大學叢書

高等微積分

上　冊

William F. Osgood 著

申又振等譯

商務印書館出版

仓（350824A）

大學叢書 高等微積分 上册

Advanced Calculus

原 著 者　William F. Osgood

譯 述 者　申又棖 李克羣 范崇媛 魏執權
王建華 李經熙 陳　杰 樂汝書

出 版 者　商 務 印 書 館
上海河南中路二一一號

發 行 者　三聯 中華 商務 開明 聯營聯合組織
中國圖書發行公司
北京絨線胡同六十六號

發 行 所　北京 上海 天津 各地分公司
三聯書店　中華書局
商務印書館　開明書店
聯營書店　各地分店

印 刷 者　商務印書館印刷廠

1951年9月初版　定價人民幣30,000元

（京）1—2000

原　序

任何關於高等微積分的教本,一定要包括偏微分法,多重積分,有系統的積分法和廣義積分,並且多少要講一點虛數.在近代解析方法——即所謂"ε 方法"——發展之前,已經有許多關於物理方面(包括幾何方面,幾何乃是物理的一個最顯著部分)的應用問題,需要仔細處理.這些問題雖然還只是原則性的而非技術性的,却必須精確的表出,才能够把物理的假設和配合在這些假設下的解析方法,一齊顯露出來.本書所論,如:經過傳導體的熱流或電流所應滿足的偏微分方程式,水力學和彈性力學中的連續性方程式,以及那些描寫弦的振動或薄膜振動的方程式,都是這樣導出的.在今日,近代物理學的主要研究對象是分散的質點運動,本書着重於物質在空間區域裏的連續分佈,和空間的連續變換,乃是一種特別應時的配合.

幾何學所需要的偏微分法,比熱力學所需要的簡單些,讀熱力學時必須澈底認清那些是自變數(這樣才能使偏微分的意義,在兩類的代表字母互相重複時,仍然明瞭),並且要能够從線積分上着想.

振動是物理學的一個基本概念.最簡單的振動是簡諧運動,其次,是有阻尼的振動;最後,是在週期性外力下的振動.這幾個物理圖樣,對於學物理和學數學的讀者,同樣重要;因爲這些圖樣能

夠幫助讀者，使他學到用級數處理微分方程式的邊值問題時，容易看出問題的全貌．不但如此，Fourier 級數和其他類似的級數，經過應用之後，其意義更爲顯豁．

在近代數學的初期，微積分和變分法中間，本來沒有明顯的分界．後來因爲變分法裏的概念和方法，都可以達到非常精細的程度，數學家對它就生了敬畏之心；結果，變分法就脫離了微積分而成爲實變函數論的一個節目．可是，物理學家是離不了 Hamilton 原則的．因此，他們就不得不盡其力之所及，搜集一些關於變分法的初步資料．他們並不要問：在什麼充分條件下，積分的最大值或最小值確實存在？他們所要問的是：在什麼條件下，積分的變動是停止的？但是這個停止條件，却依靠着變分 $\delta x, \delta U$ 等的定義．所以，在講變分法的時候，要緊是一開始就仔細討論這個定義；越往後講，這個定義就越複雜了．本書並把 Hamilton 原則，應用到一些彈性振動的問題上去．

第十四章給了微分方程式一個有系統的處理．不過，更爲重要的，却是摻雜在這兩本書（初等微積分及本書）裏的那些非系統的處理，從初等微積分的力學一章起，已經有微分方程式了．此外，我又在本章裏適當的地方，用矢量元素場及曲面元素集的圖樣，說明微分方程式的內在意義，因而引出這些概念：積分（即微分方程式的解）可以看做是一族曲線，或是一族由特徵帶拼成的曲面．

就方法上講，用常識的看法使用微變數，即使不能直接驗證，却有啓發和領導的價值．第十二章所講重積分的變換和跨越曲面

的流量，就是一類的例子．在這些地方，我很愼重的保留所有那些有益處的原始概念，同時就本書所採取的嚴格標準下，補出證明．這裏值得提出的，還有第三章第十四節裏那幾條關於密度及比力比壓的討論（但這些却與微變數無關）．

