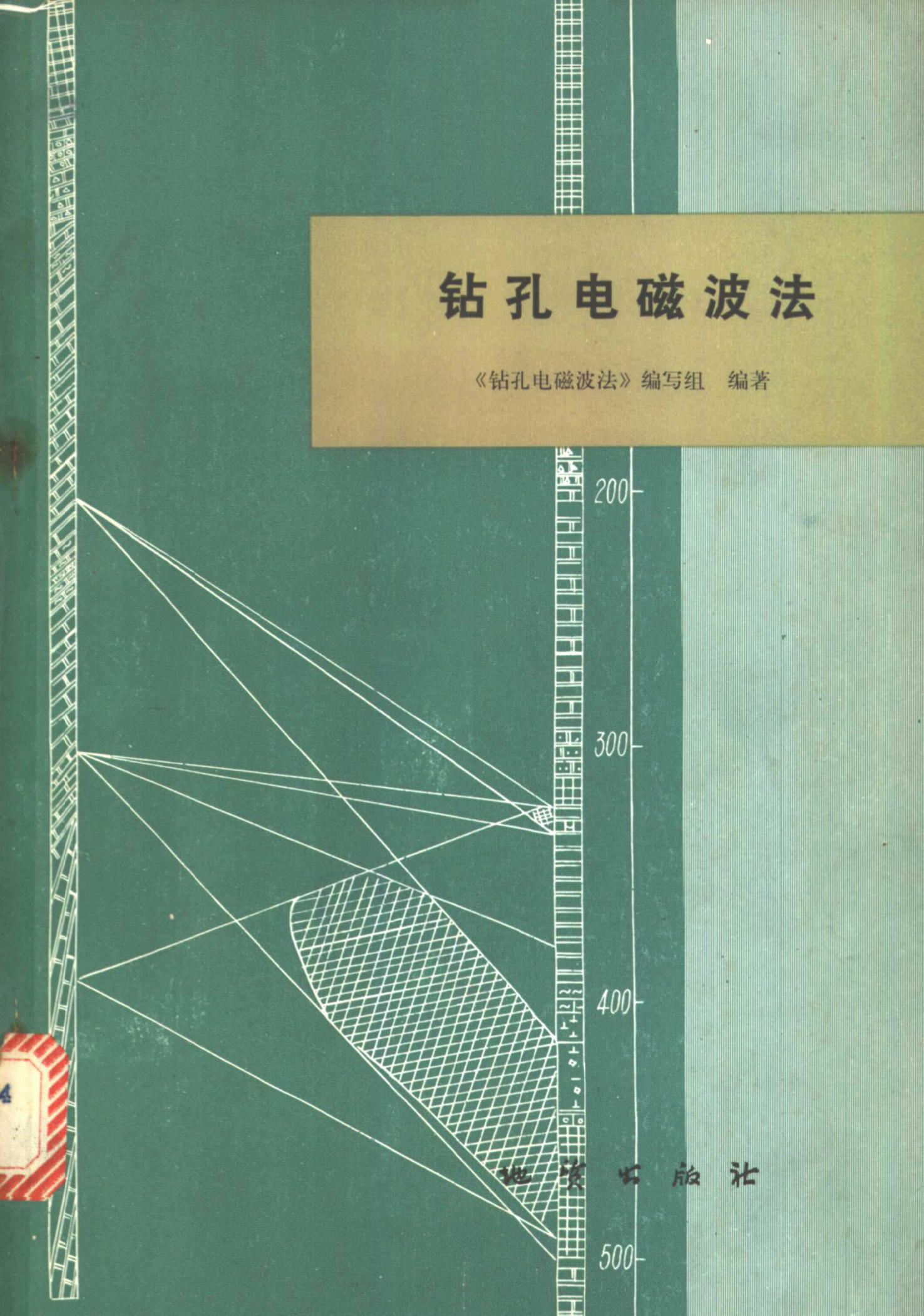


钻孔电磁波法

《钻孔电磁波法》编写组 编著



地质出版社

钻孔电磁波法

《钻孔电磁波法》编写组 编著

地质出版社

钻孔电磁波法
《钻孔电磁波法》编写组 编著

地质部书刊编辑室编辑

责任编辑 张怀素

地质出版社出版

(北京西四)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本：787×1092¹/₁₆ 印张：15¹/₈ 字数：360,000

1982年3月北京第一版·1982年3月北京第一次印刷

印数1—1,630册·定价2.70元

统一书号：15038·新572

前 言

钻孔电磁波法是将电磁波传播理论应用到地质上的一种物理探矿方法。自六十年代初期在我国开始研究以来，经过二十年的实践，无论是方法的理论基础，仪器研制，方法技术以及在铜矿、铬矿、多金属矿、水文工程、岩溶地质的应用等诸方面的研究，都取得了肯定的效果，积累了丰富的经验。为了使方法为广大物探人员掌握与运用，在国民经济建设中发挥它应有的作用，我们编写了《钻孔电磁波法》这本书。这本书的编写既不象教科书那样从最基础的知识开始系统阐述，也不同于论文汇编；书中各篇章既有一定的连续性，又有相对的独立性。全书分方法理论、仪器和方法技术以及实际地质效果诸篇章，读者可根据需要和兴趣选读有关章节。本书适于科研、教学、生产单位的物探专业人员阅读，也适于地质人员选读，对即将开展钻孔电磁波法工作的同志能起指导作用。

本书由吴以仁、邢凤桐同志主编，参加编写的人员按章节顺序有邢凤桐、纪英楠、黄南晖、王惠濂、瞿兴昌、周鹤鸣、邓道元、易永森、吴以仁、沈宝华、王炳玉、佟文琪、徐顺等同志。纪英楠同志对第一篇理论基础进行了校核和修改。书稿完成后，王惠濂、佟文琪、黄南晖等同志对全稿又进行了复审和修改。

