



应用电磁学

陈抗生 编著

浙江大学出版社

应用电磁学

陈抗生 编著

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用电磁学/陈抗生编著. 杭州:浙江大学出版社,
2001.1
ISBN 7-308-02584-5

I. 应... II. 陈... III. 电磁学 IV. 0441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 53556 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail: zupress @ mail. hz. zj. cn)
(网址: <http://www.zjupress.com>)

责任编辑 沈国明
排 版 浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷 浙江上虞印刷厂印刷
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 23.5
字 数 572 千字
版 印 次 2001 年 1 月第 1 版 2003 年 1 月第 2 次印刷
印 数 1001~3000
书 号 ISBN 7-308-02584-5/O·253
定 价 35.00 元

前 言

世间运动最快的物质是电磁波,当今社会绝大部分信息都是借助电磁波这个载体传播的.从1876年麦克斯韦方程提出,1886~1889年赫兹证实电磁波存在以来,电磁理论已发展得相当完美,并得到极为广泛的应用.作为大学本科教学用的电磁理论教材有非常多的版本,也积累了丰富的教学经验.但是在电磁理论与技术的教学中仍然遇到一些问题.一是电磁理论教学中需要较多的数学知识,学生感到电磁理论难学,产生畏难情绪;二是在注重电磁理论基础性的同时,如何将电磁理论基础知识与应用结合还没有很好解决,不易激发学生学习的兴趣.针对这些问题,国内外都在对电磁理论与技术的教学进行改革.作者所在的浙江大学信息与电子工程学系在1999年教学计划修订中提出对电磁场理论、微波技术以及电磁波实验三门课进行综合改革,使这几门课更能反映学科前沿发展,同时与应用紧密结合.主要举措是:编一本好的教材;开发一个专用教学软件,用多媒体技术形象地演示教学难点;理论教学,尤其是实验教学与专题研究结合,使学生能独立地进行微波、光波应用系统的设计、研究.本书就是为电磁理论与技术教学改革而编写的一本教材.

由于教材对象为电子信息类专业本科生,也包括其他相关工程技术人员,因此教材不仅要涵盖原电磁场理论、微波技术两门课的教学内容,还要拓展到光导波技术.教学时数要减少,教材内容要精选,与网络通信有关的电磁理论与技术,无论深度还是广度都要有所加强.在注重电磁理论基础的同时,要注意与应用结合,尤其是与网络、通信应用的结合,还要适合自学.

根据以上对教材编写的要求,本书在内容体系上与迄今多数电磁场理论教材先静态场后交变场不同,先交变场,后静态场,并以交变场为重点.静态场作为交变场在角频率 $\omega=0$ (或波数 $k=0$)的特例来处理.交变场的教学围绕天线与波导展开,以适应网络与通信的应用对电磁学课程的要求.

描述电磁理论的基本数学工具——复矢量以及梯度、散度、旋度等基本概念与运算规则,在本书第1章专门介绍.从作者的教学实践看,这样做对于引导学生直接进入麦克斯韦方程研究交变场十分必要.作者将研究电磁场涉及的其他数学知识分散到有关章节.

本书编写过程中力求将基本理论、基本概念与电磁学的实际应用结合,每章都有较多的应用例子,以激发学生学习电磁理论的兴趣.

已如前述,本书第1章复矢量及矢量运算对于第2章直接从麦克斯韦方程研究交变场是十分必要的.第3章由麦克斯韦方程得出平面波解及其基本特性.第4章研究平面波在介质交界面的反射.第5至第8章讲波导与谐振器.第5章证明就波的纵向传播而言各类波导都可用传输线等效.传输线基本理论与圆图则是第6章的主题.第7章讨论微波到光波各类常用的波导.第8章讨论谐振器.第9章讨论天线.第10章进一步讨论电磁波的有关问题.最后除13章外的其余5章讨论静态场,它们是作为交变场的特例(当 $\omega=0$ 或 $k=0$)引入

的. 第 11、12 章为静电场、电场力和能, 第 14 章为直流电流, 第 15、16 章为静磁场、磁性材料和磁路. 第 13 章列举电磁场若干解题方法. 有关微波与光波应用系统以及构成这些系统的微波、光导波器件在微波与光导波实验课程中有所阐述, 本书很少涉及.

鉴于普通物理学对电磁学, 尤其对静电场与静磁场已有一定介绍, 本书作为大学本科生教材, 如果周学时为 4.5, 重点讲第 1 到第 10 章及第 13 章, 关于静电场与静磁场的教学可安排学生自学. 本书对这几章的编写已注意到适合自学这一特点. 如果周学时为 3, 还有微波与光导波技术方面后继课, 可以选第 1、2、3、4、9、10、13 章共七章作为重点讲授. 第 5、6、7、8 章不讲, 静电场、静磁场也可安排自学.

