

非径向支承 弯梁桥的计算方法

郑振飞 徐艳 著



人民交通出版社

非径向支承弯梁桥的计算方法

Fei Jingxiang Zhicheng Wanliangqiao de Jisuan Fangfa

郑振飞 徐艳 著

人民交通出版社

内 容 提 要

本书作者将曲线梁桥各梁的刚度系数和内力计算公式推广应用于广义梁格法中,从而解决了非径向支承曲线梁桥的荷载横向分布的复杂计算,使曲线梁桥的计算更加通用化和简单化,具有很好的实用性。

图书在版编目(CIP)数据

非径向支承弯梁桥的计算方法 / 郑振飞, 徐艳编著. —
北京: 人民交通出版社, 1999
ISBN 7-114-03560-8

I. 非… II. ①郑… ②徐… III. 曲线桥-载荷分布: 横
向分布-载荷计算 IV. U448.422.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 75009 号

非径向支承弯梁桥的计算方法

郑振飞 徐 艳 著

版式设计: 刘晓方 责任校对: 刘高彤 责任印制: 孙树田

人民交通出版社出版发行

(100013 北京和平里东街 10 号)

各地新华书店经销

北京鑫正大印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 12.75 字数: 317 千

2000 年 1 月 第 1 版

2000 年 1 月 第 1 版 第 1 次印刷 总第 1 次印刷

印数: 0001~2500 册 定价: 18.00 元

ISBN 7-114-03560-8

U · 02564



前 言

在实际工程中,除了大量采用平面形状为扇形的支承径向布置的弯梁桥外,有时还会采用支承线相互平行的非扇形弯梁桥或不平行的非扇形弯梁桥。这一类桥梁可以称为不规则弯梁桥,也可以称之为斜交曲线梁桥,本书则称之为非径向支承弯梁桥或非径向支承连续弯梁桥。

作者在指导研究生和讲授研究生课程《斜弯桥跨的结构分析》中发现,目前涉及非径向支承弯梁桥的文献极为罕见,觉得研究这一类桥梁的计算方法和提供工程实用的辅助用表,是一件很有现实意义的工作。所以,在科研教学过程中,结合作者承担的福建省自然科学基金——“斜弯桥跨的结构分析”课题,做了一些工作,现将研究成果整理出版。本书内容中还包括了非等截面弯梁桥的计算方法,但为了突出重点,书名仍定为《非径向支承弯梁桥的计算方法》。

本书可以看作是作者所著的《斜弯桥跨分析的广义梁格法》(与吴庆雄合著,人民交通出版社出版)一书的续篇。在这两本书中分别采用了作者所指导的研究生叶凌、吴庆雄、徐艳、杨新燕等人的部分研究成果,应该说这两本书是福州大学结构工程学科的同仁们和研究生的集体智慧结晶。本书中还引用了程翔云教授等人《多格室曲线板桥荷载横向分布的简化分析》一文的内容,特此感谢。福州大学土木建筑学院建筑师张维天为本书绘制了全部的插图,在此一并致谢。

本书由郑振飞主编,其中第一章、第二章、第四章由郑振飞编写,第三章、第五章和附录的程序由徐艳编写,同时徐艳为本书的出版还做了大量的具体工作。

由于作者学术水平有限,错误与不周之处在所难免,欢迎有关专家与读者批评指正。

郑振飞

1999年6月于福州大学

目 录

第一章 概论	1
第二章 非径向支承弯梁桥的计算	4
§ 2-1 概述	4
§ 2-2 非径向支承简支静定曲线梁的内力	4
§ 2-3 非径向支承简支超静定曲线梁的内力	13
§ 2-4 非径向支承简支超静定曲线梁刚度系数	17
§ 2-5 非径向支承弯梁桥的荷载横向分布计算	21
§ 2-6 非径向支承弯梁桥的转动中心	29
§ 2-7 非径向支承弯梁桥荷载横向分布计算表格编制	30
第三章 非径向支承连续弯梁桥的计算	32
§ 3-1 非径向支承连续曲线梁的类型	32
§ 3-2 A型非径向支承连续曲线梁的内力计算	32
§ 3-3 B型非径向支承连续曲线梁的内力计算	37
§ 3-4 非径向支承连续弯梁桥的荷载横向分布计算	42
第四章 多余刚度的弹簧系数法	45
§ 4-1 多余刚度的弹簧系数法的基本原理	45
§ 4-2 多余刚度的弹簧系数法的算例及分析	47
§ 4-3 多余刚度的弹簧系数法计算具有大边梁的弯梁桥	48
第五章 等刚度法	58
§ 5-1 等刚度法在直梁桥中的应用	58
§ 5-2 等刚度法在弯梁桥中的应用	61
§ 5-3 等刚度法在多格室曲线板桥中的应用	67
附录一 单跨非径向支承弯梁桥荷载横向分布影响线表	72
附录二 非径向支承连续弯梁桥荷载横向分布影响线计算程序	109
附录三 A型非径向支承连续曲线梁内力计算程序	154
附录四 B型非径向支承连续曲线梁内力计算程序	175
参考文献	198