在编写过程中得到了有关兄弟部门的支持。编写地质效果一章时，引用了长江规划办公室物探队、广东省物探队、黑龙江省物探队的资料。马俊英同志及勘察技术研究院情报室描图组同志承担了图件清绘工作。在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，加以编写时间仓促，书中难免有缺点与错误，希望读者批评指正。

目 录

第一篇 钻孔电磁波法的理论基础

第一章 均匀无限介质中的电磁场	(1)
§ 1.1 均匀无限、各向同性介质中的电磁场.....	(1)
§ 1.2 均匀无限、各向异性介质中的电磁场.....	(25)
第二章 成层介质中波的传播	(45)
§ 2.1 均匀平面波.....	(45)
§ 2.2 平面波在一个界面上的反射和折射.....	(48)
§ 2.3 平面波在单一地层上的反射和透射.....	(56)
§ 2.4 球面波的反射和折射.....	(61)
§ 2.5 波在地层中的传播.....	(68)
第三章 有限几何体的异常场	(73)
§ 3.1 基本分析方法.....	(73)
§ 3.2 板状体的异常场.....	(85)
§ 3.3 其它几何体.....	(99)

第二篇 钻孔电磁波法的观测设备、观测方法和解释方法

第四章 仪器和方法技术	(108)
§ 4.1 JWT-2A型井中无线电波仪.....	(109)
§ 4.2 JWQ-3型轻便井中无线电波仪	(138)
第五章 方法技术	(143)
§ 5.1 岩矿石高频电磁参数的测定.....	(144)
§ 5.2 工作频率的选择.....	(147)
§ 5.3 观测方式的确定.....	(148)
§ 5.4 天线及其制作.....	(152)
§ 5.5 观测工作程序.....	(157)
第六章 解释方法	(162)
§ 6.1 几种常规解释方法.....	(162)
§ 6.2 异常增强和空间交会法.....	(170)
§ 6.3 视吸收系数剖面法.....	(175)
§ 6.4 层状界面和分层各向异性对测量的影响.....	(179)
§ 6.5 电波资料全息处理法的研究.....	(183)

第三篇 钻孔电磁波法的地质应用

第七章 钻孔电磁波法的地质应用	(199)
§ 7.1 在铜矿床上的应用.....	(199)
§ 7.2 在铁及多金属矿床上的应用.....	(210)
§ 7.3 在铬矿区的应用.....	(218)
§ 7.4 在岩溶探测中的应用.....	(224)

第一篇 钻孔电磁波法的理论基础

第一章 均匀无限介质中的电磁场

§ 1.1 均匀无限、各向同性介质中的电磁场

电磁理论书籍多限于讨论理想电介质或真空（空气）中的电磁场，而钻孔电磁波法讨论的波是在地下岩石介质中传播的，这是一种具有有限电导率的有损耗介质。本节先说明介质的电磁性质，介绍有损耗介质中电磁参数的表示方法及其高频特性；然后从麦克斯韦方程组出发，导出谐变场的方程和场源为电偶极子时的电磁场分布；最后结合实际，阐明电磁波法应用中的一些基本问题。

一、介质的电磁性质

1. 场与介质特性的关系

磁场的基本性质由麦克斯韦方程组描述：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \delta \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

方程组中包括六个电磁量，其名称及在MKS实用单位制中的单位如下：

- \vec{E} ——电场强度（伏/米）；
- \vec{H} ——磁场强度（安/米）；
- \vec{J} ——电流密度（安/米²）；
- \vec{D} ——电感强度或电通密度（库/米²）；
- \vec{B} ——磁感强度或磁通密度（韦/米²）；
- δ ——电荷密度（库/米³）。

其中电流密度和电荷密度之间满足连续性方程，即

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.1.2)$$

因此场方程中实际上只需要前面两个基本量，它们之间的关系由介质的特性决定。这些关系也称为物质方程，一般比较复杂。但在均匀各向同性的“简单介质”中，当 \vec{E} 、 \vec{H} 的时间导数不是很大时，可表示为：

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E}\end{aligned}$$

式中 ϵ 为介电常数, μ 为磁导率, σ 为电导率。如果在介质中场量间存在着简单线性关系, 在较大的频率范围内 ϵ 、 μ 、 σ 保持常数, 则这种介质称为简单介质。在复杂的岩矿石介质中, ϵ 、 μ 、 σ 随场的频率改变。

在有理化实用单位制中, 各种物理量的数值及量纲与静电、静磁单位制有很大不同。需要说明一下它们的单位和物理意义。

在均匀无限介质中, 点电荷 q 在相距 r 处的观测点上产生的场强为:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

由于确定了电场强度的单位为伏/米, 因此介电常数 ϵ 的量纲为:

$$\epsilon = \frac{\text{库}}{\text{伏/米} \cdot \text{米}^2} = \frac{\text{库}}{\text{伏}} \frac{1}{\text{米}} = \text{法/米}$$

实验测定, 真空中 (或空气中) 介电常数的数值为

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{法/米}$$

其他物质的介电常数为:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

式中 $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, 称为相对介电常数, 其值与静电单位制中的介电常数值相同。

由上式可见, 均匀无限介质中的电场比空气中减小了 ϵ_r 倍, 这是由于在电场的作用下介质极化的结果。以平行板电容器为例 (图1.1.1), 电容器极板上的电荷在极板间产生均匀电场。由于介质极化, 在表面上出现了反号的感应电荷, 削弱了原有的电场。

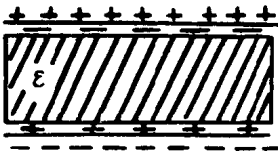


图 1.1.1 电介质对电场的影响

点电荷 q 在均匀无限介质中产生的电感强度

$$D = \epsilon E = \frac{q}{4\pi r^2} \text{库/米}^2$$

所以在均匀无限的介质中, D 只由自由电荷的分布决定 (在任意情况下, \vec{D} 的散度由自由电荷密度 δ 决定)。从量纲上看, \vec{D} 对时间的导数和电流密度相同。实验表明, 它和传导电流一样也产生磁场, 因此

