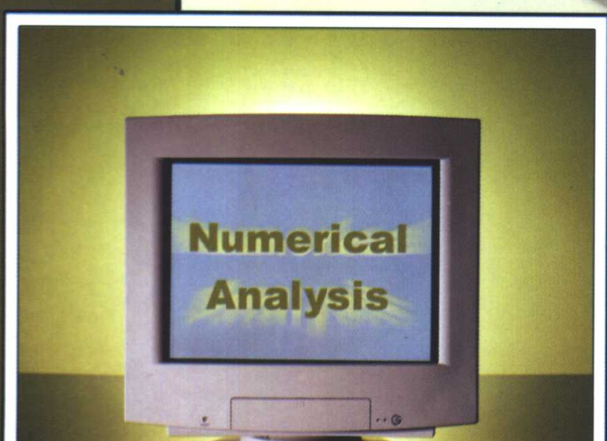
研究生系列教材

数值分析



宋国乡
冯有前
王世儒
甘小冰
编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

研究生系列教材

数 值 分 析

宋国乡　冯有前
王世儒　甘小冰　编著

西安电子科技大学出版社
2002

内容简介

本书为研究生教材。此书是在经过10多年教学实践使用过的内部讲义《数值分析》的基础上修编而成的。

本书在第1章绪论中首先介绍了本书的宗旨和观点。为了自成体系，在第2章至第4章介绍了泛函分析的基础知识，主要是三大空间(距离空间、赋范线性空间和内积空间)的基本理论，特别是与数值分析关系比较密切的投影定理。在第5、6章及附录中运用泛函分析的观点和方法讨论了一些重要的数值分析方法，对各种不同的数值分析方法给出了共同的泛函背景和统一的框架。第7至第10章为通常计算方法中的内容，如数值积分、数值微分，线性方程组的直接解法，线性非线性方程组的迭代解法，矩阵的特征值与特征向量的计算等。

本书可作为理工科院校应用数学、通信、计算机、物理等专业的研究生教材，也可供从事科学计算的科研工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数值分析/宋国乡等编著.

—西安：西安电子科技大学出版社，2002.8

研究生系列教材

ISBN 7-5606-1144-3

Ⅰ.数… Ⅱ.宋… Ⅲ.计算方法—研究生—教材 Ⅳ.0241

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第041462号

责任编辑 夏大平

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话 (029)8227828　　　　邮　　编 710071

http://www.xduph.com　　　　E-mail:xdupfxb@pub.xaonline.com

经　　销 新华书店

印　　刷 西安市第三印刷厂

版　　次 2002年8月第1版　2002年8月第1次印刷

开　　本 787毫米×1092毫米　1/16　印张 12.75

字　　数 318千字

印　　数 1～4000册

定　　价 16.00元

ISBN 7-5606-1144-3/O·0056(课)

XDUP　1415001-1

前　　言

经过10多年的教学实践和试用，我们把《数值分析》这本讲义作为工科硕士教材正式出版。

这本教材的主要特点是将泛函分析与数值分析方法融合在一起，对一些不同的数值分析方法给出了共同的泛函背景与统一的框架，如投影定理与各种数值逼近和近似计算；不动点定理与各种迭代法等，使工科研究生初步建立起一般性距离、范数、内积等泛函分析的概念和观点，以提高和加深对数值分析方法的认识和理解。

本书在第一章绪论中首先介绍了本书的宗旨和观点。为了自成体系，在第2章至第4章介绍了泛函分析的基础知识，主要是三大空间(距离空间、赋范线性空间和内积空间)的基本理论，特别是与数值分析关系比较密切的投影定理。在第5、6章及附录中运用泛函分析的观点和方法讨论了一些重要的数值分析方法，对各种不同的数值分析方法给出了共同的泛函背景和统一的框架。第7至第10章为通常计算方法中的内容，如数值积分、数值微分，线性方程组的直接解法，线性非线性方程组的迭代解法，矩阵的特征值与特征向量的计算等。

