三角學

朱鳳豪

余源慶　余源熙

編著

龍 門 聯 合 書 局 出 版

三　角　學

余源慶　朱鳳豪　余源熙

編著

龍門聯合書局出版

三　角　學

朱鳳豪　余源慶　余源熙編著

龍門聯合書局出版
上海南京東路61號101室
中國圖書發行公司總經售
啓智印刷廠印刷
上海自忠路239弄28號

1949年8月初版
1951年5月十四版
印數24,501-28,500冊

定價 ¥ 7,000

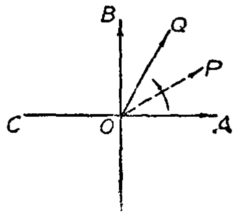
上海市書刊出版業營業許可證出029號

目　　錄

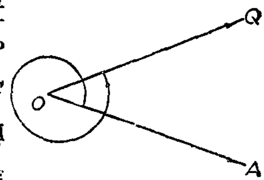
第　一　章

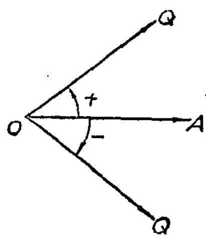
角之意義及量法

1. 角之意義　關於角及直角等之意義在初等幾何學中均已講過．惟幾何學中所論之角祇限於小於 360° 者，在三角學中須加以推廣．玆定角之意義如下：



設直線 OA 之位置一定，今有另一直線 OP，當初與 OA 相合，今繞 O 點，反鐘針方向旋轉至一定位置 OQ，則成角 AOQ. OA 為初線，OP 為母線，OQ 為終線．角之量視 OP 旋轉之多少程度而定．設 OP 旋轉至與 OA 垂直之位置 OB 時，則角 AOB 為一直角．設 OP 旋轉至與 OA 之方向相反之位置 OC 時，則角 AOC 為兩直角．設 OP 旋轉一全周至與 OA 之位置相合時，則此角為一周角（即四直角）．如 OP 經過一周後再繼續旋轉時，則 $\angle AOQ$ 之量可大於四直角而為任何之值．





習慣上，母線反鐘針方向旋轉所生之角取正值（如 $\angle AOQ$），母線循鐘針方向旋轉所生之角取負值（如 $\angle AOQ'$）．負角

註：通常所稱之角除特別聲明者外俱指小於 360° 之正角而言．

之絕對値亦可大於四直角而為任何之值.

2. 角之量法 量角之單位有三種制度,今分述於下:

I. 六十分制 分一直角為90等分,每等分為一度. 分一度為60等分,每等分為一分. 分一分為60等分,每等分為一秒. 如一角之量為98度14分32秒,記為$98°14'32''$.

$$1\text{直角}=90°$$
$$1°=60'$$
$$1'=60''$$

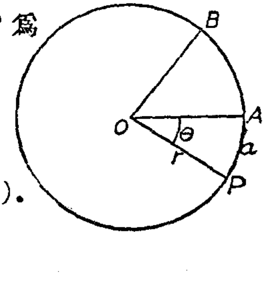
六十分制為通常所用量角之法,故亦稱實用制.

II. 百分制 分一直角為100等分,每等分為一個百分度. 分一個百分度為100等分,每等分為一個百分分. 分一個百分分為100等分,每等分為一個百分秒. 如一角之量為71百分度86百分分49百分秒,記為$71^g86^{\backprime}49^{\backprime\backprime}$.

$$1\text{直角}=100^g$$
$$1^g=100^{\backprime}$$
$$1^{\backprime}=100^{\backprime\backprime}$$

百分制創自法國,實際上用者甚少.

III. 弧度制 如圖O為圓心,$\angle AOB$為圓心角,$\widehat{AB}$為此角所截之弧. 設$\widehat{AB}$之長等於此圓之半徑,則$\angle AOB$稱為一弧度. 今設$\angle AOP$為θ弧度,$\widehat{AP}$之長為a,又半徑$OA=r$,



則 $$\frac{\theta}{\angle AOB}=\frac{\widehat{AP}}{\widehat{AB}}$$

(同圓中圓心角之比等於其所對弧之比).