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{安/米}^2$$

称为位移电流密度。

对谐变场 (场强随时间作正弦或余弦式变化), 场强表示为

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{-j\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_m e^{-j\omega t} \quad (1.1.4)$$

式中 \vec{E}_m 、 \vec{H}_m 为场强的幅值。谐变场的位移电流

$$\vec{J}_D = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -j\omega \epsilon \vec{E}$$

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ 关系式是欧姆定律的微分形式, 式中 \vec{J} 是传导电流密度; σ 的单位为姆欧/米,

其倒数为电阻率，单位为欧姆米。由 \vec{J} 、 \vec{J}_D 与场强的关系可知，传导电流和电场同相位，位移电流则超前于电场 90° 。

传导电流和位移电流的总和称为全电流 \vec{J}_T 。对谐变场

$$\begin{aligned}\vec{J}_T &= \vec{J} + \vec{J}_D \\ &= \sigma \vec{E} - j\omega \epsilon \vec{E} \\ &= -j\omega \left(\epsilon + j \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} \\ &= -j\omega \tilde{\epsilon} \vec{E}\end{aligned}\quad (1.1.5)$$

式中 $\tilde{\epsilon} = \epsilon + j \frac{\sigma}{\omega}$ ，称为复介电常数。它相当于电阻、电容并联线路的复导纳。

电流元 $I d\vec{l}$ 在距离为 r 处产生的磁场为：

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

根据计算，螺线环中的磁场为 nI (n 为每米长度上的匝数)，故磁场的单位为安/米。磁感强度 (磁通密度) 的单位是根据法拉第定律确定的，具有伏·秒/米² 的量纲，因此磁导率的单位为：

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{\text{伏} \cdot \text{秒} / \text{米}^2}{\text{安} / \text{米}} = \frac{\text{伏} \cdot \text{秒}}{\text{安} \cdot \text{米}} = \text{亨} / \text{米}$$

据测定，在真空或空气中的导磁系数为：

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{亨} / \text{米}$$

其他物质的磁导率为：

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

式中 μ_r 称为相对磁导率。

在螺线环中充填导磁系数为 μ 的介质时，磁感强度比空心时增加了 μ_r 倍，这是由于在外磁场的作用下介质被磁化的结果。

2. 高频电磁场中的介质损耗

在电场作用下，电介质中的电偶极子顺着电场的方向排列，形成介质极化。由于偶极子的取向需要一定时间 (弛豫时间)，因此在高频电场中出现了极化的滞后现象，即电场和感应偶极矩之间出现了相位差。此时，介电常数需用复数表示，并与场的频率有关

$$\epsilon_f = \epsilon'_f + j\epsilon''_f \quad (1.1.6)$$

式中 ϵ'_f 表示在给定的频率上介质的固有极化； ϵ''_f 表示介电损耗，即一部分能量用于强迫偶极子转向，结果变为热能消耗掉。

与此类似，在磁介质中也有磁损耗存在，这是因为分子电流的取向也有一定的滞后时间。这时，磁导率表示为

$$\mu_f = \mu'_f + j\mu''_f \quad (1.1.7)$$

式中 μ'_f 表示在给定的频率上介质的固有磁导率； μ''_f 表示磁滞损耗。

由于电荷运动的惯性，传导电流和电场之间也有滞后现象，但在钻孔电磁波法所用频段中 (几十兆赫以内)，这种滞后现象不明显，因此不讨论。

在高频场中，复介电常数变为：

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_f &= \epsilon'_f + j \left(\epsilon''_f + \frac{\sigma}{\omega} \right) \\ &= \epsilon_{\text{有效}} + j \frac{\sigma_{\text{有效}}}{\omega}\end{aligned}\quad (1.1.8)$$

式中 $\epsilon_{\text{有效}}$ 和 $\sigma_{\text{有效}}$ 与介质极化的弛豫时间有关。当频率很高时，介质的有效介电常数减小，而有效电导率增加。

3. 岩矿石的电磁参数

(1) 电阻率

电阻率是决定电磁波在地下吸收介质中传播特性的主要参数，其值决定于岩矿石的化学成分和结构特征，如孔隙度、含水饱和度等因素。多种影响因素决定了同种岩石的电阻率可以在很宽的范围内变化。比如砂岩的电阻率，由于含水饱和度的不同和水溶液矿化度的不同，其变化范围由零点几欧姆米变到几千欧姆米。但一般来说，同一种岩石在相同的埋藏条件下，其电阻率的变化范围并不很大，因此通常所说的某种岩矿石的电阻率值也就反映了它的主要变化范围。

从实际资料分析，岩石电阻率降低的原因可能三个：(1) 有良导矿物存在（如黄铁矿、黄铜矿、方铅矿、闪锌矿、磁铁矿等），例如致密硫化矿体的电阻率只有几十欧姆米，甚至小到百分之几欧姆米，而浸染状矿体的电阻率可由几个欧姆米到几百欧姆米；

(2) 具有大的孔隙度和高的溶液矿化度，可导致电阻率下降几个级次；(3) 含有泥质颗粒，可使电阻率降到零点几欧姆米。此外，还有其他人为和自然因素使岩石电阻率下降。岩石电阻率升高的原因可能是：冻结，可使电阻率升高几个级次；溶液矿化度降低。

(2) 介电常数

这个参数对电磁场的振幅和相位的影响只在较高的频段和介质具有较高电阻率时才明显地表现出来。

大部分岩矿石的相对介电常数在4—15之间变化，唯独水的相对介电常数高达81。因此岩矿石在不同的含水饱和度的情况下， ϵ_r 相差很大， ϵ_r 值随含水饱和度的增加而很快上升。

(3) 磁导率

一般无磁性或弱磁性岩石的磁异常 $\mu \approx \mu_0$ ，磁损耗为零。只在磁性矿体上磁导率才有明显变化。对于磁性矿物，其磁导率的变化范围为： $\mu_0 \leq \mu \leq (2\mu_0 \sim 12\mu_0)$ ，磁损耗也就在这时发生。

