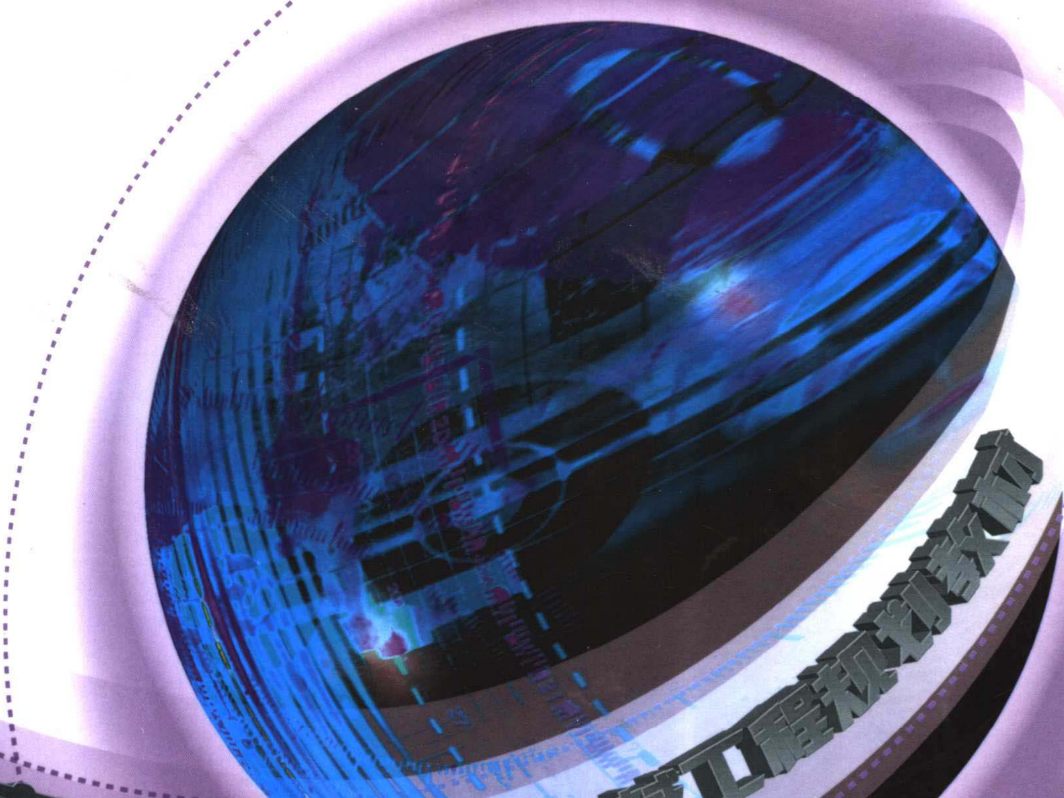
新世纪高校机械工程规划教材

GAOXIAO GUIHUA JIAOCAO

高校机械工程规划教材 新世纪

机械优化设计

主编　方世杰　綦耀光



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

新世纪高校机械工程规划教材

机 械 优 化 设 计

主　编　　方世杰　綦耀光

副主编　　朱东华　曲庆文　李　莉

参　编　　张　磊　姜好德

主　审　　谭继文

机 械 工 业 出 版 社

本书介绍了优化设计的基本理论、基本方法和应用程序。全书共分八章，介绍了优化设计的基本术语和数学模型建立、必要的数学基础、无约束优化方法、约束优化方法、线性规划、多目标的离散变量、优化设计方法和优化方法应用实例。书中附有两个附录，附录 A 给出常用优化设计方法的考核题，附录 B 给出了常用优化设计方法的源程序的使用说明。本书具有良好的通用性和先进性。

本书是高等学校的理工类专业教材，内容具有一般性和基础性，也可以作为学生拓宽专业面的选修课程教材。

图书在版编目（CIP）数据

机械优化设计/方世杰，綦耀光主编. 一北京：机械工业出版社，2003.7

新世纪高校机械工程规划教材

ISBN 7-111-12083-3

Ⅰ.机… Ⅱ. ① 方 … ② 綦 … Ⅲ.机械设计：最优设计一高等学校一教材 Ⅳ.TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 034346 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：高文龙 王世刚