但 $\angle AOB=1$, $\widehat{AB}=r$,

$$\therefore \qquad \theta=\frac{a}{r} \qquad \text{(公式一)}$$

一周角所對之弧爲全圓周，卽 $2\pi r$。

$$\text{故} \qquad 1\text{周角}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi \text{ 弧度。}$$

弧度制在高等數學中用之，故亦稱理論制。

如用直角爲標準，三種制度之關係可以下式表明之：

$$90°=100^g=\frac{\pi}{2}\text{弧度}$$

$$\text{卽} \qquad 180°=200^g=\pi \text{ 弧度。} \qquad (1)$$

設有一角，其量以六十分制表之爲 D（度），百分制表之爲 G（百分度），弧度制表之爲 R（弧度），則

$$D° = G^g = R \text{ 弧度} \qquad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)}, \qquad \frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi} \qquad \text{(公式二)}$$

上之公式爲三種制度之關係式，卽爲 D, R, G 互求之根據。從公式二，推得

$$D=\frac{180}{\pi}\cdot R, \qquad R=\frac{\pi}{180}\cdot D$$

此爲由弧度制化六十分制及由六十分制化弧度制之簡式。

註：1. $\pi=3.1415926535\cdots\cdots$ 爲一無盡之不循環小數，通常只用四位小數 3.1416，或用分數 $\frac{22}{7}$ (3.14) 及 $\frac{355}{113}$ (3.14159) 代之。

2. 習慣上以 π 表弧度時，π 之值常不代入。如 2π（弧度）不寫 6.2832（弧度）。

3. 用 π 弧度爲記角之單位時，弧度兩字通常可略去不寫，如一角爲 $\frac{\pi}{4}$ 弧度，通常卽簡寫爲 $\frac{\pi}{4}$。

幾個重要角之 D 與 R 相當值列表於下：

D	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
R	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

又關於 D, G, R 之重要相當值爲：

D	1°	0.9°	$\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ.2957795=(57^\circ17'44''.8)$
G	$1^g.111111$	1^g	$63^g.661972$
R	$\frac{\pi}{180}=0.017453$ 弧度	0.015708 弧度	1 弧度

例一： 變 $\frac{\pi}{12}$ 弧度及 1.76 弧度爲六十分制（設 $\pi=\frac{22}{7}$）.

【解】 從 $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$， 得 $D=\frac{180}{\pi}\cdot R$,

1. 令 $R=\frac{\pi}{12}$， $\therefore\ D=\frac{180}{\pi}\times\frac{\pi}{12}=15^\circ$.

2. 令 $R=1.76$， $\therefore\ D=\frac{180}{\pi}\times 1.76$

$$=\frac{7\times180}{22}\times1.76$$

$$=100^\circ.8$$

$$=100^\circ48'.$$

例二： -945° 及 $64^\circ11'33''$ 相當幾弧度？(設 $\pi=3.1416$)

【解】 從 $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$， 得 $R=\frac{\pi}{180}\cdot D$

1. 令 $D=-945$. $\therefore\ R=\frac{\pi}{180}(-945)=-\frac{21}{4}\pi$.

2. 令 $D=64°11'33''=64+\frac{11}{60}+\frac{33}{3600}$度$=64°.1925$,

$$\therefore\ R=\frac{\pi}{180}\times 64.1925=\frac{3.1416}{180}\times 64.1925$$
$=1.1204$ 弧度.

例三: $50^g50'50''$ 相當幾度?又幾弧度?

【解】 $50^g50'50''=50+\frac{50}{100}+\frac{50}{10000}$百分度

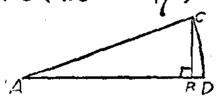
$=50.505$ 百分度.

從 $\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}$,得

1. $D=\frac{180}{200}G=\frac{9}{10}\times 50.505=45°.4545=45°27'16''.2$,

2. $R=\frac{\pi}{200}G=\frac{\pi}{200}\times 50.505=0.7933$ 弧度.

例四: 從平地一點 A 測得遠處一人所張之角爲 $1°30'$, 設此人身高五尺五寸, 問此人離 A 處若干尺 (設 $\pi=\frac{22}{7}$)?