在本教材出版过程中，承蒙校领导、研究生院和出版社同志的关心和支持；承蒙数学系李广民教授精心审阅全稿，提出了很多宝贵意见；承蒙王卫卫、宋宜美同志细心校对，在此一并表示衷心的感谢。

由于水平有限和出版时间匆促，书中遗漏和不妥之处，敬请读者批评指正。

此书的出版得到了西安电子科技大学研究生教材建设基金的资助。

作者 2002年5月
于西安电子科技大学

目　录

第 1 章 绪 论

1.1 泛函分析与数值分析

数学家们认为，由于两件事情使数值分析发生了革命性的变化，这便是电子计算机的出现和泛函数分析在数值分析领域中的应用。前者是计算工具，后者是理论基础。

电子计算机作为数值分析的计算工具，其作用不言而喻。

泛函分析可以说是一门现代数学。虽然它起源于 19 世纪，但正式作为一门学科，还是 20 世纪的产物，而数值分析却是数学中一个比较古老的分支，但泛函分析确实已成为近代数值分析发展的理论基础。其所以如此，是由于泛函分析吸取了各个数学分支中最基本的精华，具有高度的抽象性、系统性和普遍性，因此它的观点、方法和规律可以广泛地应用于各个学科。近代科学的发展趋势是各种学科的互相渗透、互相交叉，“你中有我，我中有你”，界线模糊，边缘面宽。泛函分析作为一门高度抽象的数学理论，为各种学科提供了一般的数学规律和共同的框架，已成为各个学科的重要工具。对数值分析而言，它们的关系更为密切，数值分析中的很多方法，甚至是经典的方法都可用现代泛函分析的语言来叙述和推证。例如迭代法与不动点定理，最佳逼近与正交投影，有限元与变分原理等，从而使问题的讨论变得既直观又简洁。

下面我们简要讨论泛函分析的几个要点。

(1) 在集合的基础上，把具有一定性质的元素的集合定义为空间。根据不同的性质定义出不同的空间。在应用科学中常用到的元素如实数、复数、向量、矩阵、函数、多项式等，用得最多的空间是线性空间和内积空间。考虑到内容的相互联系和系统性，本书简单介绍了三大空间(即距离空间、赋范线性空间和内积空间)的定义和基本性质。

(2) 由空间到空间的映射称为算子，在应用科学中常用的算子有微分算子、积分算子、求范数、各种线性变换等。

(3) 在算子概念的基础上，特别把像集为数域的算子称为泛函。如求范数、定积分算子等都是泛函。数学分析中的函数也是泛函的特例，它把数映射为数。

习惯上，把赋范线性空间到赋范线性空间的映射称为算子。把赋范线性空间到数空间的映射称为泛函。把数空间到数空间的映射称为函数。把数空间到赋范线性空间的映射称为抽象函数。应用科学中常用的泛函是把函数空间中的函数映射成为数(如定积分)的算子，所以有些工程用书通俗地把泛函称为“函数的函数”。

泛函作为算子若是线性的，则称为线性泛函。平常的定积分算子就是最常见、最简单的线性泛函。我们这里所涉及的主要是线性泛函。

(4) 泛函分析是一种广义的函数分析。它专门研究空间、算子的普遍规律。它以各种学

科为具体背景，把客观世界中的研究对象抽象为元素和空间，把对象之间的关系抽象为算子。于是，它便把表面上彼此不相关的学科统一在它的普遍规律和共同框架之下。因而泛函分析具有高度的抽象性和广泛的应用性。

前面已指出，泛函分析与数值方法有着密切的联系。运用泛函分析的观点与语言可使数值分析中很多定理与方法的推导变得简洁、直观，并使所得结论更加普遍化。泛函分析是一种“软分析”，它把各方面的知识结合在一起，找出共性和简单性，大多用综合性的文字证明，而略去那些具体的繁琐的推导和计算，并尽可能采用形象化的思维和语言。整个泛函分析都是用“空间”来表达的，这使得很多经典的理论具有简单明了的几何直观。但是，在泛函分析中，数学家们普遍认为极其重要的定理在数值分析中却并不一定都有用。因此，我们在本书中选择的内容主要是那些与数值分析关系比较密切的基本理论和定理，除了三大空间的基本概念外，主要有不动点定理及其应用，正交投影定理与最佳逼近理论，算子方程的各种近似解法等。

