高中数学

GAOZHONG SHUXUE

解题基本方法

奚定华 主编

上海教育出版社

高中数学解题基本方法

奚定华　主编

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学解题基本方法/奚定华主编．—上海：上海教育出版社，2004.3
ISBN 7-5320-9269-0

Ⅰ.高...　Ⅱ.奚...　Ⅲ.数学课—高中—解题—升学参考资料　Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第015591号

高中数学解题基本方法

奚定华　主编

上海世纪出版集团
上海教育出版社　出版发行

易文网：www.ewen.cc

（上海永福路123号　邮政编码：200031）

各地新华书店经销　江苏启东人民印刷有限公司印刷

开本787×1092　1/16　印张10　字数206,000

2004年4月第1版　2004年4月第1次印刷

印数1-6,000本

ISBN 7-5320-9269-0/G·9113　定价：15.00元

前　　言

数学思想方法是数学的精髓,它既是高中数学学习的重要内容,又是数学高考的重要内容.学习数学方法不仅有利于形成良好的认知结构,发展数学思维,而且有利于提高解决数学问题的能力.数学方法为确定解题基本思路,找到解题突破口,从而顺利地解决问题提供了有效的保证.

数学思想方法是数学高考的重要目标之一.数学高考命题重视考查数学基本方法,淡化数学解题技巧.体现在命题过程中,对于只能用技巧来解的备选问题,或是舍弃,或是改编成能用基本方法解的问题.同时,通过对数学高考试题的分析,我们可以看到,实际上数学高考用的也确实就是这么几种基本方法.这在本书各章中用基本方法解高考试题部分可以看得非常清楚.

本书着重介绍高中数学解题的基本方法,突出以下几个特点:

1. 密切联系知识

数学知识和数学方法是相互作用,相互依存的.本书不是孤立地介绍方法,而是将方法和知识密切联系起来.每一种数学知识都有和它的本质相联系的数学方法,每一种数学方法都与某一种数学知识相联系.例如复数知识包括复数的概念、复数的三角形式、复数的几何表示和复数的运算等,相应的与复数知识相联系的数学方法有化虚为实法、化为三角形式法和几何法等.

2. 精选基本方法

本书精选与数学知识本质相对应的最基本的方法,舍弃非基本方法.例如解析几何,我们认为解析法、待定系数法、变换法和参数法是基本方法.而几何法、复数法、判别式法等则不是解析几何最本质的方法,我们不将它们列为基本方法.

3. 突出本质规律

本书对于每一种基本方法都注意抓住其本质,着重介绍方法适用的范围、运用的规律和解题的步骤.

本书共分三个部分:

1. 第一章说明高中数学解题基本方法是数学学习和数学高考的重要内容.

2. 第二章至第七章分别介绍与复数、函数、数列、三角比和三角函数、立体几何和解析几何等数学知识相联系的基本方法.每一章又分成三个单元:

(1) 介绍基本方法

对每一种基本方法分三个方面进行阐述:首先说明基本方法的内涵;其次通过典型例题具体说明基本方法的运用;最后总结基本方法的解题规律,以及运用时需要注意的问题.

(2) 用基本方法解有关高考试题

把涉及到这类知识的历年高考试题收集在一起进行分析,说明如何运用基本方法来寻找解题的思路,并运用它来解决问题.

(3) 练习题

编制有关的数学习题供读者运用基本方法去解决，并附有略解或答案供读者参考.

3. 第八章介绍高中数学解题中常用的科学方法，包括观察法、试验法、分类讨论法、演绎法、归纳法、类比法、直接证法和反证法等，并结合有关高考试题进行分析.

本书出版过程中得到上海教育出版社韩希塘同志的大力支持和帮助，在此深表感谢.

由于编者水平有限，又加上时间比较仓促，书中可能会有一些错误和问题，请读者阅后批评指正，以便在再版时予以修正.