由于对电磁理论与技术教学的改革我们还缺乏经验, 加之编者水平有限, 本书不妥之处在所难免, 欢迎使用者指正.

本教材编写主要参考 Liang Chi Shen 和 Jin Au Kong 的《Applied electromagnetism》以及作者编写的另一本教材《微波与光导波技术教程》. 作者在 80 年代初曾到纽约理工学院进修, 得到彭松村教授的指导. 本教材关于波导结构传输线模型的重要概念主要源于彭松村教授的研究成果. 在此向彭松村教授致谢. 本教材编写过程中得到周文教授、王湖莊教授、黄恭宽教授, 钱乙君、谢银芳、李文扬、刘兴华诸位副教授以及郑史烈博士等的帮助指导, 多位研究生的成果被引用, 在此一并致谢.

陈抗生

2001 年 1 月于浙江大学

目 录

1 复矢量及矢量运算	(1)
1.1 时谐实变标量的复数表示	(1)
1.2 时谐实变矢量的复矢量表示.....	(4)
1.3 时间平均值	(6)
1.4 矢量运算基本规则	(7)
1.5 梯度、旋度、散度的物理意义	(11)
习题一	(15)
2 麦克斯韦方程	(16)
2.1 麦克斯韦方程	(16)
2.2 本构方程.....	(19)
2.3 时谐场的麦克斯韦方程.....	(21)
2.4 洛仑兹力	(23)
2.5 坡印廷定理	(24)
习题二	(25)
3 均匀平面波	(26)
3.1 电磁波源	(26)
3.2 自由空间平面波	(28)
3.3 极化	(33)
3.4 有耗介质中的平面波	(37)
习题三	(42)
4 波的反射与透射	(43)
4.1 边界条件	(43)
4.2 介质交界面的反射和透射	(46)
4.3 介质-导体交界面的反射	(58)
习题四	(62)
5 电磁波按 TE、TM 模的分解以及波导结构的传输线模型	(65)
5.1 电磁波按 TE 及 TM 模的分解及其沿波导传播的传输线模型	(65)

5.2	均匀介质中电磁波传播的传输线模型	(71)
	习题五	(75)
6	传输线基本理论与圆图	(76)
6.1	平行双导线传输线	(76)
6.2	同轴线传输线	(81)
6.3	平行板波导与微带线	(83)
6.4	色散与群速	(87)
6.5	传输线特征量沿传输线的变换	(89)
6.6	传输功率与传输效率	(97)
6.7	传输线圆图	(99)
6.8	传输线圆图应用举例	(104)
6.9	阻抗匹配及阻抗匹配器	(106)
	习题六	(109)
7	波 导	(112)
7.1	概述	(112)
7.2	矩形波导	(115)
7.3	圆波导	(126)
7.4	平板介质光波导	(135)
7.5	光纤	(143)
	习题七	(160)
8	谐振器	(162)
8.1	结构特点及其等效电路	(162)
8.2	谐振器的特征参数	(165)
8.3	空腔谐振器	(168)
8.4	微带谐振器	(173)
8.5	介质谐振器	(175)
8.6	开放式谐振器	(176)
8.7	谐振器与传输线的耦合	(179)
	习题八	(184)
9	天 线	(187)
9.1	天线增益和波束宽度的概念	(187)
9.2	标量和矢量位函数及其解	(188)
9.3	无限小天线的场	(191)
9.4	线天线	(198)
9.5	列阵天线	(204)

9.6	口径天线	(217)
9.7	雷达方程	(223)
	习题九	(225)
10	波动专题	(227)
10.1	瑞利散射	(227)
10.2	傅里叶光学和全息	(231)
10.3	高斯光束	(235)
10.4	多普勒效应	(238)
10.5	各向异性介质中的平面波	(243)
	习题十	(248)
11	静电场	(250)
11.1	静电位	(250)
11.2	静电场	(254)
11.3	高斯定理及其应用	(258)
11.4	从电场的线积分计算电位	(264)
	习题十一	(270)
12	电场力和能	(272)
12.1	电场力	(272)
12.2	功和能	(281)
12.3	电容	(290)
	习题十二	(299)
13	电磁场解题方法	(301)
13.1	在一定边值条件下拉普拉斯方程、泊松方程解法举例	(301)
13.2	唯一性定理与镜像法	(304)
13.3	分离变量法解拉普拉斯方程	(307)
13.4	有限差分法	(310)
	习题十三	(314)
14	直流电流	(317)
14.1	欧姆定律	(317)
14.2	直流电流和静电场的类比	(320)
	习题十四.....	(324)
15	静磁场	(326)
15.1	静磁场.....	(326)

