ZHONGXUESHUXUESIWEIFANGFACONGSHU

中学数学思维方法丛书

直觉探索方法

罗增儒　钟湘湖　编著

ZHIJUETANSUOFANGFA

LUOZENGRU

ZHONGXIANGHU

ZHONGXUE
SHUXUE
SIWEIFANGFA
CONGSHU

大象出版社

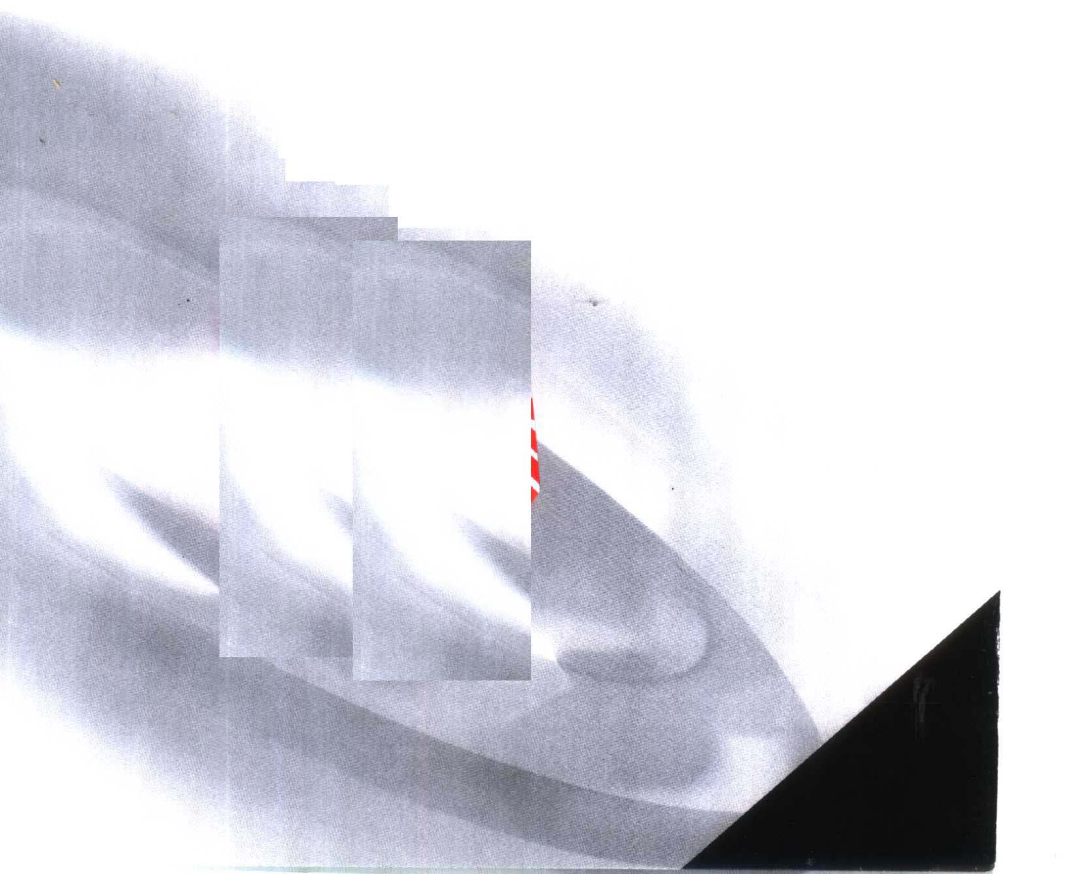
中学数学思维方法丛书

直觉探索方法

罗增儒　钟湘湖　编著

大象出版社

ZHIJUETANSUOFANGFA
LUOZENGRU
ZHONGXIANGHU



图书在版编目(CIP)数据

直觉探索方法/罗增儒,钟湘湖编著. -郑州:大象出版社,1999

(中学数学思维方法丛书/王梓坤,张乃达主编)

ISBN 7-5347-2337-×

Ⅰ. 直… Ⅱ. ①罗… ②钟… Ⅲ. 数学方法-中学-课外读物 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 23115 号

责任编辑 樊洪涛　　责任校对 张静燕

大象出版社出版(郑州市农业路 73 号　邮政编码 450002)

新华书店经销　　河南省瑞光印务股份有限公司印刷

开本 850×1168　1/32　印张 6　字数 131 千字

1999 年 9 月第 1 版　　1999 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—2 500 册　　定　价 6.85 元