第一章 概 论

近年来,随着我国经济的高速发展,交通事业也蓬勃发展,高速公路、大型立交工程和城市高架桥日益增多,由此也出现了大量弯梁桥。

国内外有许多桥梁学者和桥梁工作者对弯梁桥作了大量的研究并将其成果应用于工程实践,如将梁桥实用空间理论应用于弯梁桥中就是其中之一。目前,计算弯梁桥横向分布的方法主要有:梁格法、梁系法和板系法等。但是,由于各理论假定的不同,使得现有理论存在各自的限制。如梁格法中的刚性横梁法,它利用桥梁横向刚度无限大的假定使之推广到弯梁桥中。但是,也因此假定使刚性横梁法无法比较精确地计算宽跨比较大的桥梁。又如梁系法,其模型视纵梁为主要构件,而把横梁的刚度均摊于主梁上,忽略了弯梁桥中横梁的重要作用,同时其计算荷载用半波正弦荷载来代替实际的集中荷载也会产生一定的误差,从而使得梁系法只适用于宽跨比较小的桥梁中某些特定截面的内力计算。

上述情况说明梁桥实用空间理论计算弯梁桥荷载横向分布的方法还不完善,有待深入研究。同时,也使得实际工程中许多比较特殊的弯梁桥的分析遇到困难,甚至至今发表的文献均未涉及,如弯梁桥的非径向支承问题、弯梁桥中主梁与边梁刚度不等时的计算以及简支梁以外的其它体系的弯梁桥荷载横向分布的计算问题等等。

在本书中,针对上述讨论的一些情况,提出了一些解决问题的新思路,主要有:

一、结构力学方法与广义梁格法相结合的方法

我们知道,任何不规则的弯梁桥,其计算之所以复杂,在于其主梁和横梁的交点与支承点的距离都是变化的,使得其刚度系数的计算变得复杂化,也就是单位力作用下弯梁桥的变形的计算非常困难。广义梁格法是作者在《斜、弯桥跨分析的广义梁格法》^[1]一书中首次提出的。广义梁格法的优点在于不仅考虑主梁的抗扭惯矩,且在充分考虑由于弯扭耦合作用而产生的主梁的实际挠曲变形和扭转变形的同时,也充分地考虑了横梁本身的弯曲变形,因而范围几乎不受限制。结构力学方法计算非径向支承的弯梁桥的荷载横向分布的关键也是梁的刚度系数。利用弯梁桥的基本微分方程或利用虚功原理都可以导出曲线梁在荷载作用下的挠度和扭角的计算公式,但前者的求解过程相当繁琐,而利用虚功原理则比较简捷明了,概念清晰,所以本书采用后者进行计算。在求得非径向支承弯梁桥的刚度系数和内力计算公式的基础上,把刚度系数和内力计算公式应用于广义梁格法中,从而解决了包括非径向支承的弯梁桥在内的非常规弯梁桥的荷载横向分布的复杂计算。

在本书中还考虑到工程人员实际应用的方便,对宽跨比 $B/L \leq 2$ 的窄桥,把刚度系数和内力计算公式应用于刚性横梁法中,根据非径向支承弯梁桥的跨径和半径等参数,编制了荷载横向分布影响线表,读者可以根据实际的非径向支承弯梁桥各项参数查表直接获得荷载横向分布影响线坐标值。

以上是针对单跨非径向支承曲线梁而言的,本书还将此方法应用于非径向支承连续曲线梁的计算当中。对于径向支承的连续曲线梁的内力计算,国内已有专著论述^[3],而对于非径向

支承的连续曲线梁的内力计算,特别是关于这种结构的荷载横向分布计算的有关文献几乎没有见到。

本书仍运用结构力学的方法,分别分析了 A 型非径向支承连续曲线梁(所有支点均采用横向抗扭固定而纵向铰支的抗扭简支支座)和 B 型非径向支承连续曲线梁(部分支座采用抗扭简支,而另一部分采用既无抗扭约束也无抗弯约束的点铰支座)的内力计算。对于 A 型结构,为了减少赘余力的数目,也为了利用本书第二章的成果,仅将梁在支点处切开而使各跨支座仍保持抗扭固定,这样就可以采取多跨一次超静定简支曲线梁作为基本体系。为了最终使结构与原结构保持一致,各中间支座处相邻梁端的变形必须满足变形协调条件,据此求得各支点截面的赘余弯矩。而对于 B 型结构,仍取一次超静定简支曲线梁为基本结构,利用中间支承的变形协调条件建立力法方程。

过去关于此类结构的荷载横向分布计算,当体系为非简支如连续曲线梁时,其基本思路是用等刚度法将连续梁的某一跨等效为具有相同跨径和曲率半径的假想等截面简支弯梁来计算。但由于弯桥中存在的弯扭耦合现象,使得等刚度的换算相当复杂,加上连续曲线梁本身的内力和变形也较难求,因此应用此思路计算连续曲线梁的荷载横向分布的相关文献至今未见发表。另一种思路是采用有限元法与荷载横向分布相结合的方法,这种方法已在作者出版的《斜、弯桥跨分析的广义梁格法》一书中得以实现。只要用有限元法求出单根梁的刚度系数,即可用广义梁格法计算其内力横向分布,但这种计算过程不够系统,需分两步独立进行。