定積分的定義，在第十二章第十四節裏，用一個新的形式述出．用這個形式，可以簡單而嚴格的證明積分學的基本定理（見第十二章前三節）．

第十三章是講矢量分析的，並且把它應用到 Stokes 定理和 Frenet 公式的證明裏去．Lagrange 乘式，在討論多變數函數的極大及極小值時引入． Fourier 級數，以及那些用 Bessel 函數或帶諧函數展開的級數，都用最小二乘法處理．（這就是說：展開時要使誤差的平方在經過積分之後，其積分值最小．）

上面所說本書的種種目標，在現行的教科書中是不常有的．想達到這些目標，必須先做一些純數學的討論；一方面要用現代數學裏最好的資料，但同時也要照顧到理工學生的能力（與弱點）．其實，本書不單在各章的開始部分講得很淺，就是在整本書裏，大部分篇幅也都被簡易的資料佔去．第一章從多項式和分式的最初等性質講起，給積分法做個準備，而末一章簡直可以叫做"$\sqrt{-1}$的故事." 用十頁篇幅去討論那些包含$\sqrt{a+bx+cx^2}$的積分，好像有點過分．可是，如果把這十頁的內容徹底了解清楚，大體上已經籠罩了全部的系統積分法．學物理的人在他從根號下取出一個因數時，爲什麼要注意該因數的符號呢？ 這理由很簡單：在計算引力時，取錯了符號，就得到錯誤的結果．

本書在編排的次序方面，盡量留出活動餘地. 比方說，讀者可以先讀偏微分法一章，或二重積分一章，或微分方程式一章. 即在一章之內，也可加以選擇（參看第 65 頁的足註）. 就我個人而言，我不願意從第一章開始. 這一章所講，雖然大部分是形式的，雖然意在測驗學生的中學代數程度，並在教給他怎樣去計算一些較繁的積分，但同時也應該提高他對於代數方法的了解，而鼓勵他去讀些代數，例如 Bôcher 所著 Algebra 的前幾章.

讀者應備有 O. Peirce 的簡明積分表. 本書所參考的 Analytic Geometry 是 Osgood 和 Graustein 合著的 Plane and Solid Analytic Geometry.

本書是一個誠實的嘗試，是站在大學學生自己的立場上寫出來的. 它不只是貢獻給數學和物理的專門讀者，並且貢獻給一切具有這樣懷抱的人們：願意把微積分當作一種方法，去瞭解那些從自然界定律引出來的數量關係.

1925 年 9 月.

譯者附記

1950 年冬，北京大學數學系一部分同人，爲了準備工學院一年級初等微積分的補充資料，選譯了奧氏高等微積分的前幾章．由於集體工作的原故，不但很快的完成任務，並且提高了譯者們的工作情緒，於是決定譯出全書．自從新中國建立以來，理工學生逐年加多，而中文高等微積分教科書及參考書的供應，甚感缺乏，這個譯本的出版，也許可以幫助解決一部分供應問題．

奧氏此書，是接着他的初等微積分（此書舊有張方潔譯本，係商務印書館出版，近由東北工學院改譯中）寫的．這兩本書雖淺深不同，但所取的觀點却前後一致．其優點在於常常由幾何或物理的具體問題出發，引到一般的數學方法，使讀者容易認識理論與實際的聯系，並容易掌握應用問題的解法．至於書中材料的選擇和處理，詳見著者原序，茲不贅述．

原著者寫此書時，已積有多年的教學經驗，他處理問題的方法比較自然並富於啓發性．但在啓發方面有時做的不够，而指定的參考書籍又多非初學所能讀，是一缺憾．（其實他所指定的參考資料有許多都包括在他後來所著的實變函數論中．）此外又有些瑣碎之處，例如 Duhamel 定理的引用，對於某些問題固然有點幫助，但如逐題引用，實無深義，宜加精簡．

如衆所知，此書的理論部分過於簡略．但在奧氏的教學計劃中，此點不足爲病．他的計劃是把一年級和二年級作爲一階段，三年級以上作另一階段．在第一階段中的初等微積分和高等微積分，重點在一般的微積方法和應用問題．至於理論方面，只是稍稍涉及，啓發多而證明少．那些沒有嚴格證明之處，留在第二階段中補足．第二階段的教材大都包括在他所著的實變函數論及複變函數論兩書中（北大出版部印）．就目前而論，爲了在理工微積分教學上容易掌握重點和節省時間，這種辦法似有可以斟酌採用之處．