封面设计：姚 毅 责任印制：闫 焱

北京交通印务实业公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

1 000mm×1 400mm B5·7.25 印张·282 千字

定价：19.00 元

新世纪高校机械工程规划教材

编审委员会

前　　言

优化设计是随着电子计算机迅速发展和广泛应用，迅速发展起来的一种现代设计方法。它的基本思想是：按照生产实际的需要，根据设计理论、方法和国家标准，把实际问题转化成数学模型，然后采用优化方法找出最佳设计方案或比较完善的结果。优化设计理论和计算技术应用于设计领域，为工程设计提供一种重要的科学设计方法。因此，优化设计理论和方法被广泛应用于各行各业。

本教材的编写是以教育部全面推进素质教育，重在培养学生的创新精神和实践能力的教育思想为指导，更新教育观念，坚持“强化基础，恰当拓宽，提高综合能力”的原则，加强学生的综合素质和计算机应用能力的培养，与时俱进不断转变教学思想与教学内容的调整，向以“知识、技能、方法、能力、素质”综合培养目标的教育体系转化。

本书秉承了多学科“优化设计”的经验和特色，并充分运用现代设计思想和理念，将“基本设计方法”与“优化设计思想”紧密结合，着重介绍优化设计的基本概念、基本原理和基本方法，给出了优化设计方法的实用程序，使学生在学习“优化设计方法”的同时，也能够在计算机上得到实际应用的训练，进而培养他们创新能力和科学思维的方法。

本书具有如下的特色：

1）介绍了优化设计方法的原理和应用程序，实用性强；

2）机械等多学科的应用，具有较广泛的使用性；

3）知识结构系统，内容丰富，重点突出；

4）将计算机辅助设计与优化设计方法实例有机结合在一起，针对性，使用性强；

5）有利于培育学生多学科交叉的创造性思维能力。

参加本书编写的有，主编：方世杰（烟台大学）、綦耀光（石油大学）；副主编：朱东华（哈工大威海分校）、曲庆文（山东理工大学）、李莉（烟台大学）；参编：张磊、姜好德。

编写分工：方世杰（前言、优化程序附录 B）、綦耀光（第三、四章）、朱东华（第七、八章）、曲庆文（第五章）、李莉（第一章、附录 A）、张磊（第二、六章）、姜好德（程序应用说明）。全书由方世杰统稿并定稿。

本书由青岛建筑工程学院谭继文教授主审。

在编写过程中，得到了各参编单位有关领导、同行以及烟台大学江允正教授的指导和帮助，在此一并表示感谢。由于编者水平有限，书中难免出现缺点或错误，恳请各位专家、同仁及读者批评指正。

编者

2003 年 3 月

目 录

第一章　优化设计概述

优化设计（Optimal Design）是 20 世纪 60 年代初发展起来的一门新学科，它是根据最优化原理和方法，应用计算机技术，寻求最优设计参数的一种新的设计方法。优化设计为工程设计提供了一种重要的科学设计方法，是现代理论和方法的一个重要领域，它已广泛应用于各个部门。如在生产中，如何使成本最低而利润最高？如何合理地分配资源获得最大经济效益？如何使所设计的机械在满足各项功能的前提下，使重量最轻、造价最低等。

优化设计首先要根据工程需要将实际问题转化成数学模型，然后选择合理的优化方法，通过计算机求得最优解。

第一节　优化设计问题的示例

例 1-1　制造一体积为 $100m^3$，长度不小于 5m，不带上盖的箱盒，试确定箱盒的长 x_1、宽 x_2 和 x_3，使箱盒的用料最省。

解：箱盒的用料与表面积有关，用料最省，

也就是箱盒的表面积 S 最小，由图 1-1 可知，箱盒表面积表达式：

$$S=x_1x_2+2\quad(x_2x_3+x_1x_3)$$

由题意，箱盒的体积，长、宽、高的限制为：

$$x_1x_2x_3=100，x_1\geqslant5，x_2\geqslant0，x_3\geqslant0$$

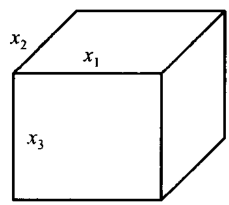


图 1-1　箱盒例图

箱盒表面积 S 表达式称为目标函数。

参数 x_1，x_2，x_3 称为设计变量，其中：$x_1x_2x_3=100$ 为等式约束条件；$x_1\geqslant5$，$x_2\geqslant0$，$x_3\geqslant0$ 为不等式约束条件。