1.2 数值分析的特点

数值分析是数学的一个重要分支，它专门研究数学问题的各种数值方法，包括方法的推导、描述以及对计算过程和计算结果的分析。

随着计算机和计算技术的发展，数值分析越来越显示出它的重要地位和作用。它涉及到深刻的数学理论和广泛的工程应用。

下面我们简要地讲述数值分析的一些基本特点。

1.2.1 构造性

数值分析以构造性方法为基础。近代的数值方法都是为使用计算机而提出的，因此要求方法指明如何具体去构造数学问题的解，即要求给出解题的可程序化的具体步骤与过程，直到给出问题的答案。

例如求证方程

$$x^2 + 2bx + c = 0 \tag{1.1}$$

当 $b^2-c>0$ 时有两相异实根。

构造性的证明方法如下：

由式(1.1)出发，逐次将方程作等价变形：

式(1.1) $\rightarrow x^2 + 2bx + b^2 - b^2 + c = 0$ (1.2)

式(1.2) $\rightarrow (x+b)^2 = b^2 - c$ (1.3)

式(1.3) $\rightarrow x + b = \pm \sqrt{b^2 - c}$ (1.4)

式(1.4) $\rightarrow x = -b \pm \sqrt{b^2 - c}$ (1.5)

从式(1.5)可以看出，当 $b^2-c>0$ 时，方程(1.1)确有两相异实根。式(1.5)不但证明了两根的存在，而且根据它可以具体计算出两个根来。式(1.1)～(1.5)就是解的具体构造过程。

如果本题采用反证法，即假设不存在两相异实根，然后得出矛盾，证明根的存在，但没有给出具体求根的计算过程。这就是非构造性的方法。

1.2.2 近似性

由工程科学中提出来的数学问题，绝大多数都无法求出解的精确值。数值解法主要是研究各种近似解。

例如用半分法求平方根的近似值，用高斯消去法或迭代法求线性方程组的近似解，用差分法或有限单元法求微分方程近似解，以及各种插值与逼近、拟合等等。所有这些数值分析的问题都存在着近似程度的估计问题，即误差的估计问题以及计算的稳定性问题。

在数值方法的各种近似计算中，如离散处理方法，有限维子空间的逼近问题，插值误差、舍入误差的积累和传播以及计算公式中解对初始数据的敏感性等等，都会影响误差的估计及计算的稳定性。这些都需要对具体问题作具体的分析与处理。

1.2.3 数值化结果

数值方法不同于经典的解析方法，最后的结果不是解析解而是数值解，且都是通过计算机得到的。因此，数值方法是建立在离散的基础上的。很多连续问题(如微分方程、积分方程)的求解，首先要通过特定的数学手段将连续问题离散化。如用差分代替微分，又如有限元和边界元的离散，各种数值积分公式，离散傅氏变换及离散小波变换等等。

在数值分析中，离散的方法和技巧是一个很重要的问题，不同的离散手段可以导致不同的数值方法。但是它们最后都转化为代数问题，通过上机计算而得到数值结果。当然，有了数值结果，如果需要的话，可以通过模拟得到近似的解析解。

第 2 章 距离空间

2.1 定义和例

2.1.1 定义

定义 设 R 表示一个非空集合，若其中任意两元素 x，y，都按一定的规则与一个实数 $\rho(x,y)$相对应，且 $\rho(x,y)$满足以下三公理(称为距离公理)：

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$ 时等号成立； (非负性)

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$； (对称性)