常见矿物和岩矿石的电磁参数见表1.1.1。

岩矿石的电磁参数随频率的改变而变化，即所谓频散现象，是需要研究的一个重要问题。野外观测和实验室标本测量的结果都说明，岩矿石电磁参数与频率有关。苏联 A. B. 维谢夫对大理岩、斑状石灰岩和粒状大理岩三种标本的测定结果（图 1.1.2）表明：频率低时，岩石的电阻率很高，且无明显变化；频率 $f = 10^5 \sim 10^6$ 赫时，电阻率下降一个级次；频率增高到 10^7 赫以上时，电阻率相应地减小两个级次以上。

不同岩石标本的介电常数与频率的关系示于图 1.1.3。图中还给出了检查测量用的标准石英的 ϵ_r 与频率的关系（平行横轴的直线）。结果说明：随着频率的增加，岩石的介电常数减小。另外，还对粒状大理岩、斑状石灰岩及大理岩的标本作了测定。结果说明：频

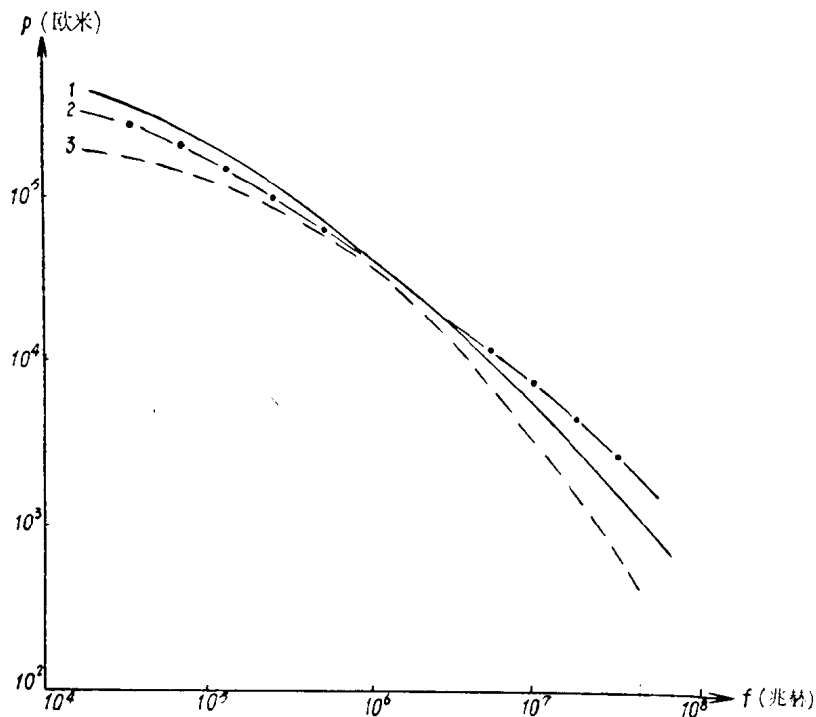


图 1.1.2 岩石电阻率随频率的变化
1—斑状石灰岩；2—粒状大理岩；3—大理岩

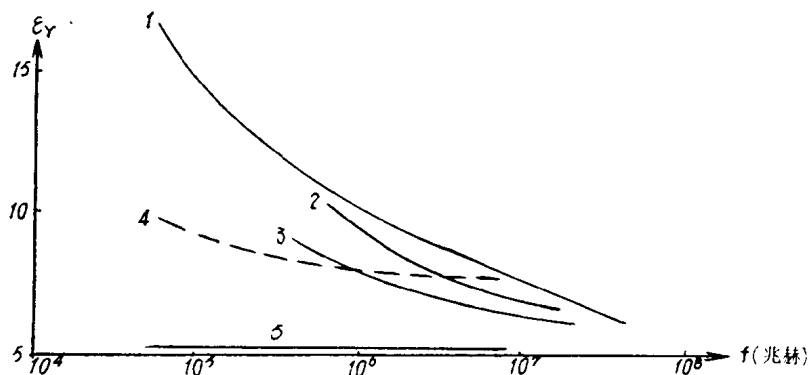


图 1.1.3 岩矿石的相对介电常数随频率的变化
1—碱性花岗岩；2—白云母斑状花岗岩；3—花岗岩；4—白云母花岗岩；5—石英

率在 $5 \times 10^0 \sim 5 \times 10^7$ 赫范围内，碳酸盐类的岩石标本几乎观测不到 ϵ_r 的变化。

除前述高频时介质极化的滞后现象外，岩矿石频率分散性的一个更重要原因是因为一般岩矿石是由多种物质成分组成的。为便于说明，设岩矿石是由一种立方块状的颗粒和均匀包围它的另一种物质所组成（图1.1.4a）。在交变电场的作用下，岩矿石的有效电阻率和有效介电常数除决定于各种成分本身的电参数和相对含量外，由于介质的不同组合对交变电场而言相当于一定的阻抗，所以 $\epsilon_{\text{有效}}$ 和 $\sigma_{\text{有效}}$ 还必然与频率有关。这可以通过图1.1.4b的等效电路的计算来说明。譬如，在浸染状矿石中金属矿物颗粒被不导电的物质所包围， $\rho_1 = \infty$ ，在等效电路中 $R_1 = R_2 = \infty$ 。这时对于直流电来说，虽然金属矿物的导电性好，但

被不导电的物质所隔离，故矿石的电导率为零。但对于交流电来说，金属矿物颗粒的导电性将起作用，且随着等效电容 C_1 阻抗的减小，其作用愈显著。因此，随着频率的升高，矿石的有效电阻率将愈来愈小。同样，当 ϵ_1 较 ϵ_2 大得多时，矿石的有效介电常数也随频率的增高而减小。