中文數學名詞尚未統一，本書係集體翻譯，雖力求名詞一致，但也許有幾個仍未校出．至於筆調不一致，當然是意料中的事情．

原書有幾個足註，譯者認爲並不關緊要，故未譯出．第四章第一節末的習題 4 移到第三節末作爲習題 15，這是作補充資料時更動的，於付印時未及改回．又矢量一章稍有更改，最顯著的是採取現在通行的數積記號“•”和矢積記號“×”．

譯者們學識譾陋，錯誤一定不免，海內方家，如有發現，請寄給北京大學數學系，以便再版時改正，這是譯者們所竭誠歡迎的．

在翻譯期間，江澤涵、冷生明、江澤培、陳藻蘋、趙仲哲、苗華殿諸位先生不但供給譯者們許多寶貴的意見，並且參加了實際翻譯工作，謹此致謝．

1951 年 8 月．

上 册 目 錄

第 一 章

積分的一般方法

第 二 章

簡 化 公 式

第 三 章

二 重 積 分

第四章 三重積分

第五章 偏微分

第六章 立體幾何上的應用

第 七 章

Taylor 定理. 極大與極小. Lagrange 乘式

第 八 章

包 線

第 九 章

橢 圓 積 分

第 十 章

不 定 形

第 十 一 章

線積分與 Green 定理．熱的流動

高 等 微 積 分

第 一 章

積 分 的 一 般 方 法

在初等微積分裏，我們講了幾種積分技巧*，因而可以計算許多積分，但是並沒有討論積分的一般方法．這一章的目的，就是要講怎樣可以按照一定的方法來積分幾類特別廣泛而又非常重要的函數．其中最主要的定理是：凡是有理函數的積分都能用初等函數表示出來．要證明這個定理，必須用多項式和分式的幾個性質．因此，我們首先討論這些性質．

1. 多項式． 所謂多項式就是若干個單項式的和：

$$c_1 x^{n_1} + c_2 x^{n_2} + \cdots + c_r x^{n_r},$$

其中每一個指數不是正整數就是 0．這樣的一個和可以寫成下面這個形狀：

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \tag{1}$$

其中每一個係數 a_k 並不跟着 x 變動，而 n 是一個正整數，或者是 0．在特殊情形，一個多項式化簡後，可以只有一項，例如 x^2 或 $-x$ 或 c 或 2 或 0．

---

*參看作者所著初等微積分 第 9 章．

如果 a_n 不等於 0, n 就叫做 $G(x)$ 的次數. 所以多項式

$$a^3-x^3, \qquad -x, \qquad 5$$

的次數分別是 3, 1, 0. 多項式 0 沒有次數, 而且牠是唯一的一個沒有次數的多項式.*

顯然兩個多項式的和, 差, 積還是多項式. 如果這兩個多項式的次數分別是 n, m, 牠們的乘積的次數就是 $n+m$. 當 n, m 不相等時, 牠們的和或者差的次數是 n, m 中較大的一個. 但是, 假如 $n=m$, 牠們的和或差的次數雖然在一般情形都等於 n, 但在特殊情形却可以小於 n, 甚至於爲 0, 因而沒有次數.

若是 x 的值 α 能使多項式 $G(x)$ 等於 0:

$$G(\alpha)=0.$$

α 就叫做這個多項式的一個根.

定理, 假設多項式 $G(x)$ 的次數是正數, α 是 $G(x)$ 的一個根, 則 $x-\alpha$ 必是 $G(x)$ 的一個因式:

$$G(x)=(x-\alpha)\,g(x), \tag{2}$$

其中多項式 $g(x)$ 的次數比 $G(x)$ 的次數小一.

證明. 根據假設, 我們知道:

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, \qquad a_n\neq 0, \quad n>0;$$

$$G(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n=0.$$

*雖然我們在這裏已經討論得很詳細, 但是如果讀者能把 Bôcher: *Introduction to Higher Algebra* 的第 1 章讀一遍, 一定會感到很有用處.

從第一個方程式減去第二個方程式，便得：

$$G(x)-G(\alpha)=a_1(x-\alpha)+a_2(x^2-\alpha^2)+\cdots+a_n(x^n-\alpha^n).$$

因為 $G(\alpha)=0$，所以這個方程式的左邊化為 $G(x)$. 右邊每一項既然能被 $x-\alpha$ 整除，那麼右邊這個多項式就能被 $x-\alpha$ 整除. 而且，在商式中，x 的最高次數是 $n-1$，而牠的係數 a_n 不等於 0. 因此，商式的次數是 $n-1$.