箱盒的优化设计问题可以表述为：求一组设计变量 x_1，x_2 和 x_3，在满足约束条件的前提下，使目标函数 —— 箱盒的表面积 S 为最小。

例 1-2　某建筑公司，在 $12000m^2$ 的土地上，建造分别占地 $1012m^2$ 和 $1617m^2$ 的甲、乙两种住房，甲种不能超过 8 所，每所可获利润 1 万元；乙种不能超过 4 所，每所可获利润 2 万元。问两种住房各建几所可获得最大利

润？

解：设建造甲、乙两种住房的数目分别为 x_1，x_2，公司能获得的最大利润的表达式为目标函数：

$$y= x_1+2x_2$$

由题意，占地面积、甲、乙两种住房的数目为约束条件：

$$1012x_1+1617x_2\leqslant 12000$$

$$x_1\leqslant 8;\ x_2\leqslant 4;\ x_1,\ x_2\geqslant 0$$

该问题是在满足不等式约束条件下，使公司获得最大利润的优化设计问题。

例 1-3 图 1-2 所示为圆形等截面销轴受载情况的简化模型，一端固定，另一端作用集中载荷 F=10000N 和力矩 M=100N · m，结构要求轴长度 L 不小于 80mm。销轴材料的许用弯曲应力$[\sigma]$=120MPa；许用切应力$[\tau]$=80MPa；允许挠度$[f]$=0.1mm；密度ρ=7.8t/m^3；弹性模量 E=2×10^{5}MPa。在满足使用要求的前提下，使其销轴的质量最轻。

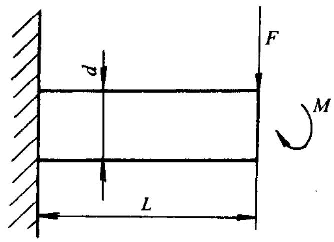


图 1-2 悬臂梁例图

解：销轴质量最轻的目标函数表达式

$$Q=\frac{1}{4}\pi d^2 L\rho$$

销轴的质量取决于变量直径 d 和长度 L。在满足使用要求的前提下，d 和 L 的取值要受到限制。其限制条件是：

（1）弯曲强度　最大弯曲应力不得超过许用值

$$\sigma_{\max}=\frac{PL}{0.1d^3}\leqslant[\sigma] \qquad \text{故：}[\sigma]-\frac{PL}{0.1d^3}\geqslant 0$$

（2）扭转强度　扭转剪应力不得超过许用值

$$\tau=\frac{M}{0.2d^3}\leqslant[\tau] \qquad \text{故：}[\tau]-\frac{M}{0.2d^3}\geqslant 0$$

（3）刚度　最大挠度不得超过许用值

$$f=\frac{PL^3}{3EJ}=\frac{64PL^3}{3\pi Ed^4}\leqslant[f] \qquad \text{故：}[f]-\frac{64PL^3}{3\pi Ed^4}\geqslant 0$$

（4）结构尺寸　悬臂梁的长度不得小于 $L_{\min}$=80mm

$$L\geqslant L_{\min}$$

以上实例均为实际问题的优化设计简单叙述。就是在一定约束条件下，选择适当的参数，并建立优化设计所规定的数学模型，选择合适的优化设计方法，通过计算机运算，才能获得最优设计方案或最优值。

第二节　优化设计的数学模型

通过以上例子可以看出，每个设计问题的具体要求和约束条件各不相同，但都将优化问题转化为数学模型，该数学模型通常由设计变量，目标函数和约束条件构成。

一、设计变量

在优化设计中，可以进行调整和优选的独立参数称为设计变量。如上述例 1-1 中的箱盒的长 x_1，宽 x_2 和高 x_3；例 1-3 中销轴的直径 d 和长度 L 都称为设计变量。而销轴的载荷 F、密度 ρ 和材料的许用应力 $[\sigma]$ 等则称为设计常量，它们在优化过程中是固定不变的。

设计变量可分为两种类型，连续变量和离散变量。绝大多数的设计变量都为连续变量，优化求解中也比较方便。而离散变量取值是跳跃式的，如齿轮的模数，螺栓的公称直径等。对于离散变量可利用离散优化方法求解。