二、电磁场方程及波动方程

1. 麦克斯韦方程组和电磁场的波动方程

在无源介质中描述电磁现象的麦克斯韦方程组是：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.9)$$

其中第一式为广义的安培定律，即电流产生磁场，而磁场是由传导电流和位移电流共同产生的。第二式为法拉第定律，即磁场的变化产生电场。第三式说明磁感强度是无源的，实际的“磁荷”并不存在。第四式表示了除源点以外的介质中不存在电荷。在谐变场中：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= -j\omega \left(\epsilon + j\frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} = -j\omega \tilde{\epsilon} \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} &= j\omega \mu \vec{H} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.10)$$

对于有源的情形，如果介质是均匀的，方程组可写为：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} - j\omega \tilde{\epsilon} \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} &= j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.11)$$

这里源点的电荷密度 σ 与电流密度 \vec{J} 是外加的，它们之间的关系由连续性方程(1.1.2)确定。在有源介质中，增加了由源电流产生的磁场以及由源电荷产生的电场。后者是无旋度的，电力线起始或终止于电荷。显然，上列方程组的各方程式之间是密切相关的。由此出发，求出 \vec{E} 、 \vec{H} 所满足的方程式，就可看出 \vec{E} 、 \vec{H} 满足波动方程。

对(1.1.11)的第一式、第二式两边求旋度，利用矢量恒等式

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \\ \nabla \times \nabla \times \vec{H} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} \end{aligned}$$

把(1.1.11)的第三式、第四式代入，即得

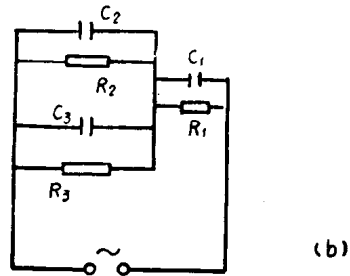
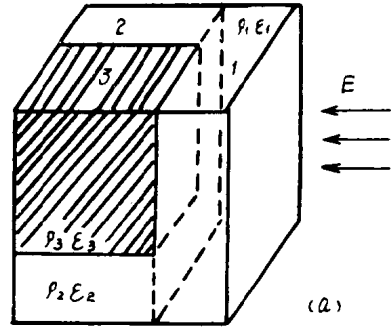


图 1.1.4 岩矿石的结构及其高频等效电路

$$-\nabla^2 \vec{E} = j\omega\mu \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \sigma$$

$$-\nabla^2 \vec{H} = \nabla \times \vec{j} - j\omega \tilde{\epsilon} \nabla \times \vec{E}$$

再把 (1.1.11) 的第一, 第二式代入, 得到

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \tilde{\epsilon} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \sigma - j\omega \mu \vec{j} \quad (1.1.12)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu \tilde{\epsilon} \vec{H} = -\nabla \times \vec{j} \quad (1.1.13)$$

这就是 \vec{E} 和 \vec{H} 应满足的波动方程。它说明交变电磁场是以波的形式变动的。

但是, 在一般情况下直接由 (1.1.12) 和 (1.1.13) 求解 \vec{E} 、 \vec{H} 比较困难, 常常要通过引入某种位函数间接解 \vec{E} 、 \vec{H} 。在电磁场问题中, 根据不同的具体条件 (如源的分布特点、介质性质和界面的情况等) 选用不同的位函数, 可以较方便地解出场的分布。由于本书只讨论电天线的场, 因此本节主要介绍磁矢位和赫兹矢量。

2. 矢量位 \vec{A} 和标量位 φ 的方程

在静电问题中引入位函数 φ 求解静电场是很方便的, 只要由泊松方程 (有源空间) 或拉普拉斯方程 (源以外的空间) 求得 φ , 就可由 $\vec{E} = -\nabla \varphi$ 求得场强 \vec{E} ; 在静磁问题中, 利用磁矢位 \vec{A} 求 \vec{B} 也同样方便。与静场问题相似, 对于谐变场也可引入一个矢量位函数 \vec{A} 和一个标量位函数 φ 以求解场强。

现在, 在谐变场的情况下引入 \vec{A} 和 φ , 并从麦克斯韦方程出发, 导出 \vec{A} 、 φ 应满足的方程。

由方程组 (1.1.9) 的第三式可知, \vec{B} 一定可以表为某个矢量函数 \vec{A} 的旋度

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.1.14)$$

这是因为 $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} \equiv 0$ 。此处 \vec{A} 即为引入的矢量位函数。将 (1.1.14) 式代入方程组 (1.1.11) 的第二式, 得

$$\nabla \times \vec{E} = j\omega \nabla \times \vec{A} \quad (1.1.15)$$

即 $\nabla \times (\vec{E} - j\omega \vec{A}) = 0$

因为对任意函数 φ 有 $\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$, 故在上式中可令

$$\vec{E} - j\omega \vec{A} = -\nabla \varphi$$

式中 φ 为引入的标量位函数。于是

$$\vec{E} = -(\nabla \varphi - j\omega \vec{A}) \quad (1.1.16)$$

代入方程组 (1.1.11) 的第四式, 得

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi - j\omega \vec{A}) = \nabla^2 \varphi - j\omega \nabla \cdot \vec{A} = -\sigma / \epsilon \quad (1.1.17)$$

将 (1.1.14) 及 (1.1.16) 式代入方程组 (1.1.11) 的第一式, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A} + j\omega \tilde{\epsilon} \vec{E} &= \frac{1}{\mu} [\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}] + j\omega \tilde{\epsilon} \vec{E} \\ &= \frac{1}{\mu} [\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}] - j\omega \tilde{\epsilon} (\nabla \varphi - j\omega \vec{A}) \\ &= \nabla \left(\frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{A} - j\omega \tilde{\epsilon} \varphi \right) - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{A} - \omega^2 \tilde{\epsilon} \vec{A} \\ &= \vec{j} \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

由于只有 $\nabla \times \vec{A}$ 有物理意义, 因而 \vec{A} 的散度可根据方便任选(在静场里选 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$), 这里为简化上式, 规定

$$\nabla \cdot \vec{A} = j\omega\mu\tilde{\epsilon}\varphi \quad (1.1.19)$$

这个条件称为洛仑兹条件。于是 (1.1.18) 式成为

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2\mu\tilde{\epsilon}\vec{A} = -\mu\vec{J} \quad (1.1.20)$$