中学数学思维方法丛书

本册作者　罗增儒　钟湘湖

序

早在1995年8月，大象出版社(原河南教育出版社)在扬州举办了一个座谈会，邀请十余位教学水平很高的数学教师参加，商讨出版一套“中学数学思维方法丛书”。与会同仁认为，这是一个富有创见的倡议，因而得到大家热烈赞许。提供一套既有较深厚的理论基础，又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书，对中学数学教学，无疑会是非常有益的；而更主要的，广大的中学生们，将在形象思维、逻辑推理和严密计算等方面，学到很多的东西。这对将来无论做什么工作，都会受益无穷。

回想我们青少年时期学习数学的情景，总会有几分乐趣几分惊异。做出了几道难题是乐趣，而惊异则来自方法的进步。记得小学算鸡兔同笼，必须东拼西凑，多一只兔便比鸡多了两条腿，好不容易才能做出一题。而学过代数，这类问题便变得极为简单。做几何题也一样，必须具体问题具体解决，而学过解析几何后便有了一般的

程序可循。至于算圆的面积,如果不用积分便会相当麻烦。由此可见,方法的进步对科学的发展是何等重要。以上是对学习现成的东西而言。如果要进行科研,从事创新、发现或发明,那就更应重视方法,特别是思维方法。没有新思想,没有新方法,要超过前人是很困难的。有鉴于此,一些优秀的数学家便谆谆告诫学生们,要非常重视学习方法和研究方法。美国著名数学家 G. Pólya 写过好几种关于数学思想方法的书,如《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》,后来都成为世界名著,很受欢迎。

学习任何一门科学,都有掌握知识和培养能力两方面。一般说来,前者比较容易。因为知识已经成熟,而且大都已经过前人整理,成为循序渐进的教材。但能力则不然,那是捉摸不定、视之无形的东西,主要靠自己去思考,去探索,去总结,去刻苦锻炼。老师的培养固然重要,但只能起辅导作用。只可意会,不可言传,而有时甚至连意会都做不到。正如游泳,只靠言传是绝对学不会的。这是对受业人而说的。

至于老师,则应无保留地传授自己的经验和体会,尽量缩短学生学习的时间。中国有句古诗:“鸳鸯绣出凭君看,不把金针度与人。”意思是说知识可以输出,但能力不可传授。前一句话意思很好,后一句应改为“急把金针度与人”。这套丛书,正是专门传授金针的。

一般的科学研究方法,可分为演绎与归纳两大类。在数学中,演绎极为重要,而归纳则基本上用不上,除了 C. F. Gauss 等人偶尔通过观察数列以提出一些数论中的猜想而外。不过自从计算机发明后,这种情况已大为改

观。混沌学主要靠计算机而发展起来，数学模拟也主要靠计算机。再者，以往数学中极少实验，还是由于计算机的广泛使用，现在不少数学系已有了实验室，特别是统计实验室。可以期望，计算机对改变数学的面貌，对改善数学的思维方法，都会起到越来越大的作用。

在此之前，我国已经出版了几本关于数学方法的书，它们都各有特色。如就规模之大，选题之广，论述之精而言，这套丛书也许是盛况空前、蔚为大观的。我们希望它在振兴我国的科学事业和培养数学人才中，将会起到令人鼓舞的作用。

王梓坤

99.7.6.

引　言

数学直觉像是一个未曾见过面的老朋友，我们感觉到它的存在与友谊，可又说不清它的容颜与风度．本书尝试对这位神秘的友人，做点结合中学实际的探索．

首先，书中记述了古今中外的许多潜逻辑现象，包括著名数学家脍炙人口的直觉发现、数学教育同行们的直觉经验和作者个人的直觉经历，还有非数学的极其动人的灵感故事．然后，探索了数学直觉的特征，主要分析它的非逻辑、潜意识特征，它的直接突发、整体综合特征，它的新异突破、自由热烈特征等．最后，用较长的篇幅探索数学直觉的培养，涉及审美直觉在数学发现中的作用．如果读者看了这本书后能产生这样的共鸣："我也曾有过直觉的情节……""我也有探索直觉奥秘的兴趣！"那么，本书的写作目的就基本达到了，因为它的目的就是把深奥的数学直觉普及到中学去．

需要说明的是，本书在艰难而漫长的写作准备中，参阅了许多资料，我们感谢书中已经列出与尚未列出的资料的作者，感谢他们的智慧对本书写作的帮助，同时又困窘于各家观点的不尽相同．后来，鉴于本书的主题——探索，我们采取了兼容并蓄的做法，希望

读者能从资料的广泛代表性上去理解,并作出独立思考和判断.毕竟,当一个概念尚未成熟时,定义的准确性并不是最重要的.