有一個定理，叫做代數學的基本定理，但是牠的證明却不屬於初等分析範圍之內. 這個定理說：每一個次數是正數的多項式，必定有一個根，而且這個根不是實數就是虛數. 於是根據剛才證明的定理，我們立刻知道 $G(x)$ 可以寫做 n 個一次因式的乘積：

$$G(x)=C(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n). \tag{3}$$

其中 $C=a_n$. 當然這些因式不必都不相同.

假設 $G(x)$ 的係數都是實數，又設其中有一個根 α_1 是虛數：

$$\alpha_1=a+b\sqrt{-1},$$

那麼，我們可以證明，共軛虛數 $a-b\sqrt{-1}=\alpha_2$ 也是一個根. 於是相當因式的乘積，其係數必是實數：

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=x^2-2ax+(a^2+b^2).$$

然而在這種情形下，引進虛數實在並不必要. 因為上述的基本定理可以改寫為下列的形式：假設多項式 $G(x)$ 的次數是正數，而牠的係數又都是實數，那麼，$G(x)$ 可以寫做一次因式及二次因式的乘積，而且這些因式的係數都是實數：

$$G(x)=C(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\cdots,$$

這裏 $p_1{}^2-4q_1<0$. 其餘依此類推.

在特殊情形，可能只有一次因式，或者只有二次因式出現，而且這些因式不必都不相同．例如：

(i) $$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2).$$

(ii) $$x^4+a^4=(x^2+\sqrt{2}\,ax+a^2)(x^2-\sqrt{2}\,ax+a^2).$$

(iii) $$12x^2+863x-72.$$

因爲這個三項式的因式並不能一望便知，所以我們解下面這個二次方程式：

$$12x^2+863x-72=0,$$

求出牠的兩個根是 $\frac{1}{12}$ 和 -72. 因而

$$12x^2+863x-72=12\left(x-\frac{1}{12}\right)(x+72)=(12x-1)(x+72).$$

恆等定理. n 次多項式 $G(x)$ 不能有 $n+1$ 個不同的根. 爲什麼呢？假設 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 $G(x)$ 的 n 個不同的根，$G(x)$ 就能寫成 (3) 式的形狀. 若是還有一個根 α_0 與 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 不相同，那麼

$$G(\alpha_0)=C(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\alpha_2)\cdots(\alpha_0-\alpha_n)=0.$$

然而這是不可能的，因爲這個乘積中沒有一個因數等於零．所以上面這個定理是對的.

因此，我們知道：如果 x 有 $n+1$ 個（或是更多）不同的值能使 $G(x)$ 這個多項式（現在，我們並不假定 $a_n \neq 0$，或是任一係數 $\neq 0$）等於 0，那麼每一個係數必等於 0. 於是這個多項式對於 x 的每一個值都等於 0，或者說這個多項式恆等於 0.

假定 $G(x)$ 是 n 次多項式，

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$$

是另一個 m 次的多項式. 如果對於 x 的所有值，（在 $m \leqq n$ 時，只需對於 x 的 $n+1$ 個不同的值），這兩個多項的值都相等，那麼，根據上面的結果，我們知道牠們的相當項的係數也必定分別相等：

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \cdots, \quad a_n = b_n, \quad n = m,$$

因爲 $G(x) - g(x)$ 這個差恆等於 0 的原故.

習　題

分解因式：

1. $x^4 - a^4$.　　2. $x^3 + a^3$.　　3. $x^4 + a^2 x^2$.

4. $x^4 - 2a^2 x^2 + a^4$.　　5. $x^4 + 2a^2 x^2 + a^4$.

6. $x^2 + 5x + 6$.　　7. $15x^5 - 12x^4 - 3x^3$.

8. $x^2 + 6x + 7$.　　答. $(x+3+\sqrt{2})(x+3-\sqrt{2})$.

9. $2x^2 + x - 7$.　　10. $6x^4 - x^3 + 6x^2$

11. $x^6 - a^6$.　　12. $x^8 - a^8$.　　13. $2x^8 - 3$.