而对 (1.1.17) 式应用洛仑兹条件, 则得

$$\nabla^2\varphi + \omega^2\mu\tilde{\epsilon}\varphi = -\sigma/\epsilon \quad (1.1.21)$$

(1.1.20) 和 (1.1.21) 两式即为 φ 、 \vec{A} 两量应满足的方程, 它们也呈波动方程的方式。这就是以 φ 、 \vec{A} 表示的电磁波动方程。

(1.1.20) 和 (1.1.21) 两式中的 $\omega^2\mu\tilde{\epsilon}$ 一项常以 k^2 表示, 即

$$k = \omega\sqrt{\mu\tilde{\epsilon}} \quad (1.1.22)$$

波动方程的这个系数, 称为传播常数。由于 $\tilde{\epsilon}$ 是复数, 故 k 也是复数。但当介质为非导体时, 则 $\sigma=0$, $\tilde{\epsilon}=\epsilon$, 传播常数

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{v} \quad (1.1.23)$$

如为真空或空气, 则 $\epsilon=\epsilon_0$, $\mu=\mu_0$, 传播常数

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{\omega}{v_0} \quad (1.1.23a)$$

式中 v_0 为空气或真空中波速, 它等于 3×10^8 米/秒, 即光速。这样, 导电介质与非导电介质波动方程的差别仅仅在于前者 k 值中的介电系数为复数, 后者则为实数。

引入 k 后, \vec{A} 和 φ 的方程可表为

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu\vec{J} \quad (1.1.20a)$$

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = -\sigma/\epsilon \quad (1.1.21a)$$

3. 赫兹矢量及其方程式

从 (1.1.19) 式的洛仑兹条件 $\nabla \cdot \vec{A} = j\omega\mu\tilde{\epsilon}\varphi$ 可以看出, 上面引进的矢量位 \vec{A} 和标量位 φ 之间是有一定关系的。引进一个和 \vec{A} 与 φ 有关的新的矢量函数, 可以用一个方程代替 (1.1.20) 和 (1.1.21) 式, 在某些情况下能更方便地解出电磁场问题。下面说明应如何引进这个新的矢量函数 $\vec{\Pi}$, 以及它所满足的方程。

由洛仑兹条件可以看出, 如果按下列关系定义一个矢量函数 $\vec{\Pi}$:

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &= -j\omega\mu\tilde{\epsilon}\vec{\Pi} \\ \varphi &= -\nabla \cdot \vec{\Pi} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.24)$$

则洛仑兹条件自然满足。这样规定的矢量函数 $\vec{\Pi}$ 称为赫兹矢量。

现在由 \vec{A} 、 φ 的方程出发, 导出 $\vec{\Pi}$ 应满足的方程式。把 (1.1.24) 式的 \vec{A} 与 $\vec{\Pi}$ 的关系代入 (1.1.20a) 式左端, 得

$$-j\omega\mu\tilde{\epsilon}(\nabla^2\vec{\Pi} + k^2\vec{\Pi})$$

再看该式右方, 可以把组成场源的每个电流元看作偶极子 (如果场源本身是偶极天线, 则更方便), 每个偶极子端点电荷的振荡式变化与电流的关系应为 $I = \frac{dq}{dt} = j\omega q$, 电流元

$I\Delta l$ 与由它形成的偶极矩 \vec{p} 之间的关系为

$$\vec{p} = q \Delta l = \frac{I}{-j\omega} \Delta l$$

改用场源的电流密度（又称激励电流密度） \vec{J} 表示时

$$\vec{p} = \frac{\vec{J} \Delta S \Delta l}{-j\omega} = \frac{\vec{J} \Delta V}{-j\omega}$$

所以

$$\vec{J} = -j\omega \frac{\vec{p}}{\Delta V} = -j\omega \vec{P}$$

\vec{P} 为场源的单位体积的偶极矩，即极化强度，把这个结果也代入 (1.1.20a) 式，得

$$-j\omega \tilde{\epsilon} \mu (\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi) = -\mu \vec{J} = j\omega \mu \vec{P}$$

所以

$$\nabla^2 \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi} = -\frac{\vec{P}}{\tilde{\epsilon}} \quad (1.1.25)$$

因此 $\vec{\Pi}$ 的方程在形式上与 \vec{A} 的方程完全相同，解的方法与形式也相同，只要把 \vec{A} 的解中的 \vec{J} 换为相应的 \vec{P} 即可。对某些情况，特别是当场源为偶极子时，用 $\vec{\Pi}$ 来求解场的问题比较方便。

根据 (1.1.24) 以及 (1.1.14) 和 (1.1.16) 式，可得谐变场的 \vec{E} 、 \vec{H} 与 $\vec{\Pi}$ 的关系：

$$\vec{H} = -j\omega \tilde{\epsilon} \nabla \times \vec{\Pi} \quad (1.1.26)$$

$$\vec{E} = \omega^2 \mu \tilde{\epsilon} \vec{\Pi} + \nabla(\nabla \cdot \vec{\Pi}) \quad (1.1.27)$$

求得 $\vec{\Pi}$ 后，就可由以上两个关系求 \vec{E} 、 \vec{H} 。

至此，共得出了关于 \vec{E} 、 \vec{H} 、 \vec{A} 、 φ 和 $\vec{\Pi}$ 的三组场方程式。三者都是非齐次波动方程，又称为达朗贝尔方程。如前所述，一般不是直接解 \vec{E} 、 \vec{H} 的方程（ \vec{E} 、 \vec{H} 的方程右端比较复杂），而是解 \vec{A} 、 φ 的方程 (1.1.20a)、(1.1.21b)，然后由 (1.1.14) 和 (1.1.16) 式求 \vec{E} 、 \vec{H} ；或解 $\vec{\Pi}$ 的方程 (1.1.25)，然后用 (1.1.26) 和 (1.1.27) 式求出 \vec{E} 、 \vec{H} 。