编者

2003年12月

目录

第一章　数学方法是数学学习和数学高考的重要内容

一、数学方法是数学学习的重要内容 1
二、数学方法是数学高考的重要内容 2
三、数学高考考查的数学方法 4

第二章　复数

一、复数中的基本数学方法 6
1. 化虚为实法 6
2. 化为三角形式法 8
3. 几何法 10
二、用复数中的基本数学方法解有关高考试题 12
三、练习题 15

第三章　函数

一、函数中的基本数学方法 17
1. “常用函数”法 17
2. 定义法 21
3. 图像法 24
二、用函数中的基本数学方法解有关高考试题 27
三、练习题 35

第四章　数列

一、数列中的基本数学方法 38
1. 基本量法 38
2. 方程法 40
3. 递推法 42
4. 归纳—猜想—证明法 44
5. 函数法 46
二、用数列中的基本数学方法解有关高考试题 49
三、练习题 55

目录

第五章　三角比和三角函数

一、三角比和三角函数中的基本数学方法 59
1. 复角化单角法 59
2. 三角比转换法 61
3. 和积互化法 63
4. 边角转换法 65
5. 图像法 66
二、用三角中的基本数学方法解有关高考试题 67
三、练习题 69

第六章　立体几何

一、立体几何中的基本数学方法 76
1. 降维法 76
2. 线面关系转化法 80
3. 向量法 83
4. 方程法 87
二、用立体几何中的基本数学方法解有关高考试题 90
三、练习题 95

第七章　解析几何

一、解析几何中的基本数学方法 101
1. 解析法 101
2. 待定系数法 105
3. 变换法 109
4. 参数法 113
二、用解析几何中的基本数学方法解有关高考试题 116
三、练习题 121

第八章　高中数学解题中常用的科学方法

一、观察法 128
二、试验法 130
三、分类讨论法 131

目　录

四、演绎法 133
五、归纳法 135
六、类比法 136
七、直接证法 138
八、反证法 140
九、练习题 141

第一章 数学方法是数学学习和数学高考的重要内容

一、数学方法是数学学习的重要内容

数学是研究空间形式和数量关系的科学，是研究自然规律和社会规律的重要工具.数学的应用非常广泛，渗透到社会生活的各个方面.数学是普遍适用的技术，在人们搜集、处理和描述信息，建立数学模型，解决问题的过程中具有重要的作用.数学又是人类文化的重要组成部分，它的内容、思想、方法和语言已经融入人们的日常工作和生活中，影响着人的智力发展和社会文化的进步，数学素养是现代公民必须具备的基本素养.数学课程在促进学生发展、形成学生认识世界的态度和思想方法方面具有独特的作用.学生学习数学不仅要获得数学知识，更重要的是受到数学思想和方法的熏陶.

什么是数学思想方法？对此有许多不同的看法，数学思想方法的内涵与外延非常广泛，它涉及到整个数学，包括初等数学、高等数学甚至现代数学，又有各个层面，有数学哲学层面的方法、构建数学体系的方法、数学研究的方法、数学发现的方法、数学思维的方法和数学美学的方法等等.对于数学思想方法究竟应该包含哪些内容，目前还没有一致的看法.在通常情况下，数学思想是宏观的，数学方法相对来说是中观的和微观的.根据中学数学教育的实际，我们这里讨论的数学思想方法主要是指在中学数学范围内，用于解决数学问题的方法.在这本书里，主要是指高中数学解题的基本方法.

数学方法反映数学的本质，它是数学学习的重要组成部分，对于学生的发展具有重要的意义，具体表现在以下几个方面：

(1) 学习数学方法有利于形成良好的认知结构

数学方法是对数学知识进一步提炼和概括.通过学习数学方法，可以使学生学习的数学知识不是零散的知识点，也不是解题的套路和一招一式，而是形成对数学本质的认识，形成有序的知识链，对于学生构建良好的认知结构有促进作用.

(2) 学习数学方法有利于提高科学文化素养

数学是人类文化的重要组成部分，数学方法是数学的灵魂和精髓，学习数学方法可以为学生认识客观世界提供科学的方法和思维的工具.用数学的眼光观察周围事物，用数学方法处理周围事物，有利于提高学生的科学文化素养.