本书采用结构力学方法与广义梁格法相结合的方法,从结构的自身出发,在求解单根连续曲线梁内力的同时,求得其变形,也就是连续曲线梁的刚度系数,并在此基础上利用广义梁格法,便可进行非径向支承连续曲线梁的荷载横向分布及内力的计算。整个计算过程不需要进行体系转换,也无须分离计算,具有系统性和连续性,较之前两种思路更为直观和实用。

二、多余刚度的弹簧系数法

在桥梁工程中有时会遇到大边梁的问题,即外边梁大而内主梁小的不等刚度问题。显然,这类桥梁的荷载横向分布与等截面主梁的荷载横向分布是有差别的。它的计算方法有好几种:可以仍然采用梁系的方法用力法求解,但刚度矩阵的系数项中应根据不同的刚度进行调整,或利用等截面主梁的荷载横向分布影响线来作调整等等。在文献^[2]中提出了所谓“多余刚度的弹簧系数法”,即把梁的多余刚度看作一个“弹性支承”,作为未知多余反力来考虑,只要把这两个多余反力解出来,则各片主梁的荷载横向分布可看作是等刚度梁在外荷载和这两个未知力共同作用的结果。在本书中,把这个计算方法进一步推演,用以计算具有大边梁的弯梁桥,扩大了应用范围,同时也可用此方法与本书的等刚度法互相校核。

三、等刚度的方法

所谓等刚度的方法是指与所计算的桥跨结构具有相同跨径的等截面简支梁桥或相同跨径、相同半径的简支弯梁桥,当在跨中施加单位竖向集中荷载或集中扭矩时,与所计算的桥跨结构具有相同的跨中挠度和扭角。

采用此方法的关键是要解决非等截面简支梁和非等截面弯梁桥与等刚度直梁桥和弯梁桥之间的刚度换算问题,包括抗弯刚度和抗扭刚度的换算。特别对于弯梁桥,由于弯扭耦合的特征,使其抗弯刚度和抗扭刚度换算时,需求解联立方程,因而显得更为复杂。实际上正是由于其他体系弯梁桥与变截面弯梁桥的跨中挠度和扭角较难求,刚度换算无法用显式表达,所以

往往需借助计算机进行计算。

在本书中,采用等刚度法简化了直、弯梁桥中包括主梁与边梁刚度不等时的问题,为工程实践提供了一种更为简明方便的计算方法。本书在研究弯梁桥的荷载横向分布计算之前,首先介绍具有大边梁的直梁桥等刚度计算方法,因为它与非等截面弯梁桥等刚度的计算有共同的一面,又有较大的区别,尽管非等截面弯梁桥要复杂得多,但两者放在一起,可以互相比,启发思路。

由于弯梁桥中弯扭耦合的特征,加上非径向支承的影响,使得本书中所推导的一些计算公式相当复杂,为方便读者使用,本书附上三个作者用 FORTRAN 语言编写的实用电算程序。

总之,编写本书的目的在于,在国内外学者研究弯梁桥所取得的成果的基础上,学习、借鉴和吸取先行者的经验,结合自己的理论研究,努力运用新的思路和方法解决弯梁桥中实用方法至今尚未解决的问题,完善梁桥实用空间理论在弯梁桥中的运用。

第二章 非径向支承弯梁桥的计算

§ 2-1 概 述

文献^[3]对简支超静定曲线梁的结构力学方法求解作了详细的介绍,并已得到一系列计算公式。但在该书中,作者对曲线梁的边界条件作了一定的限制,即支承为径向,然后在此结构模式上运用结构力学的方法,根据端点的径向变形协调条件进行求解。显然,对于工程实际中存在的大量的非径向支承的弯梁桥没有涉及到。

然而,由于种种因素的影响,例如为了利于桥下流水、通航或行车顺畅,特别是在城市桥梁工程中,实际弯桥也会采用非径向支承的形式。但对这种结构形式的桥梁至今没有看到有关的分析文献。文献^[4]简单介绍 C. P. Heins 在《结构杆件的弯曲与扭转》^[6]一书中的研究成果,该文献给出了非径向支承弯梁桥的最大挠度、弯矩和剪力设计值与具有相同半径、相同跨度的径向支承弯梁桥相应设计值之比 k_a 的曲线图,计算步骤为先计算该径向支承弯梁桥的各种最大设计值,然后根据该弯梁桥的几何尺寸,确定 $\theta = L/R$,按已知的斜交角,利用 k_a 图确定设计的增减比值 k_a ,最后按下式计算出非径向支承弯梁桥的各项最大设计值:

$$F_{\text{amax}} = F_{\text{Rmax}} \times \frac{k_a}{100} \quad (2-1)$$

式中: F_{amax} ——非径向支承弯梁桥的某项最大设计值;