还要说明,虽然本书有整体的结构,但又区别于逻辑顺序非常严格的数学著作,读者完全可以从感兴趣的章节开始阅读;特别是,许多具体例题的分析大多有相对独立性,具备初中以上数学知识即可跳过理论叙述而直接欣赏.

探索总是粗糙的,但愿粗糙能成为精确与成熟的先导.

谨以本书献给母校——惠州市第一中学校庆70周年.

作　者

1998年7月初稿于广东惠州

1999年1月定稿于陕西西安

目　　录

一、数学直觉的认识

直觉已经撩开她那神秘的面纱，被世人承认为人类思维活动的一种基本形式．文艺创作中有灵感，科学发现中有顿悟，数学解题中有灵机一动和豁然开朗，这些都不再是秘密，更不是迷信．但是，直觉与逻辑的关系，直觉思维的机制、过程和特点等，人们尚未研究清楚，观点当然也就不统一．可以说，我们对数学直觉的认识，是想知道很多，而又有很多不知道．

所以，我们的叙述重点是提供大量的直觉素材，其理论总结与理论分析都只是很初步的，并且容许不同观点的并列．本章对数学直觉的认识是从实例感受开始的，首先列出 10 个例子，然后分析直觉与灵感、直觉与顿悟、直觉与想象、直觉与直感、直觉与急中生智、直觉与脑半球、直觉与错觉等方面的关系，最后又回到数学直觉的实例，不过，已上升到权威数学家风靡世界的直觉发现了．它一方面是对数学直觉存在的继续印证、对“初步认识”的辅助说明，另一方面也是下一章数学直觉特征的感知．

1. 数学直觉的实例感知

中学数学在揭示客观事物量与形式及其关系时，主要不是借助实验的方法，而是通过严格的逻辑推理来实现的．* 教材是按照逻辑顺序来组织的，教师是按照逻辑规则来讲授的，学生也是按照逻辑要求来练习的．一个数学结论的得出，须由已知的公理、概念、定理，经过逻辑推导，步步有据地论证(参见本丛书中《逻辑探索方法》)．即使是出于量力性的考虑，未充分论证的那些内容，也总是尽可能给出严谨的说明．所以，中学校园里的数学基本上是逻辑演绎的一统天下，“没有逻辑证明的数学已不能算作数学，不会逻辑演绎的学生不能算学会了数学”**．这一切，对培养和发展学生的逻辑思维能力是非常有利的．

然而，这只是数学的一个侧面．当我们由 B 严格推出 A 时，B 须首先严格推出，这要用到 C；而严格推出 C 又要用到 D……余此类推，数学证明需要一个演绎推理的起点，这个起点就是中学数学的公理或原始概念，它是不能严格证明的．譬如，什么是点？什么是线？为什么两点确定一条直线？黑板上画着的两条平行线延长到教室外面乃至宇宙深处真的不会相交吗？如此等等，其公认的可信性来源于直觉经验．

并且，在数学结论的天才发现与数学方法的策略创造中，不仅

---

* 日常生活中的证明还可以有：个人的经验、权威的认可、找出了实例、举不出反例、结果的有效性等多种方式，但数学上的证明只有逻辑演绎推理．

** 张奠宙等著《数学教育学》，江西教育出版社，1991 年 11 月第 1 版．

有显露的、可证实的逻辑推理,而且还有大量的非逻辑的、潜意识的思维活动,其中不乏直觉猜想、直觉预见和直觉顿悟.事实上,一个孩子无需通过“母亲的定义”就能隔门感知妈妈来了;托儿所的小朋友能毫不费劲认出桌子上的小地图与墙上的大地图都是中国地图,虽然没有学过“相似形”;费马也没有经过三段论就提出了种种猜想.“数学王子”高斯反复强调,他的数学发现主要来自经验,“证明只是补行的手续”.而对于证明,他在 1817 年 3 月回顾二次互反律的证明过程时又说:“去寻求一种最美和最简洁的证明,乃是吸引我去研究的主要动力.”(数学美的追求)“全能数学家”庞加莱说:“逻辑用于论证,直觉用于发明.”笛卡儿坦言:“逻辑不过是把已经明白的东西告诉人们而已.”美籍匈牙利数学家波利亚说:“直观的洞察和逻辑的证明是感知真理的两种不同方式.……直观的洞察可能远远超前于形式逻辑的证明.”我们在学数学过程中的“心头一亮”、“忽然开窍”,其中就有数学直觉.