【解】 設 BC 表遠處一人之身高, 今以 A 爲中心, AC 爲半徑作弧交 AB 之延長線於 D, 因 $\angle CAD=1°30'$ 之量甚小, 故 D, B 幾可合一. 所以 BC 可視作以 A 爲中心之一弧,從公式一得

$$\theta=\frac{BC}{AB}$$

$$\therefore\quad AB=\frac{BC}{\theta}\qquad (\theta\text{ 之單位爲弧度})$$

令 $BC=5$ 尺 5 寸$=5.5$ 尺,

$$\theta=1^\circ 30'=\frac{3}{2}\text{度}=\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{180}\text{弧度}$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{22}{180\times 7}\text{弧度}=\frac{11}{420}\text{弧度}.$$

$\therefore\quad AB=5.5\div\frac{11}{420}=210$

答　此人離 A 處約 210 尺。

習　題　一

1. 填滿下表:

D	210°	225°		270°		315°	
R	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$		$\frac{1}{6}\pi$

2. 下列諸角試以六十分制表之。

(a) $32^{g}32^{\backprime}32^{\backprime\backprime}$　　(b) $1^{g}2^{\backprime}3^{\backprime\backprime}$

(c) 10π 弧度　　(d) -1.5 弧度

3. 下列諸角，試以弧度制表之。

(a) 1000°　　(b) $128^\circ 35'42''$

(c) $32^{g}32^{\backprime}32^{\backprime\backprime}$　　(d) $1^{g}2^{\backprime}3^{\backprime\backprime}$

4. 一螺旋槳每秒旋轉 20 次，則轉過 10° 需時若干？又轉過 10 弧度需時若干？

5. 二角之和為 100°，差為 100^{g}，問此二角以弧度制量之各為若干？

6. 四邊形之一角為 120°，一角為 120^{g}，一角為 $\frac{\pi}{120}$。問第四角為若干度？

7. 已知三角形之三角成等差級數，且最小角之度數與最大角弧度數之比為 $60:\pi$，求各角之度數。

提示：設三角之度數爲 $x-y$, x, $x+y$.

8. 求正五邊形及正十二邊形每一內角之弧度數.

提示：正 n 邊形每一內角 $=\frac{n-2}{n}180°$.

9. 兩正多邊形邊數之比爲 5:4，每一內角之差爲 $\frac{\pi}{20}$，求兩多邊形之邊數.

10. 時鐘長短兩針在 12 點 1 刻時所成之角爲幾度？合幾弧度？

提示：長針走 15 分格時，短針走 $\frac{5}{4}$ 分格.

11. 一圓之半徑爲 1 尺，則此圓中長 1 尺之弦所對之弧長若干？

12. 一扇形之半徑爲 9 寸，中心角爲 35°，求扇形之周長. $(\pi=\frac{22}{7})$.

13. 一扇形周圍之長等於同半徑半圓周之長，則此扇形之角爲幾度幾分幾秒？

提示：設此扇形之中心角爲 θ 弧度，又其半徑爲 r.

14. 一鐵道之轉彎處恰成一圓弧，半徑爲 1 里，一列車以每時 40 里之速度行駛其上，問在 10 秒間轉過幾度？

15. 塔高 110 尺，塔對於觀察者之眼所張之角爲 9′，求觀察者與塔之近似距離.

16. 離樹 420 尺處一點測得樹所張之角爲 45′，求樹高. $(\pi=\frac{22}{7})$.

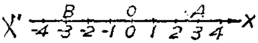
17. 太陽離地球 92000000 哩，其直徑對於地球所張之角爲 32′，試證太陽之直徑爲 856700 哩.

18. 月亮離地球 240000 哩，其直徑爲 2165 哩，試證月亮直徑對於地球所張之角爲 31′.

第　二　章

垂　直　座　標　系

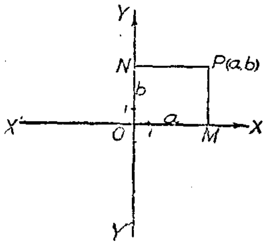
3. 有向量線　一直線 $X'X$，其方向爲從左至右如下圖箭頭所表示者。在線上取一點 O，稱爲原點，再取一線段爲長之單位．規定從O起向右量者爲正，向左量者爲負。



此 $X'X$ 線稱爲有向量線．在此線上，所有正或負之實數俱可用點表現出之．如上圖中，A 點表 $(+3)$，B 點表 (-3)，O 點表 (0)。

B，A 兩點間之距離爲 6．BA 之方向與 $X'X$ 之方向相同，故記 $BA=+6$（簡記爲 6），又 AB 之方向與 $X'X$ 之方向相反，則記 $AB=-6$。

4. 垂直座標　設兩有向量線 $X'X$，$Y'Y$ 互相直交，又設其交點 O 爲兩線之共同原點，如右圖所表示者，稱爲**垂直座標系**．O 點稱爲此座標系之原點．$X'X$ 稱爲橫軸（或 X 軸），其方向爲自左至右，$Y'Y$ 稱爲縱軸（或 Y 軸），其方向爲自下至上。