(3) 学习数学方法有利于发展数学思维

数学方法和数学思维有着密切的联系，学习数学方法对促进学生思维的发展和培养良好的思维品质有重要的作用.

(4) 学习数学方法有利于提高解决数学问题的能力

由于我们这里所说的数学方法主要是指在中学数学范围内，用于解决数学问题

的方法,因此它对解决数学问题具有独特的作用,应用它不仅可以确定解题的方向,选择解题的思路,而且能掌握具体的解题步骤,提高解决数学问题的能力.解决数学问题关键在于找到解题的思路,找到解题的突破口,有了解题思路以后,只要按照解题步骤一步一步做下去就可以了.数学方法的本质就是提供解题的基本思路.

鉴于数学思想方法在数学学习中具有重要的意义和独特的作用,教育部制订的《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》的课程目标,明确要求学生通过学习数学要:“获得适应未来社会生活和进一步发展所必需的重要数学知识(包括数学事实、数学活动经验)以及基本的数学思想方法和必要的应用技能”.《普通高中数学课程标准(实验稿)》的课程目标要求学生通过学习数学要:“获得必要的数学基础知识和基本技能,理解基本的数学概念、数学结论的本质,了解概念、结论等产生的背景、应用,体会其中所蕴涵的数学思想和方法,以及它们在后续学习中的作用”.《上海市中小学数学课程标准》的课程目标也要求学生通过学习数学要:“获得适应未来社会生活和继续学习所必需的数学基本知识和技能以及基本的数学思想方法”.所有这些都说明在中学数学学习中必须把数学方法作为重要的学习内容.

二、数学方法是数学高考的重要内容

1. 数学方法是数学高考试卷的重要组成部分

《全国普通高等学校招生统一考试上海卷考试手册》明确指出:数学科的考试目标是“考查中学数学的基础知识、基本技能和思维能力、运算能力、空间想象能力,以及综合运用有关数学知识分析问题和解决问题的能力.”其中数学基础知识是指“概念、公理、定理、法则、性质、公式以及由上述知识反映出来的数学思想和方法”.因此掌握数学方法是数学学科的考试目标之一.

近几年来,数学高考进行了一系列的改革,命题的理念从知识立意转向了能力立意.首先对考查一般能力进行重点突破,考查学生的学习数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力,取得了一定的成果.接着又对数学高考试卷的框架结构进行了改革.以往的数学高考试卷以知识为主线,主要是考查学生数学知识掌握的程度,因此非常强调知识的覆盖率,试卷的框架结构是由代数、三角、立体几何和解析几何的知识点组成.能力立意的数学试卷的框架结构则与此不同,它包括以下三个部分:

(1) 能力

包括思维能力、运算能力、空间想象能力、学习数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力等.

(2) 方法

包括与高中数学知识联系的基本数学方法和解决高中数学问题的科学方法.

(3) 知识

包括代数、三角、立体几何和解析几何的知识.

数学方法是数学高考试卷框架结构的一个重要组成部分.

2. 历年数学高考注重考查基本数学方法

历年数学高考都非常重视考查基本数学方法，都把基本数学方法作为考查的重要内容. 下面我们以近几年数学高考试卷为例来加以说明.

例如 2002 年秋季高考试卷中的第三题中六个大题，它考查了多种基本数学方法：

第 17 题是一道立体几何问题，求直线和平面所成的角，根据定义转化为直线和直线所成的角，用的方法是向量法，是立体几何中求角的一种基本方法.

第 18 题是一道解析几何问题，先用待定系数法求曲线的方程，然后通过解方程组求直线和曲线交点的坐标，最后用两点间的距离公式求线段的长，用的都是解析几何的基本方法.

第 19 题是求二次函数最值和单调性的问题，用的方法是配方法，是解二次函数问题的基本方法.

第 20 题是有关商品优惠率问题，其实质是解不等式组的问题，用的也是基本方法.

第 21(1)题是求函数解析式的问题，用的方法是待定系数法. 第 21(2)题是已知数列通项求前 n 项和的问题，用的方法是基本量法. 第 21(3)题是判断 10^4 是否为 $\{a_nS_n\}$ 的项的问题，用的方法是分类讨论法，都是数学解题的基本方法.