设计变量的全体，实际上是一组变量，变量的个数称为设计的维数，如有几个设计变量，则称为几维优化设计问题。若将 n 个设计变量按一定的次序排列起来，构成一个 n 维向量，即写成：

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix}=[\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\cdots,\boldsymbol{x_n}]^{\mathrm{T}} \tag{1-1}$$

上式中右上角“T”为矩阵的转置符。我们把 X 定义为 n 维欧式空间的一个向量，设计变量 x_1，x_2，…，x_n 为向量 X 的几个分量。在优化设计中，这种以 n 个设计变量为坐标轴组成的实空间称为 n 维实空间，用 R^n 表示。它是以设计变量 x_1，x_2，…，x_n 为坐标轴的 n 维空间。设计空间包含着该项设计所有可能的设计方案，且每一个设计方案对应着设计空间的一个设计向量或者说一个设计点 X。

当维数 n=2 时，如图 1-3a 所示，设计变量 x_1、x_2 组成二维设计空间为坐标轴所构成的平面。其任一设计方案都可用二维向量表示，记为

$X=[x_1,x_2]^T$。当维数 $n=3$ 时，即由三个设计变量 x_1，x_2，x_3 组成一个三维设计空间，如图 1-3b 所示。其任一设计方案表示为 $X=[x_1,x_2,x_3]^T$。

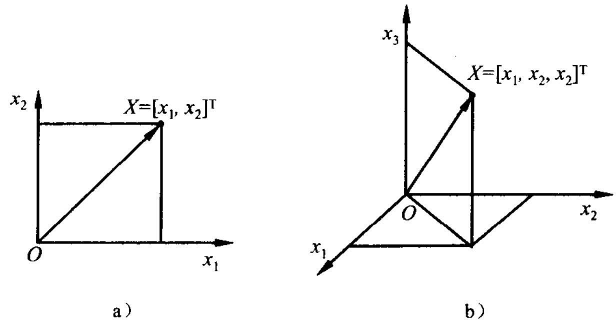


图 1-3　二维和三维设计空间

这样，对于例 1-1 箱盒的优化设计问题，设计变量可取长 x_1，宽 x_2，高 x_3。$X=[x_1,x_2,x_3]^T$，是三维优化问题。对于例 1-3，销轴的优化设计，设计变量取 $x_1=d$，$x_2=L$，为 $X=[x_1,x_2]^T$ 的二维优化问题。设计变量的数目又表示设计的自由度，数目越多，其设计空间的维数越高，则设计自由度越大，可供选择的方案越多，容易得到比较理想的设计方案。但问题的复杂程度也相应增加，优化设计更加困难。因此，对于一个优化设计问题来说，应恰当地确定优化设计变量的数目。原则上，在满足设计基本要求的前提下，应尽量减小设计变量的数目，尽可能把影响不大的参数定为设计常量，只把对目标函数影响较大的独立参数选为设计变量，以便使优化设计问题得到简化。

二、目标函数

目标函数又称为评价函数。在前面所举的几个例子中，如箱盒的用料最省；建筑公司如何建造甲、乙两种住房可获得最大利润；销轴的质量最轻等，都是设计中所追求的目标，而且可表示为设计变量的函数，该函数称为优化设计的目标函数。因此，在优化设计中，任一项设计方案的好坏就是用目标函数值的大小来衡量。可表示如下：

$$F(X)=F(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1-2}$$

优化设计的目的就是要求所选择的设计变量使目标函数值达到最佳值。所谓最佳值，就是指目标函数的极大值或极小值。由于求目标函数 $F(X)$ 的极大值等价于求目标函数 $-F(X)$ 的极小值，因此，通常将优化设计的求最优解问题，解释为求极小化，即 $F(X)\rightarrow\min$。

目标函数有单目标函数和多目标函数之分。在优化设计中，若只有一个目标函数，则称为单目标函数；若有两个以上的目标函数，则称为多目标函

数。单目标设计问题，求解比较简单明确。而多目标设计问题则比较复杂，有时求解也比较困难。但目标函数越多，对设计的评价愈周全，设计综合效果也会比较好。

由于目标函数是设计变量的函数，则给定一组设计变量 X^k 值，就有一个相应的函数值 F（X^k），若在设计空间确定了一个设计点，在设计空间的任何一点都有一个目标函数值与之对应。具有相同函数值的点集在设计空间内形成一个曲面或曲线，我们称它为目标函数的等值面或等值线。对于两个设计变量的二维问题，这个点集为等值曲线，三维问题为等值面，大于三维称为等值超曲面。