$X'X$，$Y'Y$ 分一平面爲四部分，稱爲四個象限．在 XOY 內者爲第一象限，在 $X'OY$ 內者爲第二象限，在 $X'OY'$ 內者

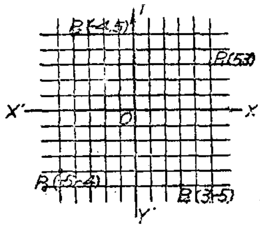
註：1．垂直座標又稱直角坐標．

2．兩軸上所取之單位，通常用相等之長度．

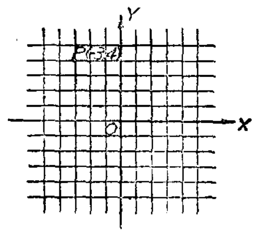
3．圖上 X'，Y' 兩字，可以略去不寫．

爲第三象限,在 XOY' 內者爲第四象限.

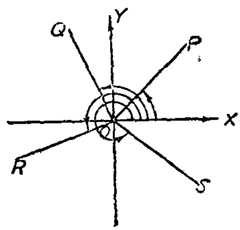
在此座標系中設有一點 P,作 MP 平行於 Y 軸,又作 NP 平行於 X 軸. P 與 Y 軸之距離,在 X 軸上量之,今爲 OM. 向右量者爲正,向左量者爲負. P 與 X 軸之距離在 Y 軸上量之,今爲 ON. 向上量者爲正,向下量者爲負. 設 OM 之長爲 x, ON 之長爲 y,則記此點爲 $P(x,y)$. x 稱爲 P 點之橫標, y 稱爲 P 點之縱標, (x, y) 稱爲 P 點之座標. 在此座標系中之任意一點可以代表一對實數.



一點座標之符號在第一象限內者爲(+,+),第二象限內者爲(−,+),第三象限內者爲(−,−),第四象限內者爲(+,−). 如右圖中之 $P_1(5,3)$, $P_2(-4,5)$, $P_3(-5,-4)$, $P_4(3,-5)$ 諸點.



一點之位置可如下之法決定之:設求點(−3,4),先在 X 軸上向左第三格處(因 $x=-3$)作一線平行於 Y 軸,再在 Y 軸上向上第四格處(因 $y=+4$)作一線平行於 X 軸. 兩線之交點 P,卽爲所求之點. 故任意一對實數,作爲橫,縱兩座標時,在此種座標系中,可以決定一點.



5. 象限角 設一角之頂在原點,初線合於 OX,終線在第一象限內者,如 $\angle XOP$,稱爲第一象限角,終線在第二象限內者,如 $\angle XOQ$,稱爲第二象限

角，終線在第三象限內者，如 $\angle XOR$，稱爲第三象限角，終線在第四象限內者，如 $\angle XOS$，稱爲第四象限角．若母線旋轉之方向爲循鐘針方向時，亦視終線在何象限內，而稱爲此象限之角．如負角 XOS，爲第四象限角等等．

在第一象限內一角之大小爲從 $0°$ 至 $90°$，或 $360°$ 至 $450°$，……或 $-270°$ 至 $-360°$，……等等．

茲將各象限內角之大小，列表於下以便查考：

象 限	I	II	III	IV
角之大小	0°——90°	90°——180°	180°——270°	270°——360°
	360°——450°	450°——540°	540°——630°	630°——720°
	………………	………………	………………	………………
	-270°——-360°	-180°——-270°	-90°——-180°	0°——-90°
	………………	………………	………………	………………

習 題 二

1. 作出下列各點：$(2,1)$；$(2,-1)$；$(-2,1)$；$(-2,-1)$．

2. 作出下列各點：$(-1,0)$；$(\sqrt{2},-\sqrt{3})$；$(\pi,\frac{1}{2}\pi)$．

提示： 作圖時無理數可取近似值，如 $\sqrt{2}=1.4$ $\pi=3.1$ 等等．

3. 設 P 之座標爲 (x,y)，OP 之長爲 r，試證 $r^2=x^2+y^2$．

4. 在第二題中求各點與原點之距離．

5. 試定下列諸角終線所在象限：—

(a) $1000°$　　(b) $-400°$　　(c) $\frac{4}{3}\pi$

(d) $\frac{14}{3}\pi$　　(e) $-\frac{3}{4}\pi$　　(f) $-1234°$