15.2	磁力和转矩	(335)
15.3	磁场储能与电感	(344)
	习题十五	(348)
16	磁性材料和磁路	(350)
16.1	磁性材料	(350)
16.2	磁路	(360)
	习题十六	(364)
附录		
1	坐标与算符 ∇	(366)
2	矢量运算恒等关系	(367)
	主要参考文献	(368)

1 复矢量及矢量运算

本课程研究电磁运动的基本规律及其应用. 描述电磁运动的物理量主要是电场和磁场, 它们都是矢量, 既有大小, 又有方向. 不随时间变化的静电场又可表示为电位的负梯度. 电位是标量, 只有大小, 没有方向.

本课程主要研究随时间变化的电磁场, 即交变电磁场. 对于交变场的研究则侧重于随时间作简谐变化的场(简称时谐场). 用时谐场代替一般时变场进行分析, 并不失去分析的普遍性. 因为人们熟知的其他非简谐变化的场可用傅里叶(Fourier)级数(周期 T 有限)或傅里叶积分(周期 T 无穷)来表达.

对时谐场的分析引进复矢量概念后, 可使四维场问题简化为三维场问题, 有利于电磁问题的求解. 所以本章首先重点讨论复矢量.

其次, 本章主要讨论对矢量场的散度、旋度运算, 也附带讨论标量场的梯度运算. 因为在交变电磁场中, 随时间变化的电场产生磁场, 磁场的旋度与电场的的时间变化率成比例. 同样, 随时间变化的磁场产生电场, 电场的旋度也与磁场的的时间变化率成比例. 所以梯度、散度、旋度的运算对电磁理论的掌握十分重要.

1.1 时谐实变标量的复数表示

1.1.1 复数

复数 c 可表示为

$$c = a + jb, \quad (1.1)$$

式中 a, b 分别表示为复数的实部和虚部, j 的定义是 $j^2 = -1$. 在复平面上, c 可用箭头 OA 表示, 见图 1-1.

复数 c 除了用实部 a 和虚部 b 表示外, 也可用模 $|c|$ 和相角 φ 表示:

$$c = |c|e^{j\varphi} = |c|\cos\varphi + j|c|\sin\varphi \quad (1.2)$$

与 $c = a + jb$ 比较, 实部 a 、虚部 b 与模 $|c|$ 、相角 φ 有如下关系:

$$|c|\cos\varphi = a,$$

$$|c|\sin\varphi = b.$$

解上述方程得到

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (1.3)$$

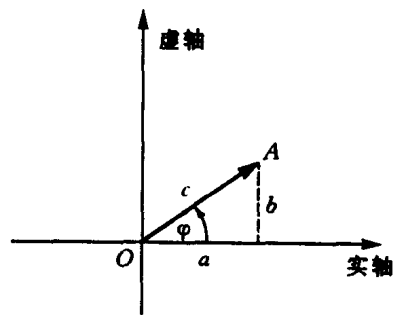


图 1-1 复数的图解

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a}. \quad (1.4)$$

对复数的加减运算,用复数的实部、虚部表示比较方便.而对复数的乘、除及开方等运算,用复数的模和相角表示比较方便.

例 1.1 求 $Z=1+j2$ 或 $Z=2.236e^{j1.107}$ 的平方根.

解
$$\sqrt{Z} = \sqrt{2.236e^{j1.107}} = 1.495e^{j0.554}.$$

注意复数 $1+j2$ 也可表示成

$$1+j2 = 2.236e^{j(1.107 + 2n\pi)},$$

n 是任意整数. 如果 $n = 0$, 得到上面的解. 如果 $n = 1$, 则可得

$$\sqrt{Z} = 1.495e^{j(0.554 + \pi)}.$$

这是 \sqrt{Z} 的第二个解, 而且 \sqrt{Z} 也只有两个解. 事实上, 如果 $Z^m = c$, m 是正整数, 则 Z 有 m 个解.

1.1.2 时谐实变标量的复数表示

对时间作简谐变化的实变标量 $V(t)$ 可表示成

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.5)$$

式中 V_0 表示振幅, ω 是角频率, φ 是相角. $\omega = 2\pi f$, f 是频率. 图 1-2 表示 $V(t)$ 与 t 的简谐变化关系.