因为钻孔电磁波法目前主要使用电天线，所以下面由 \vec{A} 、 φ 的方程出发，解均匀各向同性介质中电偶极子的场问题（ $\vec{\Pi}$ 的方程形式和解法相同，下节中将用 $\vec{\Pi}$ 解各向异性介质中电偶极子场的问题）。在本节的最后再说明半波偶极天线的场。

三、电偶极子的场

1. 电偶极子的场

由矢量位 \vec{A} 和标量位 φ 求场的分布时，一般先由 \vec{A} 的方程 (1.1.20) 解出 \vec{A} ，再根据 (1.1.14) 求 \vec{H} ，根据 (1.1.16)、(1.1.19) 求 \vec{E} 。但这里不拟直接解 (1.1.20) 式，而是根据静磁场中 \vec{A} 的解推测电磁场中 \vec{A} 的形式。如果推测的结果满足 (1.1.20) 式，则它就是所求的解。

在稳定电流形成的磁场中，矢量位 \vec{A} 应为泊松方程 $\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$ 之解，即

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}}{r} dV \quad (1.1.28)$$

这是以源电流表示的矢量位，式中 r 是电流源到观测点的距离，积分应遍历全部有源空间的体积 τ 。显然，这个解答只能用于电流达到稳定之后。当天线中的电流变化时，附

近的磁场 (\vec{H} 和 \vec{A}) 也会发生变化。由于在天线以外的空间 \vec{A} 满足 $\nabla^2 \vec{A} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{A} = 0$, 因此在天线以外各处 \vec{A} 的变化以波动的方式传播出去。这样从电流开始变化到变化终了, 天线附近的磁场也经历一种行波式的变化 (对于距离充分近的各点, 任意时刻的磁场可近似看作该时刻的电流分布的稳态; 从一段时间来看, 这些点的 \vec{A} 经历了与 \vec{J} 的变化相应的变化过程)。空间各处的电磁位均受这一变化的影响, 但距离较远处须经一段有限时间后才受到电流变化的影响。或者说, 距天线为 r 的某处在某一时刻的矢量位 (以及电磁场) 并不由该时刻天线内的电流和电荷决定, 而是由早于该时刻 ($t - \frac{r}{v}$, v 为波在介质中行进的速度) 的天线电流和电荷分布决定。这就象我们所见遥远星球的光是若干年以前该星球发出的光一样。于是可以推测, 交变场的解应具有 (1.1.28) 式的形式, 但应包含一个时间滞后因素, 即 (1.1.20) 式的解应为

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} d\tau \quad (1.1.29)$$

积分号内的分子项是表示电流密度 \vec{J} 为 $\left(t - \frac{r}{v}\right)$ 的函数。矢量位 \vec{A} 因此也叫做“推迟位”, 因为它包含时间滞后的概念。这里需要注意的是, \vec{A} 与 \vec{J} 的方向一致。尚需说明的是, 对于空气或真空来说, 式中 v 即为 v_0 , μ 为 μ_0 。由 (1.1.23) 式, \vec{A} 可写成

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}\left(t - \frac{k}{\omega} r\right)}{r} d\tau \quad (1.1.30)$$

同样, 当介质具有导电性时, \vec{A} 值仍如上式表示, 只是其中 k 值改如 (1.1.22) 式。

现在由解得的 \vec{A} (1.1.26 式) 求偶极子的电磁场。

设均匀无限介质中有一偶极子天线, 取其中点为球坐标系的原点, 使 z 轴沿偶极子方向 (图 1.1.5)。若偶极子长度为 l , 其上流过的电流强度为 $I = I_m e^{-i\omega t}$, 则电流元应

写为 $I dz$, 偶极子在 P 点的推迟矢位根据 (1.1.26) 式为

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{I e^{-i\omega\left(t - \frac{k}{\omega} r\right)}}{r} dz$$

如果 l 对于观测点距离 r 和波长均很小, 则积分号内被积函数的分母及分子均可看作常数, 于是

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Il e^{-i\omega\left(t - \frac{k}{\omega} r\right)}}{r} \quad (1.1.31)$$

这里 r 可取偶极子天线中点到观测点的距离。

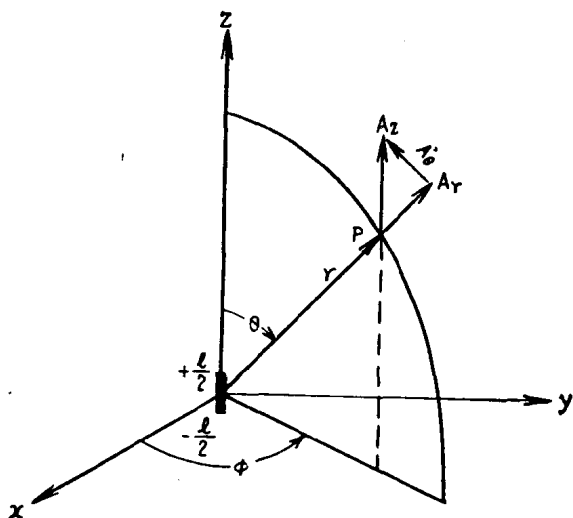


图 1.1.5 偶极子的矢量位

A_z 在球坐标系中的分量为

$$\left. \begin{aligned} A_r &= A_z \cos \theta = \frac{\mu I l}{4\pi r} e^{-j\omega\left(t - \frac{k}{\omega} r\right)} \cos \theta \\ A_\theta &= -A_z \sin \theta = \frac{\mu I l}{4\pi r} e^{-j\omega\left(t - \frac{k}{\omega} r\right)} \sin \theta \\ A_\phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.32)$$

