归数列及其它数列·····	(165)
	练习答案与提示·····	(189)
第七章	复数·····	(193)
一	正确应用复数的概念·····	(193)
二	复数的代数运算·····	(198)
三	复数的三角运算及其应用·····	(204)
四	复数的几何意义及其应用·····	(212)
	练习答案与提示·····	(223)

第八章 排列组合应用题的解法	(225)
一 掌握两种基本方法.....	(225)
二 特殊元素与特殊位置的排列.....	(230)
三 组合应用题.....	(234)
四 分组问题.....	(238)
五 排列组合中常见错误分析.....	(242)
练习答案与提示.....	(248)
第九章 直线与平面	(249)
一 平面的基本性质.....	(250)
二 直线与直线的位置关系——异面直线的夹角	(252)
三 异面直线的公垂线及异面直线间的距离.....	(255)
四 直线与平面、平面与平面位置关系的证明问题	(263)
五 二面角的大小的求法.....	(269)
六 与二面角有关的证明、计算问题.....	(275)
七 立体几何中的折叠及拼接问题.....	(291)
八 截面问题.....	(300)
练习答案与提示.....	(316)
第十章 解析几何的重要题型及其解法	(319)
一 解析几何中常用的解题方法与技巧.....	(319)
二 解析几何中的重要题型及解法.....	(343)
练习答案与提示.....	(411)
附录	(418)

第一章 高中数学常见的题型与方法

高中数学包括代数、三角、立体几何和解析几何四个分支，教学大纲上指出的高中阶段的知识点有 136 个，(其中代数 49 个，三角 19 个，立体几何 30 个，平面解析几何 38 个)，内容多，牵涉面广。

教师在教学中经常需要通过测验或考试来了解教学效果；高等学校也需要通过考试选拔人才、录取新生。从近几年看，数学考试题的题型大致有两大类(从对题目解答的评估分类)：

A. 客观型试题(灵活的小题目)，它包括有选择、填空、是非判断等；

B. 主观型试题(传统的大题目)，它包括解答、计算、作图、证明等。以下叫做一般题型。

解答这两类问题用到不少的数学思想和方法，本章围绕高中数学常见的题型与方法两个方面进行探讨。

一、客观型试题

目前在这类题型中经常出现的有选择题、填空题(包括只要求写出答案或解题结论的简答题)、是非判断题等，主要用来考查高中数学各分支中的基本概念。

它的特点是：(1) 题目小数量多，可以做到尽可能地扩

大考查知识点的覆盖面；(2) 构思巧妙，概念性强；(3) 答案简明固定，评分标准比较客观、统一、准确。

当然客观型试题也有不足之处，如能写出正确答案，但不一定能理解它的根据；它还不能考查大段的逻辑推理等等，尽管如此，当前客观型试题多为数学考试命题者所采用。全国普通高等学校招生统考数学(理工)试题中，客观型试题从1982年至1988年这七年中所占分值基本是递增的(1982年占5%，而到1988年就增加为54.2%)。因此只要我们将客观型题目的结构和解法掌握好，获取全卷的一半分数应该说是不困难的。

(一) 选择题

选择题有单向选择和多向选择之分，目前数学试题中常见的多为单向选择题，即在每道选择题中，正确结论有一个，并且只有一个。

1. 选择题的结构

选择题由指令性语言、题干、选择支三部分组成。

指令性语言通常总是写在题号的后面，全部选择题的前面，主要用于说明答题的基本要求(正确结论是否具有存在性、唯一性；答题方法；评分标准等)

题干是指明考查内容的句子、表格或句子加上插图(可以是完整的句子，也可以是不完整的句子)。

选择支是题干后面可供选择用的若干个结论，选择支中的错误结论，通常称为干扰支。近几年来高考数学试卷中采用的选择题都是只限于四选一的单向选择题。

2. 如何作选择题

作选择题的要领主要是：一看，二想，三判断。

一看是首先应看清题目的要求、条件、结论。

二想是结合题目所给条件进行联想。想题目所涉及到的概念，想题目条件与结论之间的联系，想完成题目应采用的方法。有时也需要进行一些计算绘图。

三判断是根据前面的看和想作出合理的断论，选出应选的正确结论。

作选择题大致有以下几种方法：

(1) 直接法

“直接法”就是从题目的已知条件出发，运用所学的有关知识，进行推理或计算、绘图等，得出相应的结论，作出正确的选择的一种方法。

A. 运用概念判断

例 若设 $f(x) (x \in \mathbb{R})$ 是以 4 为周期的奇函数，且有 $f(1)=1$ ，则 $f(15)$ 的值为：()

(A) 15; (B) -15; (C) 1; (D) -1.