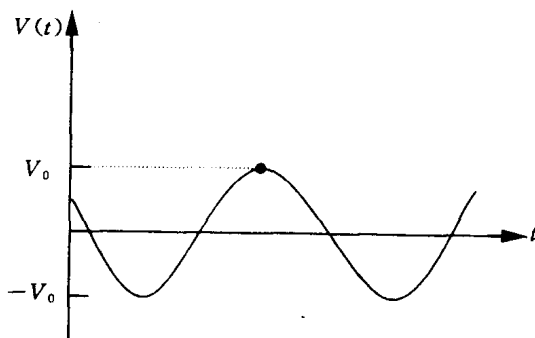


图 1-2 时谐函数 $V(t)$

$V(t)$ 也可写成

$$V(t) = \operatorname{Re}\{V e^{j\omega t}\}, \quad (1.6)$$

式中 $\operatorname{Re}\{\}$ 表示对 $\{\}$ 中的复量取实部运算, $V = V_0 e^{j\varphi}$ 为一复数, 用模 V_0 和相角 φ 表示, 即复数的相位复量表示. 为简化书写, 符号 $\operatorname{Re}\{(\) e^{j\omega t}\}$ 常略去, 用复数 V 等效于时谐标量 $V(t)$. 按此约定的规则, 如果

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

则有如下的等效关系:

$$U(t) \leftrightarrow U = U_0 e^{j\varphi},$$

且很容易证明

$$V(t) + U(t) \leftrightarrow V + U, \quad (1.7)$$

以及

$$\frac{d}{dt}V(t) \leftrightarrow j\omega V, \quad (1.8)$$

$$\int V(t)dt \leftrightarrow \frac{V}{j\omega}. \quad (1.9)$$

因为

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\omega_0 V_0 \sin(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\{j\omega V_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}\},$$

$$\int V(t)dt = \frac{V_0 \sin(\omega t + \varphi)}{\omega} = \operatorname{Re}\left\{\frac{V_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}}{j\omega}\right\},$$

对交变场,上式积分中的常数可不予考虑,所以时谐实变标量用模和相角表示时,对时间的微分与积分运算简化为乘与除的代数运算.这种简化问题的分析方法我们在电路原理课程中已学过,见后面例 1.7.

例 1.2 假定 $V(t) = 100\cos(120\pi t + 60^\circ)$ (V), $V(t)$ 的复数表示形式是什么?

解 $V = 100e^{j\pi/3} = 50 + j86.6$ (V).

例 1.3 沿导体的电流分布可表示为 z 的函数 $I(z)$:

$$I(z) = j21.2\cos kz \quad (\text{A}),$$

频率为 100 MHz, 则 $I(z, t)$ 可表示为什么形式?

解 $I(z, t) = \operatorname{Re}\{I(z)e^{j\omega t}\}$
 $= \operatorname{Re}\{j21.2\cos kz e^{j\omega t}\}$
 $= -21.2\cos kz \sin\omega t,$

式中 $\omega = 2\pi \times 10^8$.

例 1.4 $V(t) = \cos(120\pi t + \pi/3) + \sin 120\pi t$, $V(t)$ 的复数表示形式是什么?

解 $\cos(120\pi t + \pi/3)$ 的复数表示形式是 $V_1 = e^{j\pi/3}$.

同样, $\sin 120\pi t = \cos(120\pi t - \pi/2)$ 的复数表示式是 $V_2 = e^{-j\pi/2}$.

因此, $V(t)$ 的复数表示形式是

$$V(t) = V_1 + V_2 = e^{j\pi/3} + e^{-j\pi/2} = 0.5 - j0.134.$$

例 1.5 $V(t) = \cos 120\pi t + \cos 240\pi t$ 的复数表示形式是什么?

解 因为 $V(t)$ 是两个不同频率时谐标量的和, 所以 $V(t)$ 的复数表示形式不存在.

例 1.6 $V(t) = \cos(\omega t + \pi/3) \sin\omega t$ 的复数表示形式存在吗?

解 $\cos(\omega t + \pi/3)$ 的复数表示是 $e^{j\pi/3}$, $\sin\omega t$ 的复数表示是 $e^{-j\pi/2}$, 而 $\cos(\omega t + \pi/3)\sin\omega t$ 是两时谐标量的乘积. 对于乘积量, 没有相乘的复数与之对应. 请注意:

$$V(t) = \cos(\omega t + \pi/3) \sin\omega t = \frac{1}{2} \left[\sin(2\omega t + \pi/3) - \sin \frac{\pi}{3} \right],$$

所以信号 $V(t)$ 可分解为两个不同频率信号之和, 一个信号频率为 2ω , 另一个为直流信号, $\omega = 0$.