F_{Rmax} ——相应径向支承弯梁桥的某项最大设计值。

但上述研究成果仅仅是针对半径 $45\text{m} \leq R \leq 366\text{m}$,跨径 $15\text{m} \leq L \leq 30\text{m}$,车道数为 2、3 和 4,斜交角 $0^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$ 的一个比较狭窄的范围,更为重要的一点是这些实用计算图表均是针对美国的荷载标准制定的,因此,不能在我国的具体工程中应用,但其思路却十分可取。

非径向支承的弯梁桥的计算方法,在文献^[7]中还介绍了一种格子梁理论,这就是日本远藤笃康氏的多角形弯梁理论。这是一种平面几何的解法,不求解弹性方程,而能求出主梁与横梁交叉点格点力的近似方法。但上述过程没有考虑主梁的刚度,所以必须再用直线格子梁的分配系数加以修正。这种方法不仅适用于简支弯梁桥,而且也能应用于连续弯梁桥,这种方法虽然简易,但误差较大。

在本章中,作者基于曲线梁中的基本假定,将结构力学的方法应用于非径向支承的弯梁桥,求解曲线梁的内力和刚度系数,并套用《斜、弯桥跨分析的广义梁格法》^[1]一书中的“广义梁格法”,解决具有非径向支承弯梁桥的荷载横向分布问题,从而完善了弯梁桥的荷载横向分布理论。

§ 2-2 非径向支承简支静定曲线梁的内力

在这一节,我们首先求解基本结构——非径向支承简支静定曲线梁在各种荷载作用下的

内力。

一、竖向均布荷载作用

竖向均布荷载 p 作用下的简支静定曲线梁如图 2-1a) 所示。

$$\text{已知: } OG_0 = \frac{rs}{l} = r \times 2r \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \frac{1}{r\varphi_0} = \frac{2r}{\varphi_0} \sin \frac{\varphi_0}{2}$$

$$AG_0 = \sqrt{OG_0^2 + r^2 - 2OG_0 r \cos \frac{\varphi_0}{2}}$$

$$\delta = \arctg \frac{OG_0 - r \cos \frac{\varphi_0}{2}}{r \sin \frac{\varphi_0}{2}}$$

$$\begin{cases} a_0 = AG_0 \sin(\varphi_0/2 + \alpha - \delta) \\ b_0 = AG_0 \cos(\varphi_0/2 + \alpha + \delta) \end{cases}$$

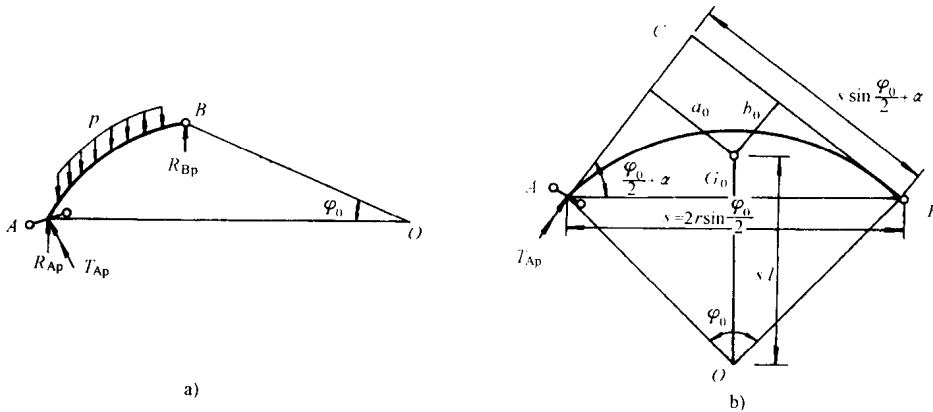


图 2-1 均布荷载 p 作用

由 $\Sigma M_{\overline{BC}}$ 可得:

$$\begin{aligned} R_{Ap} s \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) - pr\varphi_0 b_0 &= 0 \\ R_{Ap} &= \frac{pr\varphi_0 b_0}{s \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} = \frac{pr\varphi_0 b_0}{2r \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} \end{aligned} \quad (2-2)$$

由 $\Sigma V = 0$ 可得:

$$\begin{aligned} pr\varphi_0 - R_{Ap} - R_{Bp} &= 0 \\ R_{Bp} &= pr\varphi_0 - R_{Ap} = pr\varphi_0 \left(1 - \frac{b_0}{2r \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)}\right) \end{aligned} \quad (2-3)$$

由 $\Sigma M_{\overline{AC}} = 0$ 可得:

$$T_{Ap} - pr\varphi_0 a_0 - R_{Bp} s \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) = 0$$

则得:

$$\begin{aligned}
 T_{Ap} &= pr\varphi_0 a_0 + 2R_{Bp}r\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) \\
 &= pr\varphi_0\left(a_0 + 2r\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) - b_0\lg\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)\right)
 \end{aligned} \quad (2-4)$$