(3) 对 R 中任意三元素 x，y，z，有

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z) \qquad \text{(三角不等式)}$$

则称 $\rho(x,y)$为 x 与 y 间的距离，称 R 为距离空间，记为(R,ρ)，有时也简记为 R。距离空间中的元素也称为“点”。

根据定义，在距离空间 R 中，任意两点之间都有一个确定的距离，它包含了通常意义下的距离概念，但又要比通常意义的距离概念更广泛，它是欧氏空间中通常距离概念的抽象和推广。

2.1.2 例

例 1 设 $\mathbf{R}^1$ 为非空实数集，对其中任意两实数 x 和 y，定义距离

$$\rho(x,y)=|x-y| \tag{2.1}$$

显然满足距离公理(2.1)，即为通常意义下的距离，常称为欧氏距离。于是 R^1 按式(2.1)构成一距离空间。

另外，还可在 $\mathbf{R}^1$ 中用另一种方式来定义距离：

$$\rho_1(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \tag{2.2}$$

式(2.2)满足距离公理(1)、(2)是显然的。现在来验证它满足三角不等式。

由于当 $t\geqslant 0$ 时，$\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$为单调增函数，因此有

$$\begin{aligned}\rho(x,z)&=\frac{|x-z|}{1+|x-z|}\leqslant\frac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}\\&=\frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|}+\frac{|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}\\&\leqslant\frac{|x-y|}{1+|x-y|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|}\\&=\rho(x,y)+\rho(y,z)\end{aligned}$$

例 2 设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维实向量全体所构成的空间，在其中可定义距离如下：

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$为 R^n 中任意两元素，则

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2} \tag{2.3}$$

可以证明，它满足距离公理。当 $n=2$ 时，则由式(2.3)定义的距离即为平面上两点间的通常距离。

同样，在 $\mathbf{R}^n$ 中也可以定义另一种距离：

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i| \tag{2.4}$$

由上可见，在同一个集合中，可以用不同的方式定义不同的距离，得到不同的距离空间。如不作声明，在 $\mathbf{R}^1$ 中我们用式(2.1)规定的距离，在 $\mathbf{R}^n$ 中用式(2.3)规定的距离，称为欧氏距离。

例 3 用 $C_{[a,b]}$表示定义在$[a,b]$上所有连续函数的全体，对于任意 $x(t)$，$y(t)\in C_{[a,b]}$，可定义距离

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{2.5}$$

例 4 $L^2_{[a,b]}$表示$[a,b]$上平方可积函数的全体，即对任意的 $x(t)\in L^2_{[a,b]}$都有

$$\int_a^b|x(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty$$

则可在 $L^2_{[a,b]}$中定义距离：任意 $x(t)$，$y(t)\in L^2_{[a,b]}$，有

$$\rho(x(t),y(t))=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \tag{2.6}$$

例 5 l^2 表示满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<+\infty$ 的实数列的全体，则其中任意两点

$$x=(x_1,x_2,\cdots),\ y=(y_1,y_2,\cdots)$$

间的距离可定义如下：

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

从上面例子可以看出，我们可以在两向量间、两函数间、两数列间以及任意两个元素间引进距离，它们要比通常意义上的几何距离的含义更广泛。

2.2 收敛概念

极限是一切分析理论的基础。极限理论的基本点是收敛序列只能有一个极限。对于简单的直线和平面的情况，从通常的距离概念出发，这是很明显的事实，但在一般距离空间中就不那么显然、明白了。要在距离空间中建立相应的极限理论，就要从一般的距离公理出发建立收敛概念。

距离公理是从通常的距离概念中抽象出本质特性并加以一般化而形成的。实数(距离是用实数来定义的)的性质以及距离公理的作用使我们并不困难地在距离空间中建立起收敛的概念及以后的一系列理论。仔细考察一下经典分析中的许多定理的证明，实际上也仅仅用到了一般的距离公理，而并不需要通常几何中有关距离的全部性质。

下面，我们就在一般距离空间中来建立有关收敛的概念和理论。

2.2.1 收敛点列

1. 定义

定义 设 R 为距离空间，$x_n(n=1,2,\cdots)$为 R 中点列，$x\in R$，如果当 $n\to\infty$时，数列 $\rho(x_n,x)\to 0$,则称点列 x_n 按距离 $\rho(x,y)$收敛于 x，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n = x \tag{2.8}$$