例 1.7 随时间作简谐变化的电压 $V(t)$ 作用于图 1-3 所示的 LCR 回路, L, C, R 分别为回路的电感、电容和电阻, 求电路中的电流 $I(t)$.

解 该电路满足微分方程

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{\int I(t)dt}{C} = V(t). \quad (1.10)$$

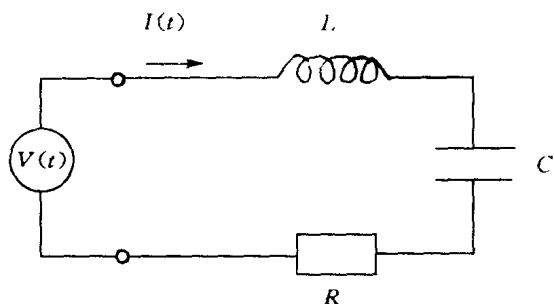


图 1-3 LCR 回路

当简谐变化的电压 $V(t)$ 、电流 $I(t)$ 用复数表示时, 即

$$V(t) \leftrightarrow V_0 e^{j\omega t} = V,$$

$$I(t) \leftrightarrow I_0 e^{j\omega t} = I,$$

$$\frac{dI(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega I_0 e^{j\omega t} = j\omega I,$$

$$\int I(t) dt \leftrightarrow \frac{I_0 e^{j\omega t}}{j\omega} = \frac{I}{j\omega},$$

微分方程(1.10)可简化为代数方程

$$j\omega LI + RI + \frac{I}{j\omega C} = V,$$

所以

$$I = \frac{V}{Z}, \quad (1.11)$$

式中

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}, \quad (1.12)$$

而

$$I(t) = \operatorname{Re}\{Ie^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{V_0 e^{j\omega t} e^{j\omega t}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}\right\}. \quad (1.13)$$

1.2 时谐实变矢量的复矢量表示

前面我们讨论了时谐实变标量的复数表示, 接下去我们将这一概念推广到时谐实变矢量. 因为时谐实变矢量的三个分量都是时谐实变标量, 而时谐实变标量可用复数表示.

设时谐实变矢量 $\mathbf{V}(t)$ 表示为

$$\mathbf{V}(t) = x_0 V_x \cos(\omega t + \varphi_x) + y_0 V_y \cos(\omega t + \varphi_y) + z_0 V_z \cos(\omega t + \varphi_z).$$

因为矢量 $\mathbf{V}(t)$ 的每一个分量都可用复数表示:

$$V_x \cos(\omega t + \varphi_x) = \operatorname{Re}\{V_x e^{j\varphi_x} e^{j\omega t}\},$$

$$V_y \cos(\omega t + \varphi_y) = \operatorname{Re}\{V_y e^{j\varphi_y} e^{j\omega t}\},$$

$$V_z \cos(\omega t + \varphi_z) = \operatorname{Re}\{V_z e^{j\varphi_z} e^{j\omega t}\},$$

所以矢量 $\mathbf{V}(t)$ 可表示成

$$\begin{aligned} V(t) &= \operatorname{Re}\{(x_0 V_x e^{j\omega t} + y_0 V_y e^{j\omega t} + z_0 V_z e^{j\omega t})e^{j\omega t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{V e^{j\omega t}\}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

式中

$$V = x_0 V_x e^{j\omega t} + y_0 V_y e^{j\omega t} + z_0 V_z e^{j\omega t}. \quad (1.15)$$

式(1.14)与式(1.6)类似. 式(1.6)表示, 一个时谐实变标量 $V(t)$ 与一个复数 $V = V_0 e^{j\omega t}$ 对应, 即 $V(t) \leftrightarrow V_0 e^{j\omega t} = V$. 所以式(1.14)表示, 一个时谐实变矢量 $V(t)$ 将与一个矢量 V 对应, 即

$$V(t) \leftrightarrow V = x_0 V_x e^{j\omega t} + y_0 V_y e^{j\omega t} + z_0 V_z e^{j\omega t}.$$

因为 V 的三个分量 $V_x e^{j\omega t}$ 、 $V_y e^{j\omega t}$ 、 $V_z e^{j\omega t}$ 都是复数, 所以式(1.15)表示的 V 叫做复矢量.

要记住的是, 虽然时谐实变矢量 $V(t)$ 是时间 t 的函数, 但与其对应的复矢量 V 不是时间 t 的函数. 复矢量 V 乘 $e^{j\omega t}$ 再取实部就是时谐实变矢量 $V(t)$.