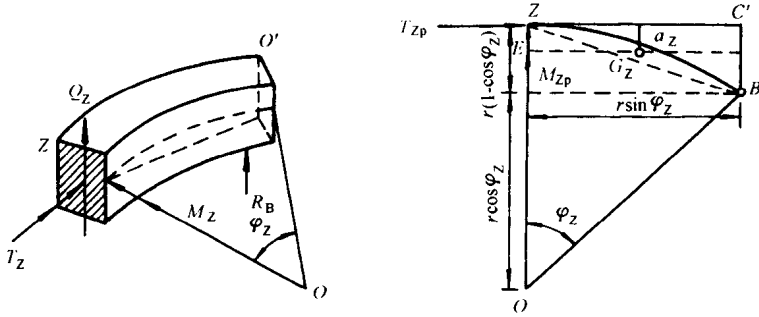


图 2-2 任意截面的内力计算

于是任意截面 Z 的内力,可取图 2-2 示计算图式。参照上图可得:

$$OG_Z = \frac{2r}{\varphi_Z} \sin\frac{\varphi_Z}{2}, a_Z = r\left(1 - \frac{\sin\varphi_Z}{\varphi_Z}\right), EG_Z = \frac{r}{\varphi_Z}(1 - \cos\varphi_Z)$$

由 $\Sigma M_{\overline{ZC}} = 0$ 可得:

$$\begin{aligned}
 T_{Zp} + pr\varphi_Z a_Z - R_{Bp}r(1 - \cos\varphi_Z) &= 0 \\
 T_{Zp} &= R_{Bp}r(1 - \cos\varphi_Z) - pr\varphi_Z a_Z \\
 &= pr\varphi_0\left(1 - \frac{b_0}{2r\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)}\right)r(1 - \cos\varphi_Z) - pr\varphi_Z r\left(1 - \frac{\sin\varphi_Z}{\varphi_Z}\right)
 \end{aligned} \quad (2-5)$$

由 $\Sigma M_{\overline{OZ}} = 0$ 可得:

$$\begin{aligned}
 M_{Zp} + pr\varphi_Z EG_Z - R_{Bp}r\sin\varphi_Z &= 0 \\
 M_{Zp} &= R_{Bp}r\sin\varphi_Z - pr\varphi_Z EG_Z \\
 &= pr\varphi_0\left(1 - \frac{b_0}{2r\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)}\right)r\sin\varphi_Z - pr^2(1 - \cos\varphi_Z)
 \end{aligned} \quad (2-6)$$

由 $\Sigma V = 0$ 可得:

$$\begin{aligned}
 Q_{Zp} - pr\varphi_Z + R_{Bp} &= 0 \\
 Q_{Zp} &= pr\varphi_Z - R_{Bp} = pr\varphi_Z - pr\varphi_0\left(1 - \frac{b_0}{2r\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)}\right)
 \end{aligned} \quad (2-7)$$

二、均布扭矩作用

均布扭矩 t 作用下的简支静定曲线梁如图 2-3 所示。

由 $\Sigma M_{\overline{AB}} = 0$ 可得:

$$T_{At}\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) - t \times 2r\sin\frac{\varphi_0}{2} = 0$$

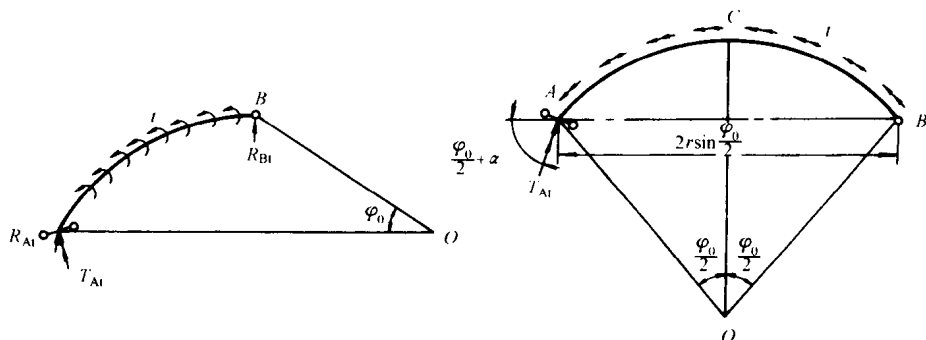


图 2-3 均布扭矩作用

$$T_{At} = \frac{2rt \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} \quad (2-8)$$

由 $\Sigma M_{\overline{OC}} = 0$ 可得:

$$T_{At} \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) - R_{Bt} r \sin \frac{\varphi_0}{2} + R_{At} r \sin \frac{\varphi_0}{2} = 0$$

再由 $\Sigma V = 0$ 可得:

$$R_{At} + R_{Bt} = 0$$

联立两式可得:

$$T_{At} \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) - 2R_{Bt} \cdot r \sin \frac{\varphi_0}{2} = 0$$

$$R_{Bt} = \frac{T_{At} \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)}{2r \sin \frac{\varphi_0}{2}} = \frac{2rt \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) 2r \sin \frac{\varphi_0}{2}} = t \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) \quad (2-9)$$

$$R_{At} = -t \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) \quad (2-10)$$

任意截面 Z 的内力(见图 2-4)为:

由 $\Sigma M_{\overline{ZB}} = 0, \Sigma M_{\overline{OC}} = 0$ 和 $\Sigma V = 0$ 可得:

$$T_{Zt} \cos \frac{\varphi_Z}{2} - M_{Zt} \sin \frac{\varphi_Z}{2} - t \times 2r \sin \frac{\varphi_Z}{2} = 0$$

$$T_{Zt} \sin \frac{\varphi_Z}{2} + M_{Zt} \cos \frac{\varphi_Z}{2} + Q_{Zt} r \sin \frac{\varphi_Z}{2} - R_{Bt} r \sin \frac{\varphi_Z}{2} = 0$$

$$Q_{Zt} + R_{Bt} = 0$$

将式代入整理后可得:

$$\begin{aligned} T_{Zt} &= tr \sin \varphi_Z + 2R_{Bt} r \sin^2 \frac{\varphi_Z}{2} \\ &= tr \sin \varphi_Z + 2rt \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_Z}{2} + \alpha\right) \sin^2 \frac{\varphi_Z}{2} \quad (2-11) \end{aligned}$$

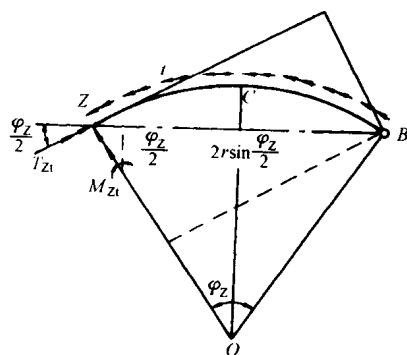


图 2-4 任意截面内力

$$M_{Zl} = \frac{T_{Zl} \cos \frac{\varphi_Z}{2} - t \times 2r \sin \frac{\varphi_Z}{2}}{\sin \frac{\varphi_Z}{2}}$$

$$= -2rt \sin \frac{\varphi_Z}{2} \left(\sin \frac{\varphi_Z}{2} + \cos \frac{\varphi_Z}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_Z}{2} + \alpha \right) \right) \quad (2-12)$$

$$Q_{Zl} = -R_{Bl} = t \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_Z}{2} + \alpha \right) \quad (2-13)$$

三、竖向集中荷载作用

竖向集中荷载 P 作用下的简支静定曲线梁如图 2-5a) 所示。

当竖向集中荷载 P 作用于梁上任意位置时, 如图 2-5b) 所示, 荷载至 AC 和至 OA 的距离分别为:

$$\begin{cases} a_P = AP \sin \left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta \right) \\ b_P = AP \cos \left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta \right) \end{cases}$$

式中: $AP = 2r \sin \left(\frac{\varphi_0 - \varphi_P}{2} \right)$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_0}{2} - \delta \right) = \frac{a'_P}{b'_P} = \frac{r[1 - \cos(\varphi_0 - \varphi_P)]}{r \sin(\varphi_0 - \varphi_P)}$$

$$\delta = \frac{\varphi_0}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos(\varphi_0 - \varphi_P)}{\sin(\varphi_0 - \varphi_P)}$$

由 $\Sigma M_{AC} = 0$ 可得:

$$T_{AP} + Pa_P - R_{BP} \times 2r \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha \right) = 0$$

$$T_{AP} + P \times 2r \sin \left(\frac{\varphi_0 - \varphi_P}{2} \right) \sin \left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta \right) - R_{BP} \times 2r \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha \right) = 0 \quad (2-14)$$

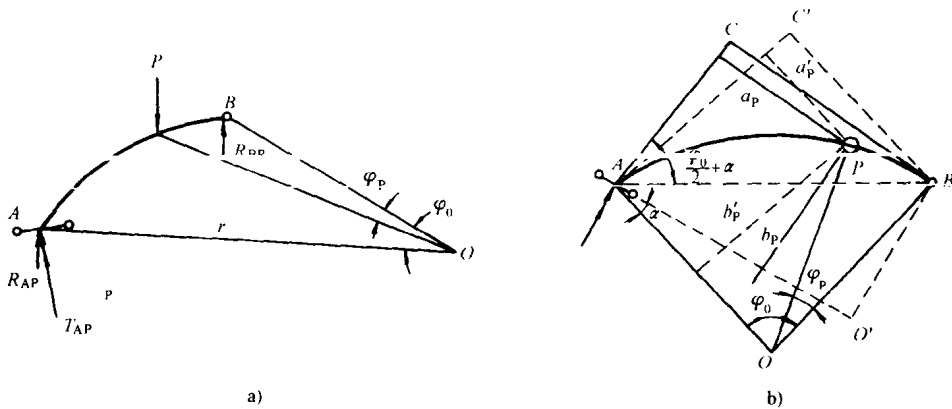


图 2-5 竖向集中荷载 P 作用

由 $\Sigma M_{AO'} = 0$ 可得:

$$Pb_P - R_{BP} \times 2r \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha \right) = 0$$

将 $b_P = AP \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta\right)$ 代入上式可得:

$$R_{BP} = \frac{P b_P}{2r \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_P}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} P \quad (2-15)$$

将式(2-15)代入式(2-14) 可得:

$$T_{AP} = 2Pr \sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_P}{2}\right) \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta\right) - \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta\right) \right] \quad (2-16)$$