第 22 题用的也是分类讨论的方法.

又如 2003 年秋季高考理工医农类试题第三题中六个大题也考查了多种基本数学方法：

第 17 题是求复数模的最大值和最小值，用的是三角函数变换和求三角函数最值，都是解三角函数问题的基本方法.

第 18 题是立体几何求平行六面体体积的问题，其实质是求平行六面体的高，利用线面垂直关系、直线和平面所成的角、三角函数和勾股定理，都是基本方法.

第 19 题是从特殊的和归纳概括出结论，用的是归纳法.

第 20 题是应用问题，第(1)题是已知椭圆上一点的坐标和短半轴的长，求椭圆的长轴的长，用的是解方程法，这是求数量的一种基本方法. 第(2)题是求 h 和 l 使椭圆形隧道的土方工程量最小，实质是求 ab 的最小值，用的是基本不等式，这是求函数最值的基本方法.

第 21(1)题是求向量的坐标，用的是解方程法. 第 21(2)题是求关于直线对称的圆的方程，其实质是求圆心关于直线的对称点的坐标，用的也是解方程法. 第 21(3)题是判断是否存在实数 a，使抛物线 $y=ax^2-1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点. 设这两个点为 C、D，则问题转化为是否存在直线 CD 和抛物线有两个公共点，且 OB 是 CD 的垂直平分线. 如果将直线 CD 的方程和抛物线方程联立，就可以将是否有两个公共点的问题转化为二次方程判别式的问题，这是用代数方法解决几何问题，是解析几何的基本方法.

第 22(1)题是用直接证法证明 $f(x)=x\notin M$，第 22(2)题在证明过程中，先用图像法证明方程 $a^x=x$ 有解；第 22(3)题求实数 k 的范围时用了两次分类讨论的方法.

这里还必须强调指出的是，数学高考着重考查基本数学方法，而不是数学解题的技巧，这是数学高考命题的一条重要原则，它在历年高考的命题过程中都得到充分的重视. 例如 2001 年秋季高考第 18 题开始设计的原型是：已知点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$ 上，它到椭圆焦点 F_1、F_2 的距离之比为 1:2，且 $\triangle PF_1F_2$ 是一个直角三角形，求 b 的值. 这个问题通常要用几何法来解，先从定义出发求得 $|PF_1|$、$|PF_2|$，再利用直角三角形的关系求 b，若用坐标法来解，则运算比较繁琐. 但坐标法是解析几何的基本方法，几何法不是解析几何的基本方法，为了考查基本数学方法，命题组放弃原来的题目，将它改为：

设 F_1、F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的两个焦点，P 为椭圆上的一点，已知 P、F_1、F_2 是一个直角三角形 $\triangle PF_1F_2$ 的三个顶点，且 $|PF_1|>|PF_2|$，求 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值.

这样，问题可以用基本方法——坐标法来解，运算也不太复杂，更好地体现了考查基本数学方法的原则.

三、数学高考考查的数学方法

数学高考考查的数学方法主要是指高中数学解题的基本方法. 具体包括以下两个方面：

1. 与高中数学知识联系的数学方法

由于数学高考主要是通过解决数学问题来考查数学方法，因此重点是考查高中数学解题的基本方法. 宏观的数学思想有它的一般意义，但不能直接用来解决具体的数学问题. 例如化归思想，是一种基本的数学思想，解数学问题就是将未知化为已知，把复杂化为简单，它属于宏观层面，为解题指出了总的方向，但它没有具体指出向什么方向化归，如何化归，光用它，还解决不了具体的数学问题. 这里的数学基本方法是数学知识和数学思想结合后派生出来的，是宏观的数学思想结合某一类知识的具体化.