解 $\because x \in \mathbb{R}, f(x)$ 为以 4 为周期的奇函数;

又 $\because f(1)=1$

$\therefore f(15)=f(-1+16)=f(-1)=-f(1)=-1.$

故选 (D).

B. 直接求解 (计算)

例 1 设 $f(x)=\frac{2x+1}{4x+3}, (x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq -\frac{3}{4})$ 则 $f^{-1}(2)$
= $(\quad)$

(A) $-\frac{2}{5}$; (B) $\frac{5}{11}$; (C) $\frac{2}{5}$; (D) $-\frac{5}{6}$.

解 由反函数的定义，我们不难发现，象 $f^{-1}(2)=(\quad)$,

实质上是求 $f(x)=2$ 时 x 的值。从而令 $\frac{2x+1}{4x+3}=2$, 立即解

得: $x=-\frac{5}{6}$, 故选(D)。

若用“代入法”对每个选择支进行检验, 看 x 取那个选择支之值时 $f(x)=2$, 这样的作法就比较复杂了。

若先求出函数 $f(x)=\frac{2x+1}{4x+3}$ 的反函数, 再去求 $f^{-1}(2)=?$ 计算完毕再进行对答, 那就更复杂了。

例 2 在北纬 45° 线上的 A, B 两点, 已知, A 点在东经 30° , B 点在东经 120° , 若地球半径为 R , 则 A, B 两地的距离是: ()

(A) R ; (B) $\frac{1}{2}\pi R$; (C) $\frac{1}{3}\pi R$; (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi R$ 。

解 根据题意绘图可知 O_1 为北纬 45° 纬线的圆心, O 为地心, 则 $\angle AO_1B=90^\circ$, 又 $O_1A=O_1B=\frac{\sqrt{2}}{2}R$, 则

$AB=R$, $\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形, $\therefore \angle AOB=\frac{\pi}{3}$ 。故过 A

B 两点的大圆的劣弧长为 $\frac{\pi}{3}$, 所以直接对答选(C)

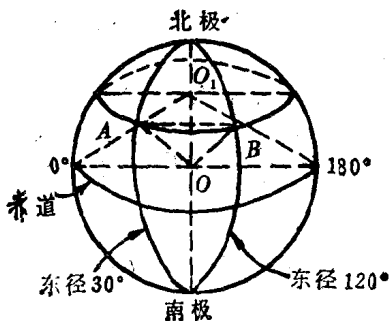


图 1-1

C. 绘图判断

利用数形结合，绘制出表示数学命题的直观图，使问题具体化、形象化、明朗化，然后再去判断就会化难为易，化繁为简，立见奇效。

例 1 已知 $A = \{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 = 1\}$

$$B = \left\{ (x, y) \mid \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{x-2} = -1 \right\}$$

$$C = \left\{ (\rho, \theta) \mid \rho = 2 \cos \theta, \theta \neq \frac{k\pi}{4}, K \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x = 1 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}, \theta \neq K\pi, K \in \mathbb{Z} \right\}$$

则成立的结论是：()

(A) $A=B$; (B) $B=D$; (C) $A=C$; (D) $B=C$ 。

解 绘图如下：

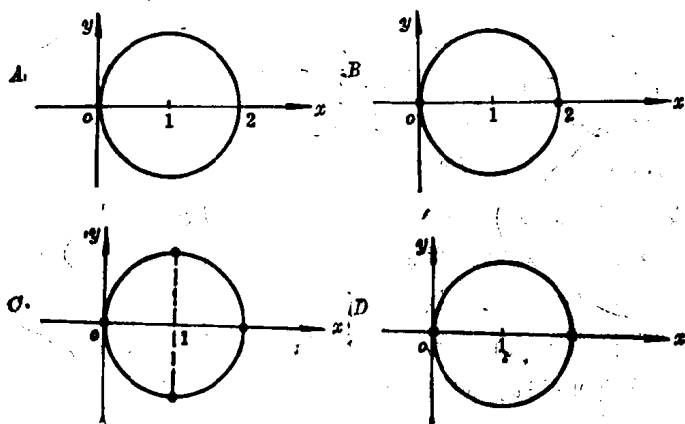


图 1-2

由对图形的观察，选(B)