就数学学习而言,法国科学院院士狄多涅认为:任何水平的数学教学的最终目的,无疑是使学生对他所要处理的数学对象有一个可靠的“直觉”.以“过直线 AB 上的一点 P,可以作 AB 的一条垂线”为例,他本人对于远比“直觉构思”更为严格的逻辑证明反而“弄不清”,“在好长的一段日子里,证明的概念使我觉得十分神秘”.举个极端的例子,如果有哪位老学究硬要给初中生严格证明“线段中点的存在惟一性”,那肯定会使孩子们感到:你不说我还明白,你越说我反倒越糊涂.事实上,中学数学的学习不仅要学会课本的知识、学会课本知识的严格表达,更要学会数学的精神、思想和方法,这里就不仅仅是逻辑推理.就数学创造能力的培养而言,非逻辑的形象思维与直觉思维是绝对不可忽视的.拿起等腰 $\triangle ABC$,作一个空中的翻转后,可以重合于原来的位置,这就是“等

腰三角形的两个底角相等”的可靠直觉；“b 克糖水中有 a 克糖，若再添上 m 克糖则糖水变甜了”，这是小学生都能明白的道理，它就是高中“真分数不等式”的可靠直觉：

$$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}(b > a > 0, m > 0).$$

对于分不清 $\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$ 的同学，告诉他“空箱子放进空房间，空房不空”，他会终生难忘.

稍有数学实践体会的人都有这样的感受：

(1)在未找到证明之前，直觉先帮助我们对结论或解题方向产生预见.

拿到一道具体的题目，我们首先要确定从何处下手及向何方前进.这时，经验性的直觉预感常常是逻辑所无法替代的.

张奠宙教授在《数学教育学》中对数学直觉先作出数学预见有过精彩的描述：“数学主要是对事物的一种认识、一种理解，数学思想和数学观念，以及与之相联系的数学方法，乃是数学思维的主导方面.任何一种新的数学理论，只靠严谨的逻辑演绎是‘推’不出来的，必须加上生动的思维创造.一旦有了新的想法，采取了新的策略，掌握了新的技巧，数学思维就前进一步.人们的直觉和顿悟，往往已经得出了整个理论的 70%，剩下的 30% 则是逻辑验证.数学史上冠以某数学家名字的猜想、定理、法则，往往并无逻辑证明，逻辑推演是后人补做的.但是人们仍把功劳归于首创者，道理也在这里.”

费马的直觉产生了费马大定理：“$n > 2$ 时，方程 $x^n + y^n = z^n$ 无正整数解.”其思维的跳跃性人类足足花了 300 多年才于近年填平.而哥德巴赫猜想“每个不小于 6 的偶数都是两个素数之和”，甚至使人怀疑人类的智慧是否已经成熟到解决它的程度.

例 1 在异面直线的学习中,我们看到:

1°对异面直线 a_1,a_2,任取 $a_i(1\leqslant i\leqslant 2)$中的每一点 A,都可以作无穷条直线 l 同时与 a_1,a_2 相交,这是一个很平凡的结论.但是再增加一条直线 a_3,使与 a_1,a_2 均成异面直线,是否还存在直线 l 同时与 a_1,a_2,a_3 相交呢?直觉的启示是:过 $A\in a_1$ 而与 a_2 相交的无穷条直线上,会有一条与 a_3 相交.由此得

三异面直线命题:对于空间中两两成异面直线的 a_1,a_2,a_3,存在直线 l 与 a_1,a_2,a_3 同时相交.

沿着"直觉的启示",过 $A(A\in a_1)$与 a_2 的平面 α,最多有 1 个与 a_3 平行,其余的都与 a_3 相交,记交点为 B;平面 α 上的直线 AB,最多有 1 条与 a_2 平行,因而有无穷条直线 AB,同时与 a_1,a_2,a_3 相交(图 1).

这样,直觉就提供了猜想和猜想的证明思路.