或

$$x_n \to x(n\to\infty)$$

此时，称 x_n 为收敛点列，称 x 为 x_n 的极限。

从定义可以看出，在距离空间中，一般点列的收敛是通过距离的数列的收敛来定义的，而数列的收敛概念及性质等是我们在数学分析中早就熟悉了的。因此，我们不难得出一般距离空间中有关收敛点列的一些基本性质。

2. 性质

定理 2.1 在距离空间中，收敛点列的极限是惟一的。

证明 设 x，y 都是 x_n 的极限。则根据定义及数列收敛的性质，应有对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，

$$\rho(x_n,x)<\varepsilon,\ \rho(x_n,y)<\varepsilon$$

由三角不等式可得

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)<2\varepsilon$$

由 ε 的任意性，可知 $\rho(x,y)=0$，即 $x=y$。惟一性得证。

定理 2.2 在距离空间中，距离 $\rho(x,y)$是两个变元 x，y 的连续函数。

即在距离空间中，当 $x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$ 时，

$$\rho(x_n,y_n)\to\rho(x_0,y_0)\qquad n\to\infty \tag{2.9}$$

证明 根据数列收敛的性质，要证明式(2.9)，即要证得

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)|\to 0\qquad n\to\infty$$

考虑三角不等式

$$\begin{aligned}\rho(x_n,y_n)&\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(x_0,y_n)\\&\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(x_0,y_0)+\rho(y_0,y_n)\end{aligned}$$

即

$$\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0) \tag{2.10}$$

又

$$\begin{aligned}\rho(x_0,y_0)&\leqslant\rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,y_0)\\&\leqslant\rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y_0)\end{aligned}$$

则

$$\rho(x_0,y_0)-\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0) \tag{2.11}$$

由式(2.10)与式(2.11)即可得

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)|\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0)$$

令 $n\to\infty$，即得

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)|\to 0$$

定理 2.3 设 x_n 为距离空间 R 中的收敛点列，则 x_n 必有界。即存在 $x_0\in R$，有限数 $r>0$,使对所有的 $x\in x_n$，都有

$$\rho(x,\ x_0)<r \tag{2.12}$$

事实上，因 x_n 为收敛点列，不妨设它的极限点为 x_0，则取 $\varepsilon=1$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时有

$$\rho(x_n,\ x_0)<1$$

取

$$r=\max\{1,\rho(x_0,\ x_1),\ \rho(x_0,\ x_2),\ \cdots,\ \rho(x_0,\ x_N)\}+1$$

即可使对所有的 $x\in x_n$，式(2.12)成立。

2.2.2 Cauchy 点列

设 x_n 为距离空间 R 中的收敛点列，则存在 $x\in R$，使

$$\rho(x_n,x)\to 0 \qquad n\to\infty \tag{2.13}$$

因为

$$\rho(x_m,\ x_n)\leqslant\rho(x_m,\ x)+\rho(x_n,\ x)$$

所以，当 m，$n\to\infty$时有

$$\rho(x_m,\ x_n)\to 0 \tag{2.14}$$

即由式(2.13)可以推出式(2.14)，而在一般距离空间中却不能由式(2.14)反推出式(2.13)。

在实数理论中，

$$|x_n-x|\to 0 \qquad n\to\infty$$

与

$$|x_m-x_n|\to 0 \qquad m,n\to\infty$$

是相当的。在一般距离空间中，则式(2.13)与式(2.14)并不相当，我们把使式(2.14)成立的点列称为Cauchy 点列，或称基本点列。

于是，在实数空间中，按通常的欧氏距离，收敛点列与 Cauchy 点列相当。在一般距离空间中，则收敛点列必为 Cauchy 点列，而 Cauchy 点列不一定是收敛点列。