由 $\Sigma V = 0$ 可得:

$$R_{AP} + R_{BP} - P = 0$$

$$R_{AP} = P - R_{BP} = P \left(1 - \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_P}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} \right) \quad (2-17)$$

为了计算任意截面 φ_Z 处的内力, 现考察图 2-6a) 和 b) 中所示 $\varphi_Z \leq \varphi_P$ 和 $\varphi_Z \geq \varphi_P$ 两种情况。

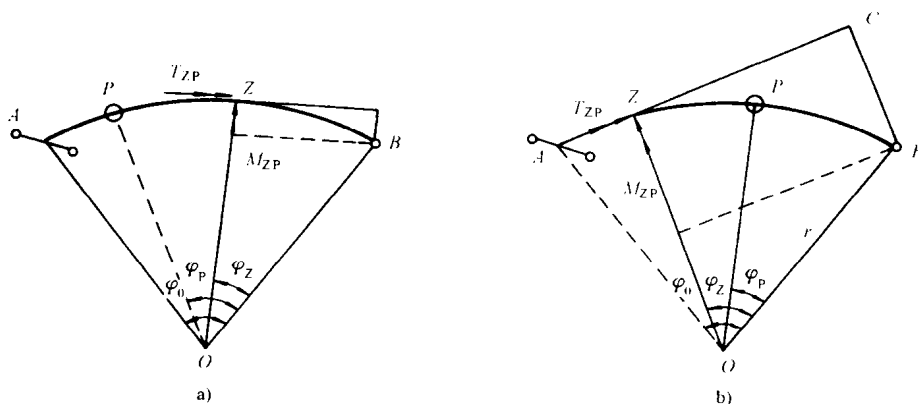


图 2-6 竖向集中载荷 P 作用下的内力计算

1. 当 $0 \leq \varphi_Z \leq \varphi_P$ 时:

对于扭矩:

$$T_{ZP} - R_{BP} r (1 - \cos \varphi_Z) = 0$$

将式(2-15) 代入得:

$$T_{ZP} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_P}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} P r (1 - \cos \varphi_Z) \quad (2-18)$$

对于弯矩:

$$M_{ZP} = R_{BP} r \sin \varphi_Z = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_P}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} P r \sin \varphi_Z \quad (2-19)$$

对于剪力:

$$Q_{ZP} = -R_{BP} = -P \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_P}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} \quad (2-20)$$

2. 当 $\varphi_P \leq \varphi_Z \leq \varphi_0$ 时:

对于扭矩:

$$T_{ZP} + Pr[1 - \cos(\varphi_Z - \varphi_P)] - R_{BP}r(1 - \cos\varphi_Z) = 0$$

将式(2-15)代入得:

$$T_{ZP} = -Pr[1 - \cos(\varphi_Z - \varphi_P)] + \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_P}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} Pr(1 - \cos\varphi_Z) \quad (2-21)$$

对于弯矩:

$$M_{ZP} + Pr\sin(\varphi_Z - \varphi_P) - R_{BP}r\sin\varphi_Z = 0$$

则:

$$\begin{aligned} M_{ZP} &= R_{BP}r\sin\varphi_Z - Pr\sin(\varphi_Z - \varphi_P) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_P}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} Pr\sin\varphi_Z - Pr\sin(\varphi_Z - \varphi_P) \end{aligned} \quad (2-22)$$

对于剪力:

$$Q_{ZP} = P - R_{BP} = P \left[1 - \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi_P}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha - \delta\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} \right] \quad (2-23)$$

四、集中扭矩的作用

集中扭矩作用在梁上任意截面时,静定简支曲线梁两端的反力如图 2-7 所示。为了计算反力扭矩 T_{AT} ,可取 $\Sigma M_{AC} = 0$,即:

$$T_{AT} - R_{BT} \times 2r\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) - T\cos(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha) = 0 \quad (2-24)$$

由 $\Sigma M_{AO} = 0$ 可得:

$$T\sin(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha) - R_{BT} \times 2r\sin \frac{\varphi_0}{2} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) = 0$$

即:

$$R_{BT} = \frac{T\sin(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha)}{2r\sin \frac{\varphi_0}{2} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} \quad (2-25)$$

将式(2-25)代入式(2-24)可得:

$$\begin{aligned} T_{AT} &= R_{BT} \times 2r\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) + T\cos(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha) \\ &= T \left[\sin(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) + \cos(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha) \right] \end{aligned} \quad (2-26)$$

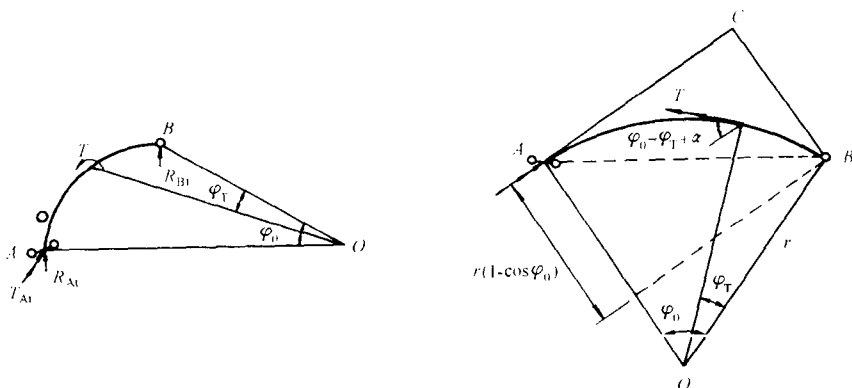


图 2-7 集中扭矩 T 作用

由 $\sum V=0$ 可得:

$$R_{AT} = -R_{BT} = -\frac{T \sin(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha)}{2r \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} \quad (2-27)$$