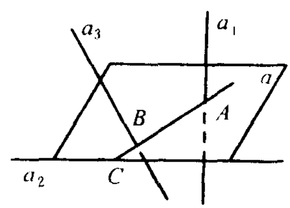


图 1

2°从两异面直线到三异面直线、与之同时相交的直线 l,由"每点有无穷条"(示意为 ∞^∞)递减为"每点最多有 1 条",但直线上有无穷个点(最多去掉 a_1 的两个点),仍得无穷条直线 l(示意为 ∞^1).这两个"无穷条"有本质的区别,按此递减的趋势,可直觉猜想:难以保证两两成异面直线的 a_1,a_2,a_3,a_4 恒存在直线 l 与之同时相交.由此得

四异面直线命题:存在四条两两异面的直线,使得没有任何直线能与之同时相交.

这个猜想我们很早就有了,但简捷的初等证明不久前才找到*.而在这问题思考的全过程中,我们感到始终有一种想象力在牵引着.

(2)在推理面临多种可能性时,直觉帮助我们作出果断的选择.

经验丰富的指挥官,在险峻的形势下,到前沿阵地一看,立即作出布置,仗打胜了.当时的情况,容不得他多作思考,他的方案是一种直觉选择.

在解题中,当证得两个三角形全等之后,下来可推出对应边相等,也可推出对应角相等,还可推出对应高、对应中线、对应角平分线、对应周长、对应面积相等……在各种可能性面前,我们会陷入"布里丹的驴子"那样的困境**.这时,我们常常不是进行一一列举,而是凭直觉作出先后优劣的抉择.即使是一一列举,我们也不是随机安排顺序,仍是凭直觉粗略地排出一二三四.

事实上,"我们的数学活动是在纵横交错的数学关系中进行的,在这个过程中,我们从一种可能性过渡到另一种可能性时,并非完全对每一个数学概念都十分清楚,而是在短时间内朦胧地插上幻想的翅膀,直接飞翔到最优的可能性上,形成人们宝贵的数学直觉的爆发,从而达到对某数学对象的某种本质规律性的领悟."*** 即便一环扣一环的严格的三段论接着三段论,那为什么在

---

* 在直纹曲面的知识背景下,问题是直观而浅显的,但初等证法依然很有趣(参见例 25).

** "布里丹的驴子"是说一头驴子站在两堆同样大小、同样远近的干草之间,因为没有决定吃哪一堆干草而饿死.爱因斯坦曾因他"在数学领域里的直觉能力不够强"而感到"自己的处境像'布里丹的驴子'一样".

*** 吴福能著《数学发现的奥秘——试论数学直觉思维的形式》,《数学通报》1987 年第 7 期.

三段论 A 之后紧接着三段论 B 而不是三段论 C? 这还是需要直觉选择.

下面是一些发生在我们身边的事例,从小学、初中、高中直至大学,其中多有宝贵的数学直觉.

例 2 某县初中招生数学试卷中,有这样一道题:用一张长 30 厘米、宽 20 厘米的长方形铁皮,做一只深 5 厘米的长方体无盖铁皮盒(焊接处与铁皮厚度不计).这只铁皮盒的容积是多少?

在 1000 名考生中,前 999 名考生都认为是在长方形铁皮的四个角上截去边长 5 厘米的正方形铁皮,然后焊接成长方体无盖铁皮盒,如图 2.

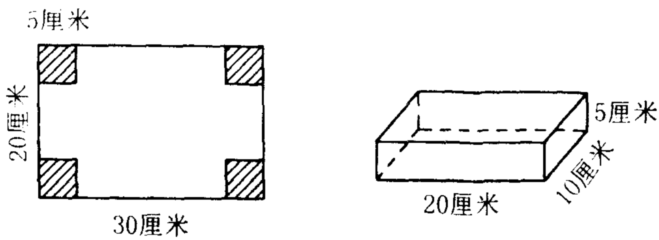


图 2

无盖长方体铁皮盒　长 = 30 − 5 − 5 = 20(厘米),

宽 = 20 − 5 − 5 = 10(厘米),

高 = 5(厘米),

容积 = 20 × 10 × 5 = 1000(立方厘米).

大家一致认为该答案是正确的.当改到最后一份答卷时,却出现了独特的解答.如图 3,

长方体铁皮盒　长 = 30 − 5 = 25(厘米),

宽 = 5 + 5 = 10(厘米),

高 = 5(厘米),