例 1.8 已知复矢量 $c = jx_0 + (1+j)y_0 + (3-j4)z_0$, 求与之对应的时谐矢量 $c(t)$.

解 将复矢量 c 的每一个分量(它们是复数)用模和相角形式表示, 得到

$$c = x_0 e^{j\pi/2} + y_0 \sqrt{2} e^{j\pi/4} + z_0 5 e^{-j0.93},$$

所以

$$\begin{aligned} c(t) &= \operatorname{Re}\{c e^{j\omega t}\} \\ &= x_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + y_0 \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + z_0 5 \cos(\omega t - 0.93). \end{aligned}$$

例 1.9 假定复矢量 $A = x_0 + jy_0$, 求时谐矢量 $A(t)$ 端点的运动轨迹.

解 因为 $A(t) = x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t$, 所以当 $t=0$, $A(t=0) = x_0$, 指向正 x , 大小为 1. 当 $t = \frac{T}{4}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 为振荡周期, $A\left(t = \frac{T}{4}\right) = -y_0$, 指向负 y , 大小也为 1. 很容易看出, 随着时间推移, 矢量 $A(t)$ 端点绕 z 轴沿单位圆顺时针旋转, 如图 1-4 所示.

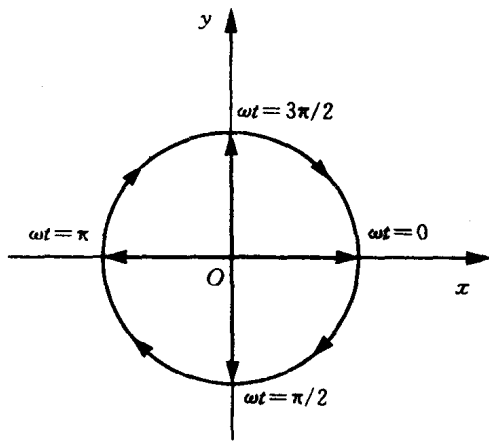


图 1-4 旋转矢量

例 1.10 设 $A = x_0 + jy_0$, $B = j(x_0 + jy_0)$, 证明: $A \times B = 0$, 但 $A(t) \times B(t) \neq 0$.

证明

$$A \times B = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & j & 0 \\ j & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

因为

$$A(t) = x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t,$$

$$\mathbf{B}(t) = -x_0 \sin \omega t - y_0 \cos \omega t.$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) &= z_0 [-\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t] \\ &= -z_0 \neq 0. \end{aligned}$$

复矢量 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$, 表示 $\mathbf{A} // \mathbf{B}$, 但与复矢量 $\mathbf{A}、\mathbf{B}$ 等效的 $\mathbf{A}(t)、\mathbf{B}(t)$ 并不是在所有时间都是平行的.

1.3 时间平均值

时谐变量(不管是时谐标量, 还是时谐矢量), 其平均值总是等于零:

$$\begin{aligned} \langle V(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T V_0 \cos(\omega t + \varphi) dt = 0, \\ \langle \mathbf{V}(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T [x_0 V_x \cos(\omega t + \varphi_x) + y_0 V_y \cos(\omega t + \varphi_y) + z_0 V_z \cos(\omega t + \varphi_z)] dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

式中 $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ 表示简谐变化的周期. 但是两个时谐变量的乘积的平均值并不总是为零. 例如

$$\begin{aligned} \langle V^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T V_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T V_0^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi) \right] dt \\ &= \frac{V_0^2}{2}, \end{aligned}$$

并不等于零.

考虑复矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_r + j\mathbf{A}_i, \mathbf{B} = \mathbf{B}_r + j\mathbf{B}_i$. $\mathbf{A}_r、\mathbf{B}_r$ 为复矢量的实部, $\mathbf{A}_i、\mathbf{B}_i$ 为复矢量的虚部. 与复矢量 $\mathbf{A}、\mathbf{B}$ 对应的时谐矢量 $\mathbf{A}(t)、\mathbf{B}(t)$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \operatorname{Re} \{ \mathbf{A} e^{j\omega t} \} = \mathbf{A}_r \cos \omega t - \mathbf{A}_i \sin \omega t, \\ \mathbf{B}(t) &= \operatorname{Re} \{ \mathbf{B} e^{j\omega t} \} = \mathbf{B}_r \cos \omega t - \mathbf{B}_i \sin \omega t. \end{aligned}$$