数学方法和数学知识是紧密联系的，两者是相互作用、相互依存的. 没有知识，无从谈方法，数学方法是以数学知识作为载体来体现的，不存在脱离数学知识的数学方法. 反过来也没有脱离数学方法的数学知识，每一个数学知识都有与它的本质相联系的基本数学方法. 我们这里所指的数学方法是指与高中数学知识联系的数学方法. 主要有下列几种：

(1) 复数：化虚为实法，化为三角形式法，几何法

(2) 函数："常用函数"法，定义法，图像法

(3) 数列：基本量法，方程法，递推法，归纳—猜想—证明法，函数法

(4) 三角：复角化单角法，三角比转换法，和积互化法，边角转换法，图像法

(5) 立体几何：降维法，线面关系转化法，向量法，方程法

(6) 解析几何：解析法，待定系数法，变换法，参数法

这些方法都与有关的数学知识密切联系，并且反映这些数学知识的本质.例如解析几何的基本思想是数形结合，具体反映在两个方面:点和坐标的对应;曲线和方程的对应.它的基本知识包括:直角坐标和极坐标;普通方程和参数方程;直线和直线方程;圆锥曲线和圆锥曲线的方程.它的基本问题有两个:由曲线求方程;由方程讨论曲线的性质.常见的问题有:求轨迹方程;已知某些条件求曲线方程;求点的坐标;求长度、角度和面积;求最值和变化范围;证明问题等.相应地与解析几何的基本思想、基本知识和基本问题相联系的基本数学方法是:

(1) 解析法:通过建立坐标系，把点转化为坐标、曲线转化为方程，从而将几何问题转化为代数问题，用代数方法来研究几何图形性质的方法.

(2) 待定系数法:为了求曲线的方程，先根据题意设含有待定系数的曲线方程，然后根据已知条件列出方程或方程组，解方程或方程组，求出待定系数，从而求得曲线方程的方法.

(3) 变换法:通过点的坐标变换，曲线方程变换，从而解决问题的方法.包括坐标轴平移的方法，极坐标化为直角坐标或直角坐标化为极坐标的方法;参数方程化为普通方程或将普通方程化为参数方程的方法等.

(4) 参数法:通过引进参数，沟通坐标 x、y 之间的联系，从而解决问题的方法.

这四种方法是解决解析几何问题的基本方法，它体现了解决解析几何问题的基本思路.例如要求轨迹方程，最基本的方法是解析法，把几何条件转化为代数方程.遇到多个动点可以用变换法，进行点的坐标变换.如果用这些方法有困难，可以引进参数，沟通坐标 x、y 之间的联系，用参数法来解.一般来说，运用这些基本方法，求轨迹方程的问题都可以解决.

2. 解决高中数学问题的科学方法

数学是一门科学，它在解决问题时必然要用到某些科学方法，其中很多是逻辑方法，这些方法既是数学学习的重要组成部分，也是数学高考的重要内容.解决中学数学问题时的科学方法通常有以下几种:

(1) 观察法:通过观察发现事物性质和规律的方法;

(2) 试验法:通过多次试验，除去不合理的解答，保留正确解答的方法;

(3) 分类讨论法:对研究对象的所有可能出现的情况分类进行讨论的方法;

(4) 演绎法:由一般性结论得出特殊性结论的推理方法;

(5) 归纳法:由特殊性结论得出一般性结论的推理方法;

(6) 类比法:由两个对象有某些属性相同或相似，推出它们的其他属性也可能相同或相似的推理方法;

(7) 直接证法:从问题的条件出发，根据已知的公理、定义、定理或公式直接推断结论真实性的证明方法;

(8) 反证法:通过肯定命题的条件，否定命题的结论，推出矛盾，从而证明命题的真实性的方法.