三、约束条件

对设计变量的取值加以某些限制的条件称为约束条件。设计空间是所有设计方案的集合，但有些设计方案在工程上是不能接受的（例如面积取负值等）。如果一个设计满足所有对它提出的要求，就称为可行（或可接受）设计，反之则称为不可行（或不可接受）设计。

在工程问题中，根据约束形式分成不等式约束和等式约束两种类型。

$$g_u(X) \leqslant 0 \qquad (u=1, 2, \cdots, m) \tag{1-3}$$

$$h_v(X) = 0 \qquad (v=1, 2, \cdots, p) \tag{1-4}$$

要求设计点在设计空间中约束范围内。所以，约束是对设计点在设计空间中的活动范围所加的限制。凡满足所有约束条件的设计点，它在设计空间中的活动范围称作可行域，否则称作非可行域。如满足不等式约束：

$$g_u(X) \leqslant 0 \qquad (u=1, 2, \cdots, m)$$

的设计点活动范围，它是由 m 个约束曲面：

$$g_u(X) = 0 \qquad (u=1, 2, \cdots, m)$$

所形成的 n 维子空间（包括边界）。满足两个或更多个点 $g_u(X)=0$ 的集合称作交集。在三维空间中两个约束的交集是一条空间曲线，三个约束的交集是一个点。在 n 维空间中 r 个不同约束的交集的维数是 $n-r$ 的子空间。

等式约束 $h(X)=0$ 可看成是同时满足 $h(X) \leqslant 0$ 和 $h(X) \geqslant 0$ 两个不等式约束，代表 $h(X)=0$ 曲面。

不等式约束 $g_u(X) \leqslant 0$，也可以用 $-g_u(X) \geqslant 0$ 的等价形式来代替。

有约束条件的优化设计问题称为约束优化设计问题，反之称为无约束优化设计问题。

根据约束的性质可以把它们区分成性能约束和边界约束两大类。例如，选择某些结构必须满足受力的强度、刚度或稳定性等要求，属于性能约束。

只是对设计变量的取值范围加以限制的约束称作边界约束。例如，允许选择的尺寸范围，桁架的高在其上下限范围之间的要求等。

四、优化设计数学模型的一般形式

根据以上问题的讨论，优化设计数学模型是由设计变量、目标函数和约束条件三要素所组成。数学模型可表述成为：在满足约束条件情况，使其目标函数达到最优值。通常优化设计数学模型表达成为如下标准形式：

求变量：

$$X=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]^{T} \tag{1-5}$$

使目标函数：

$$\min F(X)=F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \tag{1-6}$$

满足约束条件

$$\text{s.t.}\quad g_u(X)\leqslant 0 \qquad (u=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{1-7}$$

$$h_v(X)=0 \qquad (v=1,\ 2,\ \cdots,\ v<n) \tag{1-8}$$

设计变量 $X=[x_1,x_2\cdots,\ x_n]^T$ 属于 n 维实空间。模型中 s.t.（subject to 的缩写），表示“满足于”。

对于约束优化问题，若目标函数和约束条件都是设计变量的线性函数，称为线性规划问题，否则，则称非线性规划问题。工程优化设计中，绝大多数属于非线性规划问题。

五、建模实例

优化问题的数学模型，是实际问题的数学抽象，从数量上反映了研究对象有关参数及其相互关系。建立优化数学模型是优化设计的第一步，也是关键的一步，更是困难的一步。它要求人们具有专业知识，也要会抓主要矛盾。建立优化数学模型时，必须考虑哪些参数作为变量，受限于哪些约束条件，优化追求的目标函数是什么，这就是优化数学模型的三要素。

建立优化数学模型的步骤是：

1）选取变量；

2）恰当地表达目标函数；

3）确定约束条件。

由实际问题抽象出优化数学模型，因问题不同而异，对不同领域内的具体问题，需要不同的专业知识，这是一项复杂而困难的工作，因实际应用领域太广，不能一一列举，通过一些示范性实例加以说明。

