初等数学自学习题

Chudengshuxue Zixuexiti 928

〔苏〕Н·П·安东诺夫等编
张延伦 周概容 译

河北教育出版社

初等数学自学习题

〔苏〕H.П. 安东诺夫 等编
张延伦　周概容 译

河北教育出版社

初等数学自学习题

〔苏〕H.П. 安东诺夫等编

张延伦　周概容　译

河北教育出版社出版（石家庄市北马路45号）

河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米　1/32　20 印张　427,000 字　印数：1—4,970　1987年9月第1版

1987年9月第1次印刷　统一书号：7509·223　定价：3.20 元

内容简介

本书是〔苏〕H．П．安东诺夫等编著的一本自学参考书，包括928个最基本的初等数学习题，几乎每个题都有详细解答，对有的题同时给出了几种不同的解法，对立体几何图形的作法也有详细说明。

本书的对象是一切自学初等数学的读者，供他们在没有教师指导的情况下自学复习或准备各种考试时使用。可供不在校的中学已毕业和肄业的城乡青年和职工使用，当然也可供在校的全日制中学、业余中学和补习班的学生参考。

中译本是由原书俄文第十七版译出的。

第三版前言

这是一本自学参考书，对象是中学没毕业和毕业已久的读者，供他们自学复习或准备投考大学时使用，目的是帮助他们在没有教师指导的情况下学会做题，因此对多数题目都给出了解法。读者对前两版的反应表明，确实需要一本这样的参考书。

书中把解法类似的题目排在了一起，不妨称它们为一组。同一组的题目中，只对前面几个给出详细解法。为不妨碍读者独立思考，解法中的非要点及具体计算都从略。而由于本书的对象是自学者，对解法中的要点和关键步骤则写得详细。特别是对教科书中写得少的东西就写得尤其详细。例如，关于方程的丢根、增根、算术根以及关于立体几何图形的作图就写得尤其详细。这些写得尤其详细的地方，对教师也是有帮助的。

解答中的说明、解释和论述都只出现一次，再次用到时则仅指出第一次出现时的题号。这样做的目的是鼓励也便于读者对自己的能力进行检验。

各章题目都要求读者按顺序做。但先做哪一章再做哪一章，则读者完全可以根据自己的情况决定。

读者应该在独立解出题目之后，或者经过认真思考仍感到无从下手时，才看书中的解法。如果连续几个题目做下来都感到不难，那就可以跳过一些题目。跳过多少，须大致地

看一下要跳过的题目及其解答来决定。

作者　Н. П. 安东诺夫，М. Я. 维戈茨基
В. В. 尼基特金，А. И. 桑　　金

中译本序

学习数学，一是要掌握基本知识，二是要掌握基本方法和技能。对于基本知识，要深入理解，要融会贯通；对于基本方法和技能，要熟练，要能运用自如。

学习数学一定要做一定数量的习题。因为通过练习，才能更深入地理解有关知识，才能更好地掌握基本方法和技能。不过这决不是说做题越多越好。盲目地一味地做题是学不好数学的。重要的是在解题过程中，善于分析所解的题，从中提炼出一般方法和技巧，达到举一反三的目的。决不应该只是为了得到答案而解题。因此在选做练习题时，数量要适当，各种类型的题要兼备，解题方法要有代表性和典型性。此外，还应通过做练习题培养良好的数学素养，做到运算熟练而准确，逻辑严密而简明，表达确切而简练，作图正确而整洁。当然要做到这些并非一日之功，需要有一个过程。然而，对于一切有志于学好数学的青少年，只要以严肃的科学态度，刻苦钻研，是完全可以做到的。我们向读者推荐的这本参考书将为他们提供有力的帮助。

现在有些读者，特别是上过中学，但是离开学校已久的读者，在学习时苦于没有教师的指导。在做练习时往往难于掌握选题的内容、代表性和数量。对于在校的学生，如果希望在课余独立地做一些练习，也会遇到同样的问题。这本书恰好适应这些读者的需要，帮助他们在没有教师直接指导的

情况下解决自学中遇到的困难。

本书的中译本是根据苏联科学出版社的原书第十七版翻译而成的。该书已被译成几种文字出版，其中英文版已经多次再版。本书收进928个最基本的初等数学习题。选题的数量适当，各种类型兼备，解题方法具有典型性和代表性。几乎所有题都有详解，对有的题同时给出了几种不同解法，对于一些几何图形的作法也有详细说明（详见原书第三版前言）。