例2 方程组
$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \frac{2}{\pi} x \end{cases}$$
 的解的个数为：()

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 大于3。

解 绘出函数 $y = \sin x$, $y = \frac{2}{\pi} x$ 在同一坐标系的图象

如下：

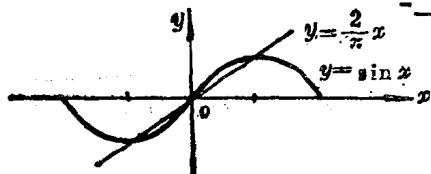


图 1-3

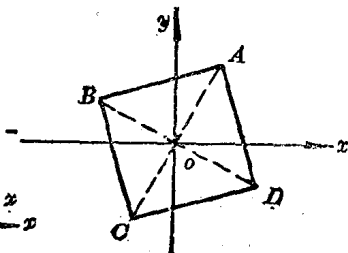


图 1-4

由对图象的观察，选(C)

例3 在复平面上，已知正方形 $ABCD$ 的三个顶点为：
 $A(1+2i)$; $B(-2+i)$; $C(-1-2i)$; 则 D ()

(A) $(1.5+i)$; (B) $(2-i)$; (C) $(1.5-i)$; (D) $(2+i)$ 。

解 依题意绘图

对图形进行观察，联想正方形的对称性，则立即可写出 B 的对称点 $D(2-i)$ ，故选(B)。

“直接法”适用于易于直接从题的条件入手，由正面对题目的结论进行选择的选择题。

(2) 淘汰法

对于单向(一元)选择题来说，是从 n 个选择支中淘汰

掉 $(n-1)$ 个,从而确定第 n 个选择支是正确的。淘汰法也叫“筛选法”。

淘汰法适用于不易从正面肯定正确答案,而易于从反面否定错误答案的选择题。

A. “互相”淘汰法

选择支之间,若存在彼此间的包含与被包含关系时,我们首先运用“互相”淘汰法进行筛选,将被包含的选择支淘汰掉,继续运用其它方法进行选择。

互相淘汰是在答案各选择支之间,利用逻辑推理方法进行的淘汰,与已知条件无关。因而“互相”淘汰法是最简单的一种淘汰方法。

例 两数集 $x=\{(2n+1)\pi, n\in Z\}$; $y=\{(4k\pm 1)\pi, k\in Z\}$ 之间的关系是: ()

(A) $x\subset y$; (B) $x\supset y$; (C) $x=y$; (D) $x\neq y$.

解 由于选择支(A)、(B)均包含于(D),则(A)、(B)首先被淘汰掉。

由绘图可知: $x=y$, 故选(C)

B. “特值”淘汰法

“特值”淘汰法,是当答案所给定的判断是“全判断”时,采用特值法去检查,只要对某一个特殊值不符合要求,即是对全判断的否定,从而该选择支被淘汰掉。

例 1 若 x, y 为实数,则 $f(x, y)=x^4y^2+x^2y^4-x^6-y^6$ 的值是: ()

(A) >0 ; (B) <0 ; (C) >0 或 <0 ; (D) ≤ 0 .

解法一 首先应用互相淘汰法淘汰掉(A)、(B),选取特值: $x=y=0$, 则得 $f(x, y)=0$, 所以又淘汰掉(C), 故选

(D)。

解法二 直接选取特值 $x=y=0$ ，得 $f(x,y)=0$ ，故选(D)。

例 2 若 $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$ ，则 $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$ 的值为：()

(A) $2x-2$ ；(B) 4；(C) -4；(D) $2-2x$ 。

解 $\because \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-3)^2} \geq 0$ ，故首先淘汰掉(C)；

令 $x=0$ ，则 $2x-2=-2 < 0$ ，进而淘汰掉(A)；

再令 $x=2$ ，由 $2-2x=-2 < 0$ ，淘汰掉(D)；

故选(B)。

例 3 若 $C < 0$ ，下列不等式成立的是：()