如有理数点列

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \cdots \tag{2.15}$$

在有理数空间中，只是一个 Cauchy 点列而不是收敛点列，因它在有理数空间中没有极限。有理数列(2.15)的极限是无理数 $\sqrt{2}$，只有在有理数空间加进无理数，扩充成为实数空间后，点列(2.15)才成为收敛点列。因任何一个无理数，都可以找到一个有理数点列以它为极限，所以有理数空间好像到处布满了空隙，将这些空隙(无理数)都补进来，就可使所有的 Cauchy 点列都有极限点，也就都成了收敛点列。

又如在 $P_{[a,b]}$(定义在$[a,b]$上的实系数多项式的全体)中，有的多项式列 $P_n(t)$满足式(2.14)而在 $P_{[a,b]}$中没有极限，因而它们在 $P_{[a,b]}$中只是 Cauchy 点列，而不是收敛点列。实际上，它们收敛于 $P_{[a,b]}$以外的连续函数。如果我们把这些连续函数都补充进来，即将 $P_{[a,b]}$扩充为 $C_{[a,b]}$，则所有的 Cauchy 点列按距离式(2.5)都成了收敛的多项式列。

正因为在一般距离空间中，收敛点列与 Cauchy 点列不相当，于是才引出了距离空间的完备性问题。

2.3 距离空间的完备性

前面我们建立了距离空间中的收敛概念，并且从收敛、极限的角度说明了一般距离空间与实数空间(距离空间的特例)的差别。在实数空间中存在定理：收敛点列与 Cauchy 点列等价。也就是说，任何一个实数的 Cauchy 点列必有实数的极限。我们把实数的这种特性称为完备性。这种实数的完备性给实数带来了很多好的性质，使人们得以在此基础上建立了一系列的极限理论。一般的距离空间(如有理数空间)就没有这种性质(有理数的 Cauchy 点列不一定有有理数的极限)。这种不同决定了它们之间有很多本质上的差异，也即一般的距离空间不具有完备性。

2.3.1 定义和例

定义 在距离空间 R 中，若任一 Cauchy 点列都在 R 中有极限，则称距离空间 R 是完备的。

于是跟实数空间一样，在完备的距离空间中，收敛点列与 Cauchy 点列是等价的。

因为在距离空间中，收敛是用距离来定义的，而前面曾讨论过，在同一个集合中可以定义不同的距离，因此，同一个集合可以对一种距离成为完备的距离空间，而对另一种距离却成为不完备的距离空间。

按前面的规定，未作声明时，实数空间 R^1 中的距离是按式(2.1)定义的距离。它的完备性也是指按式(2.1)的距离完备。

又如 $C_{[a,b]}$，按通常的距离

$$\rho(x, y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t) - y(t)|$$

为完备空间。

事实上，因 $C_{[a,b]}$中的任一 Cauchy 点列 $x_n(t)$满足

$$\rho(x_m,x_n) = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_m(t) - x_n(t)| \to 0 \qquad m,n\to\infty$$

故对一切 $t\in[a,b]$，必有

$$|x_m(t) - x_n(t)| \to 0 \qquad m,n\to\infty$$

而根据数学分析中的定理可知，有 $x(t)\in C_{[a,b]}$，使

$$|x_n(t) - x(t)| \to 0 \qquad n\to\infty$$

对 $t\in[a,b]$都成立，故有

$$\rho(x_n,x) \to 0 \qquad n\to\infty$$

即 $C_{[a,b]}$对距离式(2.5)完备。通常不作说明时，$C_{[a,b]}$中的距离都是指距离式(2.5)而言的。

特别地，若在 $C_{[a,b]}$中定义距离

$$\rho_1(x,y) = \left\{\int_a^b |x(t) - y(t)^2 \mathrm{d}t\right\}^{1/2}$$

则它是一个不完备的距离空间。

$\mathbf{R}^n$ 按通常的欧氏距离

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

是完备的。按这种距离的收敛又称按坐标收敛。

我们在 2.2 节中所举距离空间的例子，按那里规定的距离都是完备的距离空间。

如前所述，有理数空间是不完备的典型例子。

2.3.2 距离空间的完备化

距离空间的完备性在很多方面都起着重要的作用。如在证明解的存在、惟一性以及近似解的收敛性等方面都要用到完备性。前面讲到对于不完备的有理数空间，可以通过补充“空隙”的办法将 Cauchy 点列在本空间外的极限点(无理数)加进来，使有理数空间扩充为完备的实数空间。现在我们就来研究，对于一般的不完备距离空间，是否都能扩充成为完备的距离空间？这就是距离空间完备化的问题。