第二章 复　数

一、复数中的基本数学方法

复数部分的数学知识主要包括：复数的概念、复数的三角形式、复数的几何表示和复数的运算等．复数集是实数集的扩充，复数的概念、性质和运算都是在实数基础上发展起来的，它与三角、几何有着密切的联系，很多复数问题可以转化为实数问题来解，有时可以转化为三角、几何问题来解．因此解决复数问题的基本方法有以下几种：

1．化虚为实法

通过设复数的代数形式，将复数问题转化为实数问题来解的方法．

2．化为三角形式法

通过设复数的三角形式，将复数问题转化为三角函数问题来解的方法．

3．几何法

将复数用几何形式表示，运用几何图形性质解决复数问题的方法．

下面我们分别加以说明．

1．化虚为实法

基本方法

通过设复数的代数形式 $z=x+y\mathrm{i}(x、y\in\mathbf{R})$，将有关复数 z 的问题化成有关 $x、y$ 的实数问题来解．这是解复数问题常用的一种方法．

典型例题

例 1　设 z 是虚数，$w=z+\dfrac{1}{z}$ 是实数，且 $-1<w<2$，求 $|z|$ 的值及 z 的实部的取值范围．

分析：要求 $|z|$，根据复数模的定义，可以先设 $z=x+y\mathrm{i}$，然后求 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$．要求 z 的实部的取值范围，即是求实数 x 的取值范围．因此这个问题可以通过设 $z=x+y\mathrm{i}$，将复数 z 的问题转化为实数 $x、y$ 的问题来解．

解　设 $z=x+y\mathrm{i}$，$x、y\in\mathbf{R}$，且 $y\neq0$，则

$$w=z+\frac{1}{z}=x+y\mathrm{i}+\frac{1}{x+y\mathrm{i}}=\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{i}.$$

$$\because\quad w\text{ 是实数},\quad\therefore\quad y-\frac{y}{x^2+y^2}=0.$$

$$\because\quad y\neq 0,\quad \therefore\quad x^2+y^2=1,\ \text{即}\quad |z|=1.$$

$$w=x+\frac{x}{x^2+y^2}=2x.$$

$$\because\quad -1<w<2,\quad \therefore\quad -\frac{1}{2}<x<1.$$

即 z 的实部的取值范围是$\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

例 2 已知 $z\in\mathbf{C}$,解方程

$$z\bar{z}-3\mathrm{i}\bar{z}=1+3\mathrm{i}.$$

分析:这是一个复数方程,通过设 $z=x+y\mathrm{i}$,可以将它转化为实数方程.

解 设 $z=x+y\mathrm{i},x、y\in\mathbf{R}$,则原方程可化为

$$(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})-3\mathrm{i}(x-y\mathrm{i})=1+3\mathrm{i},$$

$$x^2+y^2-3y-3x\mathrm{i}=1+3\mathrm{i}.$$

由复数相等的定义可得

$$\begin{cases}x^2+y^2-3y=1,\\-3x=3.\end{cases}$$

解这个方程组,得

$$\begin{cases}x=-1,\\y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\y=3.\end{cases}$$

$$\therefore\quad z=-1\quad\text{或}\quad z=-1+3\mathrm{i}.$$

说明:这里利用复数相等的定义是解题的关键,它将问题转化为解实数 $x、y$ 的方程组,求出实数 $x、y$,从而求出复数 z.

例 3 已知 z 为虚数,且$\frac{z^2}{z-1}$为实数,$\arg(z+1)=\frac{\pi}{4}$,求 z.

分析:这是一个求复数 z 的问题,通过设 $z=x+y\mathrm{i}$ 可以将两个已知条件$\frac{z^2}{z-1}$为实数和 $\arg(z+1)=\frac{\pi}{4}$分别转化为含有实数 $x、y$ 的方程,从而得到 $x、y$ 的方程组,解方程组求出实数 $x、y$,即可求得复数 z.

解 设 $z=x+y\mathrm{i}(x、y\in\mathbf{R},y\neq 0)$,

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{z-1}&=\frac{x^2-y^2+2xy\mathrm{i}}{x-1+y\mathrm{i}}\\&=\frac{(x-1)(x^2-y^2)-2xy^2+[y(x^2-y^2)+2xy(x-1)]\mathrm{i}}{(x-1)^2+y^2}.\end{aligned}$$

据题意可得:$y(x^2-y^2)+2xy(x-1)=0$,因为 $y\neq 0$,所以得

$$3x^2-y^2-2x=0;$$

又
$$\frac{y}{x+1}=\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4},$$

且
$$y>0,$$

由
$$\begin{cases}3x^2-y^2-2x=0,\\y=x+1\end{cases}\quad\text{得}\quad 2x^2-4x-1=0,$$