$\mathbf{A}(t)$ 与 $\mathbf{B}(t)$ 的叉积为

$$\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) = \mathbf{A}_r \times \mathbf{B}_r \cos^2 \omega t + \mathbf{A}_i \times \mathbf{B}_i \sin^2 \omega t - \frac{1}{2} (\mathbf{A}_r \times \mathbf{B}_i + \mathbf{A}_i \times \mathbf{B}_r) \sin 2\omega t,$$

所以 $\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)$ 的平均值是

$$\langle \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_r \times \mathbf{B}_r + \mathbf{A}_i \times \mathbf{B}_i).$$

如果我们取复矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的复共轭 \mathbf{B}^* 的叉积, 得到

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B}^* = \mathbf{A}_r \times \mathbf{B}_r + \mathbf{A}_i \times \mathbf{B}_i + j(\mathbf{A}_i \times \mathbf{B}_r - \mathbf{A}_r \times \mathbf{B}_i),$$

因此 $\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)$ 的时间平均值又可表示为

$$\langle \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{A} \times \mathbf{B}^* \}. \quad (1.16)$$

式(1.16)表示, 时谐实变矢量 $\mathbf{A}(t)$ 与 $\mathbf{B}(t)$ 的叉积的时间平均值等于其相应复矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的复共轭 \mathbf{B}^* 的叉积的实部的一半.

1.4 矢量运算基本规则

在直角坐标系中, 矢量 A 可用一有向箭头 OA 表示, 如图 1-5a 所示, OA 的长度表示矢量 A 的大小 $|A|$, 而箭头所指方向表示矢量 A 的方向.

三维坐标系有三个基本矢量. 在直角坐标系中, 这三个基本矢量是 x_0, y_0, z_0 , 叫做单位矢量. 单位矢量的大小等于 1, 它们是无量纲的量, 只表示矢量的方向. x_0, y_0, z_0 的方向定义为:

x_0 定义为坐标 x 增加方向的单位矢量;

y_0 定义为坐标 y 增加方向的单位矢量;

z_0 定义为坐标 z 增加方向的单位矢量.

这些单位矢量的图解示于图 1-5b.

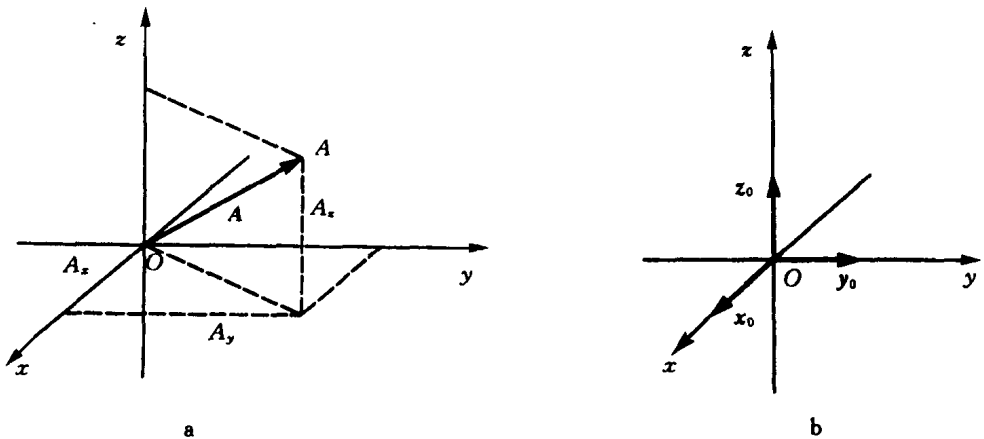


图 1-5 直角坐标系

a. 矢量 A ; b. 直角坐标系中单位矢量

矢量 A 可用单位矢量的线性组合表示:

$$A = A_x x_0 + A_y y_0 + A_z z_0, \quad (1.17)$$

这里 A_x, A_y, A_z 分别为箭头 OA 在坐标轴 x, y, z 上的投影. A_x, A_y, A_z 可以为正、负或零.

矢量 A 的大小定义为

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (1.18)$$

如果 A_x, A_y, A_z 都为零, 我们称该矢量为零矢量, 记为 O .

1.4.1 矢量的加、减

设矢量

$$A = A_x x_0 + A_y y_0 + A_z z_0, \quad B = B_x x_0 + B_y y_0 + B_z z_0,$$

则

$$A + B = (A_x + B_x) x_0 + (A_y + B_y) y_0 + (A_z + B_z) z_0, \quad (1.19)$$

$$A - B = (A_x - B_x) x_0 + (A_y - B_y) y_0 + (A_z - B_z) z_0. \quad (1.20)$$

两矢量加、减的图解示于图 1-6a 和 b.