定义 设 R,R_1 都是距离空间，如果存在一个由 R 到 R_1 的映射 T，使对一切 $x,y\in R$ 有

$$\rho_1(Tx,Ty) = \rho(x,y)$$

其中 ρ,ρ_1 分别为 R，R_1 上的距离，则称 T 为 R 到 R_1 的等距映射，此时，称 R 与 R_1 为等距。

于是，对任一距离空间，有下面的完备化定理。

定理 2.4 对于每个距离空间 R，必存在一个完备的距离空间 R_0，使得 R 等距于 R_0 中的一个稠密(稠密的定义在下一节中给出)子空间 R_1，并称 R_0 为 R 的完备化空间，若除去等距不计，则 R_0 是惟一的。(证明从略)

由于距离空间的数学命题不涉及元素的具体意义，在一个空间中成立的数学命题可以通过映射 T 在另一等距空间中同样成立，因此在抽象的意义上，可以把彼此等距的空间视为同一空间，称为空间的“同一化”。于是，任一距离空间的完备化空间在等距“同一化”的意义上是惟一的。

在完备化的距离空间中，实际上是把所有原来的 Cauchy 点列的极限点都“扩充”进来了。

有理数空间按 $\rho(x,y)=|x-y|$完备化的空间是实数空间。

$C_{[a,b]}$空间按

$$\rho_1(x,y) = \left\{\int_a^b |x(t) - y(t)|\mathrm{d}t\right\}^{1/2}$$

完备化的距离空间为 $L^2_{[a,b]}$，等等。

今后，我们总是把任何距离空间看成是它的完备化空间的子空间。

可以证明，完备空间的任何闭子集都是完备的子空间，而任一距离空间的完备子空间都是闭集。

2.4 距离空间的稠密性与可分性

2.4.1 稠密性

定义 设 A，B 为距离空间 R 中的子集。若对任意的 $x\in A$，总存在 B 中的点列 x_n 收敛于 x，则称 B 在 A 中稠密，简称 B 在 A 中稠。

注意，在稠密的定义中，并不要求 $A\supset B$ 或 $B\supset A$，甚至 B 与 A 可以没有公共点，但要求 $\bar{B}\supset A$。意即若 B 在 A 中稠，则 A 中的任一点或者是 B 的点，或者是 B 的聚点。