解得 $$x=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2},\ y=2\pm\frac{\sqrt{6}}{2};$$

即 $$z=1+\frac{\sqrt{6}}{2}+\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\mathrm{i},$$

$$z=1-\frac{\sqrt{6}}{2}+\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\mathrm{i}.$$

解题规律

化虚为实是解决有关复数题的最常用和最基本的方法,它的一般解题步骤是:

(1) 设 $z=x+y\mathrm{i}$, x、$y\in\mathbf{R}$;

(2) 将题目中的 z 变为 x、y,从而使有关复数的式子转化为实数的式子;

(3) 利用复数相等的定义,解方程或方程组求出 x、y;

(4) 求得复数 z,从而得出结论.

2. 化为三角形式法

基本方法

有些复数问题通过化虚为实转化为代数问题,往往运算比较复杂,甚至无法解答,这时可尝试将复数化为三角形式,把问题转化为有关模和辐角的问题,用三角方法来解.

典型例题

例1 已知 z 为复数,且 $|z|=1$,求 $|1-\mathrm{i}+z|$ 的最大值和最小值.

分析:利用复数的三角形式可以将求 $|1-\mathrm{i}+z|$ 的最值问题转化为求三角函数的最值问题.

解 设 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,则

$$|1-\mathrm{i}+z|=|1-\mathrm{i}+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta|=|(1+\cos\theta)+\mathrm{i}(\sin\theta-1)|$$
$$=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(1-\sin\theta)^2}=\sqrt{3+2(\cos\theta-\sin\theta)}$$
$$=\sqrt{3+2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}.$$

当 $\theta=\frac{7\pi}{4}$ 时,$|1-\mathrm{i}+z|$ 有最大值 $\sqrt{2}+1$,

当 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时,$|1-\mathrm{i}+z|$ 有最小值 $\sqrt{2}-1$.

说明:这个问题如用化虚为实的方法来解比较困难.

设 $z=x+y\mathrm{i}$,则 $\sqrt{x^2+y^2}=1$,

$$|1-\mathrm{i}+z|=|(x+1)+(y-1)\mathrm{i}|=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$$
$$=\sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2}=\sqrt{2x-2y+3},$$

直接求$\sqrt{2x-2y+3}$的最值有困难，还要通过三角代换，设 $x=\cos\theta, y=\sin\theta$，将它化为$\sqrt{3+2(\cos\theta+\sin\theta)}$来解，其实质相当于化成三角形式.

例 2 已知复数 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}, w=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$，复数$\overline{zw}$、$z^2w^3$ 在复平面上对应点分别是 P、Q，证明$\triangle OPQ$ 是等腰直角三角形.

分析：要证明$\triangle OPQ$ 是等腰直角三角形，可以证明$|OP|=|OQ|$，且 $OP\perp OQ$. 这就需要求$\overline{zw}$和z^2w^3 的模与辐角. 因此利用复数的三角形式比较方便.

证明 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$,

$$w=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4},$$

$$zw=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12},$$

$$\overline{zw}=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right).$$

$$z^2w^3=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^3$$
$$=\cos\frac{5}{12}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}.$$

$\therefore$ OP 和 OQ 的夹角为$\frac{5}{12}\pi-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{2}$,

即 $$OP\perp OQ.$$

又 $$\because\quad |OP|=|\overline{zw}|=1,\ |OQ|=|z^2w^3|=1,$$
$$\therefore\quad |OP|=|OQ|,$$

因此$\triangle OPQ$ 是等腰三角形.

解题规律

在下列情况下常常运用化为三角形式法：

(1) 在运用化虚为实法将复数问题化为代数运算、解方程等问题时，运算比较复杂产生困难；

(2) 需要通过模和辐角转化为三角问题；

(3) 涉及到比较复杂的复数乘除法.

运用化为三角形式解题的一般步骤是：

(1) 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，将复数化为三角形式；

(2) 运用复数三角形式进行运算和化简；

(3) 运用三角方法解决问题.