根据(1.1.14)式求 \vec{A} 的旋度,即可得P点磁场的三个分量 H_r 、 H_θ 、 H_ϕ ,从而得出该点的磁场强度 H :

$$H_r = \frac{1}{\mu r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cdot A_\phi) - \frac{1}{\mu r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r A_\theta) = 0 \quad (1.1.33)$$

$$H_\theta = \frac{1}{\mu r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} A_r - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \cdot A_\phi) = 0 \quad (1.1.34)$$

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \\ &= \frac{I l e^{-j\omega t}}{4\pi} \left(\frac{-jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{jkr} \sin \theta \end{aligned} \quad (1.1.35)$$

P点的电场可由(1.1.16)式及(1.1.19)式求得:

$$\vec{E} = -\frac{1}{j\omega\epsilon\mu} \nabla \nabla \cdot \vec{A} + j\omega \vec{A} \quad (1.1.36)$$

由于 $\nabla \nabla \cdot \vec{A}$ 的三个分量分别为

$$(\nabla \nabla \cdot \vec{A})_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) \right]$$

$$(\nabla \nabla \cdot \vec{A})_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) \right]$$

$$(\nabla \nabla \cdot \vec{A})_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) \right]$$

故得

$$E_r = \frac{I l e^{-j\omega t}}{2\pi\omega\epsilon} \left(\frac{k}{r^2} + \frac{j}{r^3} \right) e^{jkr} \cos \theta \quad (1.1.37)$$

$$E_\theta = \frac{I l e^{-j\omega t}}{4\pi\omega\epsilon} \left(\frac{-jk^2}{r} + \frac{k}{r^2} + \frac{j}{r^3} \right) e^{jkr} \sin \theta \quad (1.1.38)$$

$$E_\phi = 0 \quad (1.1.39)$$

至此, \vec{E} 、 \vec{H} 的全部分量都已求出,把它们表为 kr 的函数,重列于下:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{k^3 I l e^{-j\omega t}}{2\pi\omega\epsilon} \left[\frac{1}{(kr)^2} + \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{jkr} \cos \theta \\ E_\theta &= \frac{k^3 I l e^{-j\omega t}}{4\pi\omega\epsilon} \left[\frac{-j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} + \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{jkr} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.1.40)$$

$$H_{\phi} = \frac{k^2 I l e^{-j\omega t}}{4\pi} \left[\frac{-j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{jkr} \sin \theta$$

E_r 、 E_{θ} 、 H_{ϕ} 三个量的关系如图1.1.6所示

2. 感应场和辐射场

(1.1.40)式就是有损耗的均匀无限介质中偶极子场的分布公式。它表明电场只有两个

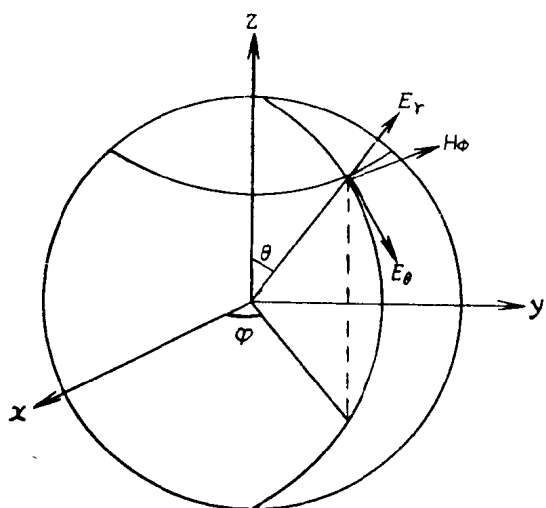


图 1.1.6 球坐标系中 E_r 、 E_{θ} 、 H_{ϕ} 的关系

分量，其合成矢量 \vec{E} 总在观察点的矢径 \vec{r} 与偶极子轴线所构成的平面（称为过该点的子午面）内；磁场则只有一个分量，它的方向总是垂直于子午面。

从公式可以看出，三个分量与距离的关系不尽相同，当 kr 很小时，各式中的高次项较低次项重要，故可只保留末项而略去其他项，同时， $e^{jkr} \rightarrow 1$ ，故近似有：

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{jIl}{2\pi\omega\epsilon r^3} e^{-j\omega t} \cos \theta \\ E_{\theta} &= \frac{jIl}{4\pi\omega\epsilon r^3} e^{-j\omega t} \sin \theta \\ H_{\phi} &= \frac{Il}{4\pi r^2} e^{-j\omega t} \sin \theta \end{aligned} \right\} (1.1.41)$$

可见这时磁场与电流强度为 $Ie^{-j\omega t}$ 、长度为 l 的电流元的磁场相同；由 $q = \int Ie^{-j\omega t} dt$ ，

可得天线中电流强度与端点电荷的关系为 $q = \frac{-Ie^{-j\omega t}}{j\omega}$ ，代入(1.1.41)式得

$$\frac{ql}{2\pi\epsilon r^3}, E_{\theta} = \frac{ql}{4\pi\epsilon r^3}, \text{ 即与静电偶极子的电场在形式上完全相同（但这里 } q \text{ 实际是谐变的）}.$$

由(1.1.41)式还可看出，电场与磁场间有 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差，即当电场（或磁场）达到最大值时，磁场（或电场）恰为零，且平均能流密度矢量 \vec{S} 为零。这表明在 kr 很小的区域，能量在电场与磁场间互相交换而不向外辐射（注意：这是根据场强的近似公式得到的结论）。这个区域称为感应区。

当 kr 很大时，(1.1.40)式的各分量中 kr 的低次方项较为重要，故可保留一次方项而略去其他项，并且 E_r 与 E_{θ} 相比也可忽略。于是场强的近似表达式为

① 波在空间传播时，必然携带能量前进，例如无线电波将能量从发射机带到接收机。波的能量以通过单位面积的功率（单位瓦/米²）表示，它等于 $\vec{E} \times \vec{H}$ ，是一与 \vec{E} 、 \vec{H} 垂直的矢量，称为能流密度矢量或坡印亭矢量，通常用 \vec{S} 表示， $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 。