如有理数集和无理数集，它们互不包含，也没有公共点，但它们互在对方中稠，因为任何一个有理数都是无理数集的聚点，反之，任何一个无理数都是有理数集的聚点。

显然，有理数集和无理数集都在实数集中稠（按 R^1 中规定的距离）。

又如 $C_{[a,b]}$ 中任何一个连续函数 $f(x)$，必存在 $P_{[a,b]}$ 中的多项式列在 $[a,b]$ 上按

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$$

收敛于 $f(x)$，故 $P_{[a,b]}$ 在 $C_{[a,b]}$ 中稠。

若按 $L^2_{[a,b]}$ 中定义的距离

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

则 $P_{[a,b]}$，$C_{[a,b]}$ 都在 $L^2_{[a,b]}$ 中稠。

关于稠密性，还有两种等价的说法：

(1) 若 B 在 A 中稠，则对任意的 $x\in A$ 及任意的 $\varepsilon>0$，总存在 B 中的点 y，使得

$$\rho(x,y)<\varepsilon$$

反之亦然。

(2) 若 B 在 A 中稠，则对任意的 $\delta>0$，必有

$$\bigcup_{x\in B}\delta(x)\supset A \tag{2.16}$$

（其中 $\delta(x)$ 表示以 x 为中心，以 δ 为半径的小球），反之亦然。

显然，若 A 在 B 中稠，B 在 C 中稠，则 A 在 C 中稠。

利用稠密的概念可以定义距离空间中的可分性。

2.4.2 可分性

定义 距离空间 R 称为可分的，是指在 E 中存在一个稠密的可列子集。

由于可分空间中含有稠密的可列子集，这给研究问题带来了很多方便。当我们讨论有关可分空间的某些问题时，往往可以从空间中挑选出对那个问题最合适的一个可列子集进行分析、研究，然后再利用稠密性推广到整个空间中去。又如可在某些可分空间中适当地引进可列的维数概念，先在有限维的子空间中讨论问题，然后再用一系列的有限维子空间去逼近原来的可分空间。

例如空间 R^n 是可分的，因为坐标为有理数的点的全体在 R^n 中构成一个可列的稠密子集。特别地，当 $n=1$ 时，意即有理数集为实数集中一个可列的稠密子集。

又如 $C_{[a,b]}$ 与 $L^2_{[a,b]}$ 是可分的，因为 $[a,b]$ 上以有理数为系数的多项式全体构成了它们的

可列的稠密子集。

有界数列全体组成的空间 l^∞ 是不可分的。其中定义距离

$$\rho(x,y)=\sup_i|x_i-y_i|$$

这里，$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots)$，$y=(y_1,\ y_2,\ \cdots)$。

证明 把 l^∞ 中形如

$$x=(x_1,x_2,\cdots)\qquad x_i=0\text{ 或 }1$$

的点的全体记为 m，则 m 为不可列集(用二进制表示实数，则 m 可与实数集对应)。对于 m 中任意两点间的距离，根据定义有 $\rho(x,y)=1$。

若设 l^∞ 可分，则 l^∞ 中存在一个可列的稠密子集 X_0，以 X_0 中的每个点为中心，以 1/3 为半径作小球，则根据式(2.16)，应有

$$\bigcup_{x\in X_0}\left\{\delta(x)\,|\,\delta=\frac{1}{3}\right\}\supset l^\infty\supset m$$

因 X_0 可列，所以小球只有可列个，而 m 中的点不可列，且都在小球中，因此至少有一个小球中含有 m 的两个点。设 m 中的两个点 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$ 含在某个以 $x_0\in X_0$ 为中心的小球中，则有

$$\begin{aligned}1=\rho(x^{(1)},x^{(2)})&\leqslant\rho(x_0,\ x^{(1)})+\rho(x_0,x^{(2)})\\&<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

显然矛盾，故 l^∞ 不可分。

2.5 距离空间的列紧性

实数域除了前面所说的完备性、稠密性和可分性以外，还有一个很重要的性质——列紧性，即任何有界数列必有收敛的子列。但在一般的距离空间中，不一定有此性质。下面讨论距离空间中具有列紧性的集合。

2.5.1 定义

定义 1 设 A 是距离空间 R 的子集。如果 A 的任何点列都有子列在 R 中收敛，则称 A 是列紧集。若 R 本身是列紧的，则称 R 为列紧空间。

特别地，列紧集若是闭集，则称为紧集。

定义 2 设 A，B 为距离空间 R 中的点集。如果存在 $\varepsilon>0$，使得以 B 中每一点为中心的 ε—开球 $o(x,\varepsilon)$的全体覆盖了 A，即

$$\bigcup_{x\in B}o(x,\varepsilon)\supset A$$

则称 B 是 A 的一个 ε—网。

定义 3 设 A 为距离空间 R 的子集。如对任意给定的 $\varepsilon>0$，A 总存在有限的 ε—网，即存在$\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$，使

$$\bigcup_{i=1}^{n}o(x_i,\varepsilon)\supset A$$

其中$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$依赖于 ε，则称 A 是完全有界集。