例 1-4 某房地产公司有水泥 100t，木材、160t 和玻璃 410t，用以建造

A 型和 B 型住宅。建一栋A 型住宅需水泥 1t，木材 2t、玻璃 2t，每栋售价 100 万元。建一栋 B 型住宅需水泥 1t，木材 1t，玻璃 5t，每栋售价 150 万元。该公司应如何安排两种住宅的建造数量，才能使总售价最高？试建立该问题的优化数学模型。

解：选取建造 A、B 型住宅的栋数 x_1，x_2 为设计变量。目标函数是总售价最高，即：

$$\max F(X)=100x_1+150x_2$$

约束条件为：水泥用量不超过 100t，即

$$x_1+x_2\leqslant 100$$

木材用量不超过 160t，即

$$2x_1+x_2\leqslant 160$$

玻璃用量不超过 410t，即

$$2x_1+5x_2\leqslant 410$$

变量不能为负数，必须为整数

$$x_1,\ x_2\leqslant 0 \quad \text{且为整数}$$

综上所述，该问题的优化数学模型是求

$$X=[x_1,\ x_2]^{\mathrm{T}}$$

$$\max F(X)=100x_1+150x_2$$

$$\text{s.t. } x_1+x_2\leqslant 100$$

$$2x_1+x_2\leqslant 160$$

$$2x_1+5x_2\leqslant 410$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0 \quad \text{且为整数}$$

这个优化问题的目标函数和约束条件，都是变量 x_1，x_2 的线性函数，则称这样的问题为线性规划问题。又因要求变量 x_1，x_2 为非负整数，因此该问题是线性规划中的整数规划问题。

例 1-5 某项工程需成套横截面相同且长度不同的钢梁，每一套由 7 根 2m 长与 2 根 7m 长的钢梁组成。这些钢梁是由 15m 长的钢坯截下的，现生产 100 套钢梁，问应如何下料使用料最省，建立这一问题的优化数学模型。

解：每一根 15m 长的钢坯可能的下料方式有三种：第一种，在 15m 钢坯上截 7 根 2m 长的钢梁，剩料头 1m。第二种，在 15m 钢坯上截 2 根 7m 的钢梁，剩料头 1m。第三种，在 15m 钢坯上截 4 根 2m 的和 1 根 7m 的钢梁，无剩料。

由题意知，生产 100 套钢梁为 7×100=700 根 2m 的钢梁和 2×100=200 根 7m 长的钢梁。选取第一、第二、第三种下料方式分别需 15m 钢坯的根数 x_1，x_2，x_3 为变量；

目标函数为需钢坯根数最少，即

$$\min \quad F(X)=x_1+x_2+x_3$$

约束条件为 2m 长钢梁不能小于 700 根，7m 长的钢梁不小于 200 根，即

$$\text{s.t.} \quad 7x_1+4x_3 \geqslant 700$$

$$2x_2+x_3 \geqslant 200$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \quad 且为整数$$

例 1-6 研制 A、B 两种添加剂对某化学过程生成物的影响，经过多次试验，确定了生成物数量与 A、B 两种添加剂加入量分别 x_1 和 x_2 的关系为

$$F(x)=3850-x_1^2+100x_1-x_2^2+60x_2+0.1x_1x_2$$

从化学理论知，A 种添加剂不允许超过 60 个单位，B 种添加剂不允许超过 65 个单位。问加入 A、B 种添加剂各多少单位，才能使生成物最多?建立优化数学模型。

解：设 x_1，x_2 分别为 A、B 种添加剂加入量，根据题意，该问题的优化数学模型是

$$求 \quad X=[x_1,\ x_2]^{\mathrm{T}}$$

$$\max F(x)=3850-x_1^2+100x_1-x_2^2+60x_2+0.1x_1x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 \leqslant 60$$

$$x_2 \leqslant 65$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0$$

该问题的目标函数是变量的二次函数，称非线性优化问题，也称非线性规划问题。

例 1-7 空心扭转轴的优化设计。

图 1-4 为承受纯扭载荷的空心传动轴。设传递的力矩为 M，轴的外径为 D，内径为 d，试在满足强度和扭皱稳定的条件下，求用料最省的设计方案。

解：空心轴的用料情况，可以用轴的截面面积 $S=\pi(D^2-d^2)/4$ 表示；扭转轴的最大工作切应力 $\tau_{\max}=16MD/(D^4-d^4)\pi$，扭皱稳定的临界切应力 $\tau=0.7E$