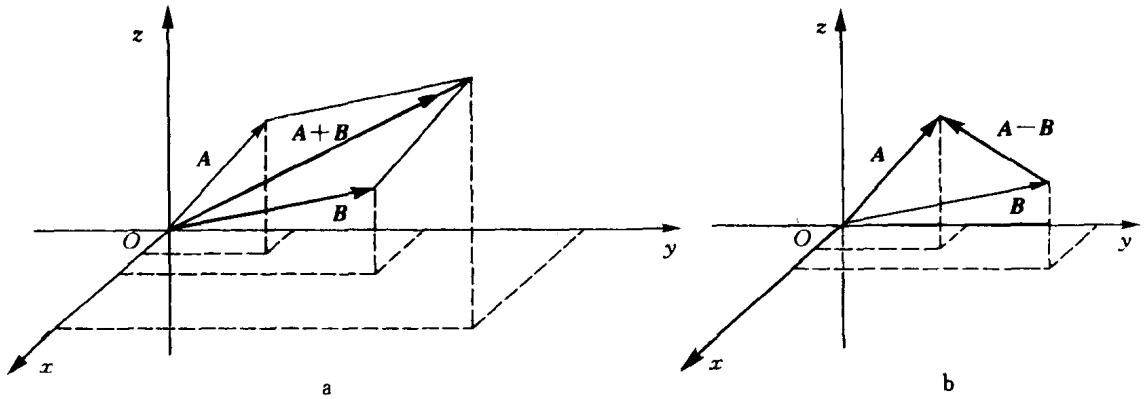


图 1-6 矢量的加与减

a. 两矢量相加 $A+B$; b. 两矢量相减 $A-B$

1.4.2 矢量的点积和叉积(标量积和矢量积)

矢量 A 和 B 的点积定义为

$$A \cdot B = |A| |B| \cos\theta, \quad (1.21)$$

θ 的定义见图 1-7, 为矢量 A 与 B 之间的夹角. 所以点积是一个标量, 这就是标量积名称的由来. 根据点积的定义, $A \cdot B = B \cdot A$.

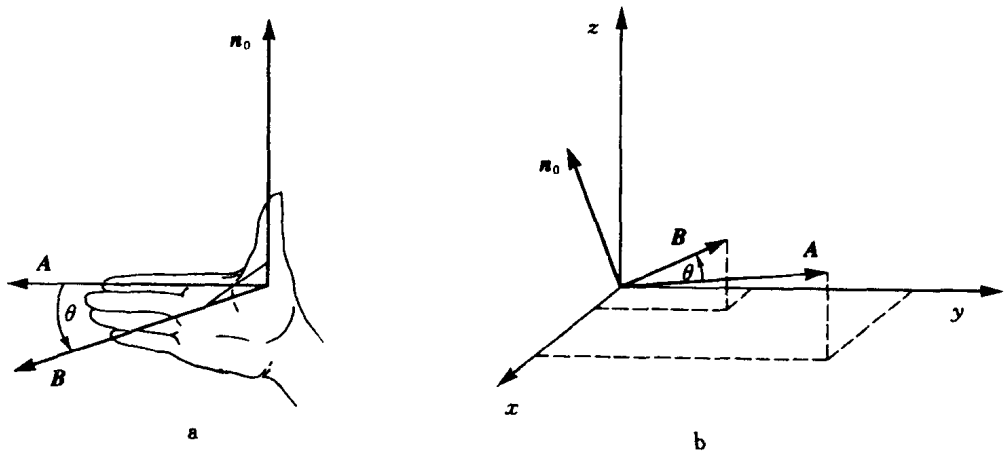


图 1-7 两矢量的积

a. 右手螺旋关系; b. $A \times B$ 是平行于 n_0 的矢量

A 跟 B 叉积是一个矢量, 故又叫矢量积, 其定义为

$$A \times B = n_0 |A| \cdot |B| \sin\theta, \quad (1.22)$$

n_0 是垂直于由矢量 A, B 构成的平面的单位矢量, 且 A, B, n_0 构成右手螺旋关系, 见图 1-7a. 所以根据叉积的定义, $A \times B = -B \times A$.

对于直角坐标系中单位矢量, 根据矢量点积、叉积的定义, 有如下关系:

$$x_0 \cdot x_0 = y_0 \cdot y_0 = z_0 \cdot z_0 = 1, \quad (1.23)$$

$$x_0 \cdot y_0 = y_0 \cdot z_0 = z_0 \cdot x_0 = 0, \quad (1.24)$$

$$x_0 \times y_0 = z_0, \quad y_0 \times z_0 = x_0, \quad z_0 \times x_0 = y_0, \quad (1.25)$$