图 2-8 a) 和 b) 分别给出了当计算截面位置 $\varphi_Z \leq \varphi_T$ 和 $\varphi_Z \geq \varphi_T$ 的计算图式。

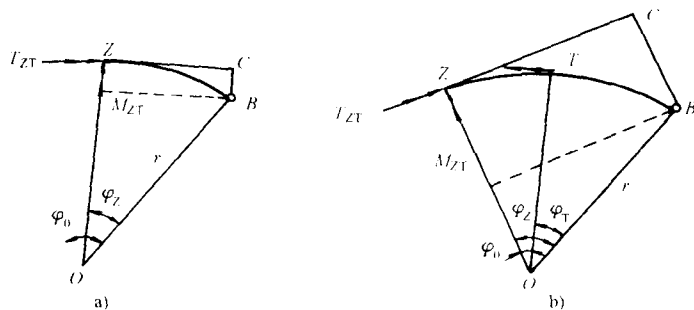


图 2-8 集中扭矩 T 作用下的内力计算

1. 当 $0 \leq \varphi_Z \leq \varphi_T$ 时:

对于扭矩:

$$T_{ZT} - R_{BT}r(1 - \cos \varphi_Z) = 0$$

将式(2-27) 代入得:

$$T_{ZT} = \frac{T \sin(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha)}{2 \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) \sin \frac{\varphi_0}{2}} (1 - \cos \varphi_Z) \quad (2-28)$$

对于弯矩:

$$M_{ZT} = R_{BT} \sin \varphi_Z = \frac{T \sin(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha)}{2 \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) \sin \frac{\varphi_0}{2}} \sin \varphi_Z \quad (2-29)$$

对于剪力:

$$Q_{ZT} = -R_{BT} = -T \left[\frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha)}{2 \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) \sin \frac{\varphi_0}{2}} \right] \quad (2-30)$$

2. 当 $\varphi_T \leq \varphi_Z \leq \varphi_0$ 时

对于扭矩:

$$T_{ZT} - T\cos(\varphi_Z - \varphi_T) - R_{BT}r(1 - \cos\varphi_Z) = 0$$

$$T_{ZT} = \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha)}{2\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)\sin\frac{\varphi_0}{2}}(1 - \cos\varphi_Z) + T\cos(\varphi_Z - \varphi_T) \quad (2-31)$$

对于弯矩:

$$M_{ZT} + T\sin(\varphi_Z - \varphi_T) - R_{BT}r\sin\varphi_Z = 0$$

$$M_{ZT} = R_{BT}r\sin\varphi_Z - T\sin(\varphi_Z - \varphi_T)$$

$$= \frac{T\sin(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha)}{2r\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)}r\sin\varphi_Z - T\sin(\varphi_Z - \varphi_T) \quad (2-32)$$

对于剪力:

$$Q_{ZT} = -R_{BT} = -T\left[\frac{\sin(\varphi_0 - \varphi_T + \alpha)}{2\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right] \quad (2-33)$$

五、梁端承受弯矩的作用

为全面掌握非径向支承简支超静定曲线梁的内力性状,同时也为了以后求解多跨连续曲线梁内力的需要,下面再分析梁端分别承受弯矩 M_A 和 M_B 作用的内力分布情形。

(一)左端有 $M_A = 1$ 作用

如图 2-9 所示,仍取 B 端放松抗扭约束的简支静定曲线梁为基本结构,

由 $\Sigma M_{\overline{BC}} = 0$:

$$1 + \overline{R}_{AM_A} \times 2r\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) = 0$$

则得:

$$\overline{R}_{AM_A} = -\frac{1}{2r\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} = -\overline{R}_{BM_A} \quad (2-34)$$

由 $\Sigma M_{\overline{AC}} = 0$:

$$\overline{T}_{AM_A} - \overline{R}_{BM_A}2r\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) = 0$$

则得:

$$\overline{T}_{AM_A} = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right) \quad (2-35)$$

由此可得任意截面的内力为:

$$\left. \begin{aligned} \overline{M}_{ZM_A} &= \overline{R}_{BM_A}r\sin\varphi_Z = \frac{\sin\varphi_Z}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} \\ \overline{T}_{ZM_A} &= \overline{R}_{BM_A}r(1 - \cos\varphi_Z) = \frac{(1 - \cos\varphi_Z)}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} \\ \overline{Q}_{ZM_A} &= -\overline{R}_{BM_A} = -\frac{1}{2r\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha\right)} \end{aligned} \right\} \quad (2-36)$$