(A) $C > 2^C$ ；(B) $C > \left(\frac{1}{2}\right)^C$ ；(C) $2^C > \left(\frac{1}{2}\right)^C$ ；

(D) $2^C < \left(\frac{1}{2}\right)^C$ 。

解 设 $C=-1$ ，代入各选择支，从而淘汰掉(A)、(B)、(C)。故选(D)。

由以上三例不难看出特值淘汰法的使用关键在于特值的选取。一方面选取的特值应起到对全判断的否定作用；另一方面，特值又要选得简单，便于运算。一般选取极端值、特别值、简单值或中值。

C. “代入”淘汰法

代入淘汰法是将结论中各选择支一一代入所给的条件，将不适合者淘汰掉，适合者予以选择的作选择题的方法。

对判断方程，方程组或不等式的解的选择题，若直接求解比较麻烦时，或者比较困难时，宜用代入淘汰法。

例 1 方程 $\sqrt{7x-3} + \sqrt{x-1} = 2$ 的解是: ()

(A) $x=3$; (B) $x=\frac{3}{7}$; (C) $x=1$; (D) $x=0$.

解 对答案观察, 先代入(B)、(D), 则(B)、(D)被淘汰, 将(C)代入, 可得 $x=1$ 为原方程的解, 故选(C)。

例 2 满足等式 $1983 = 1982x - 1981y$ 的一组自然数是: ()

(A) $x=12785, y=12768$

(B) $x=35672, y=25726$

(C) $x=11888, y=11893$

(D) $x=1947, y=1945$

解 此题若将每个选择支均代入检查, 则计算量相当大, 我们加以分析, 立即可以得到巧妙的选择方法。

原等式左边为一奇数, 而等式右边不论 x 取任何自然数而 $1982x$ 永远为偶数。因而要使右边也为奇数, $1981y$ 必为奇数, 所以 y 一定为奇数。而选择支(A)、(B)中的 y 值是偶数, 从而淘汰掉(A)、(B)。再代入(D), 右边末位数字为 9, 与左边末位数不同。所以, (D)也被淘汰掉, 故选(C)。

D. “放宽”淘汰法

选择支要作为题目的正确答案, 具备条件应是充要的。若条件连必要性都不满足, 自然不能作为正确答案, 从而应淘汰掉。用正确答案的必要性去淘汰选择支, 实际上是“放宽”条件后的淘汰。

上述的特值淘汰法, 代入淘汰法, 实际上都是放宽淘汰法, 而后者更具有一般性。

例 1 函数 $y = \sin^2 x - 3 \sin x - 2$ 的最大值为: ()。

(A) $-\frac{11}{2}$; (B) $\frac{3}{4}$; (C) 2; (D) ∞

解 使正确的选择支成立的必要条件为: $-5 \leq y \leq 2$. 从而将(A)、(B)、(D)淘汰掉, 故选(C).

例 2 过点 $M(-2, 2)$ 作圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的切线, 其切线方程为, ()

(A) $y = x + 2$; (B) $x + y = 0$; (C) $x = 4$ 或 $y = 4$;
(D) $x = -2$ 或 $y = 2$.

解 点 M 在该圆外, 故过 M 点可作圆的两条切线, 从而可将(A)、(B)淘汰掉. 又切线过点 $M(-2, 2)$, 而选择支(C)中至少有 $x = 4$ 不过点 M , 从而(C)也被淘汰掉.

故选(D).

由以上两例可以看出, 用“放宽”淘汰法时, 关键在将正确答案的必要条件进行分离选取, 一方面选取的必要条件要求能够揭示非正确答案的虚假性, 另一方面, 所选用的必要条件在使用上要简单方便.

淘汰法是在选择支中正确答案唯一的前提下讲的, 若正确答案不唯一时, 此法仍为作选择题的有效方法. 只是在使用时应对其他未被淘汰的答案进行检验或论证.

(3) 变换法

变换法是通过改变命题的形式, 找出原命题的等价命题, 从而获得正确选择支的一种方法.

例 在空间四点中, 无三点共线是无四点共面的: ()

(A) 充分而不必要条件; (B) 必要而不充分条件;
(C) 充要条件; (D) 既不充分又不必要条件.

解 原命题的这种叙述方法如接触较少, 选择时常不适