本书内容与我国中学数学的教学内容大致相同，只是缺少新大纲中有关微积分初步和平面解析几何的内容。本书是一部自学参考书，它适用于一切在没有教师指导下自学初等数学的读者。供他们自学复习和准备考试时使用。可供中学已毕业和肄业的青年和职工使用，当然也可供在校的全日制中学、业余中学和补习班的学生使用，亦可供教授初等数学的老师参考。

由于我们的水平所限，译文中定有不少不妥之处，请读者批评指正。

译者

一九八五年一月

目　录

公式

I. 算术和代数

比　例

1. 比例式 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 中 a 和 c 是外项，b 和 d 是中项。比例式的主要性质为

$$a\cdot d=b\cdot c。$$

2. 项交换

(a) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$；(b) $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$；(c) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；(d) $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$。

3. 导出比例式：若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则下列比例式成立：

(a) $\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$；(b) $\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

幂运算公式

1. $(a\cdot b\cdot c)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n$，$a^n\cdot b^n\cdot c^n=(a\cdot b\cdot c)^n$；

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$，$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$；

3. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；　　4. $a^m:a^n=a^{m-n}$；

5．$1:a^n=a^0:a^n=a^{-n}$； 6．$(a^m)^n=a^{mn}$。

根式运算公式①

1．$\sqrt[m]{a\cdot b\cdot c}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\sqrt[m]{c}$，

$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{a\cdot b\cdot c}$；

2．$\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$，$\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$；

3．$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$， $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$；

4．$(\sqrt[m]{a^n})^p=\sqrt[m]{a^{np}}$；

5．$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mp]{a^{np}}$，$\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^n}$。

二 次 方 程

1．方程 $x^2+px+q=0$ 的根为

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

2．方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

3．方程 $ax^2+2kx+c=0$ 的根为

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

4．若 x_1，x_2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的根，则 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$。

---

① 这里的根都假定为算术根。

5．$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$，其中 x_1 和 x_2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的根。

6．$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 x_1 和 x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根。

数列（习题第五章开头）

对　　数①

1．$\log_a N=x$ 等价于 $a^x=N$，因而我们有恒等式 $a^{\log_a N}=N$。

2．$\log_a a=1$。　　　　3．$\log_a 1=0$。

4．$\log_a(N\cdot M)=\log_a N+\log_a M$。

5．$\log_a \frac{N}{M}=\log_a N-\log_a M$。

6．$\log_a(N^m)=m\log_a N$。

7．$\log_a \sqrt[m]{N}=\frac{1}{m}\log_a N$。

8．换底公式，见解答第四章开头。

排列组合

1．$A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$；

2．$p_m=1\cdot2\cdot3\cdots m=m!$；

---

① 假设 a(对数的底)和 N 都是正数，且 $a\neq1$。

3. $C^n{}_m = \frac{A^n_m}{p_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$;

4. $C^n_m = C^{m-n}_m$.

牛顿二项式

1. $(x+a)^m = x^m + C^1_m a x^{m-1} + C^2_m a^2 x^{m-2} + \cdots + C^{m-2}_m a^{m-2} x^2 + C^{m-1}_m a^{m-1} x + a^m$;

2. 展开式的通项

$$T_{R+1} = C^R_m a^R x^{m-R};$$

3. $1 + C^1_m + C^2_m + \cdots + C^{m-2}_m + C^{m-1}_m + 1 = 2m$;

4. $1 - C^1_m + C^2_m - C^3_m + \cdots \pm 1 = 0$.

II. 几何和三角

圆的周长和弧长

$C = 2\pi R$; $l = \frac{\pi R a}{180} = R\alpha$（$a$ 是弧的角度数，α 是弧度数）.

面　　积

三角形：$S = \frac{ah}{2}$（a 为底，h 为高）；

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（$p$ 是半周长，a，b，c 是边长）；

$$S = \frac{ab\sin C}{2}.$$

等边三角形：$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$（a 为边长）。

平行四边形：$S=bh$（b 为底，h 为高）。

菱形：$S=\frac{d_1d_2}{2}$（d_1，d_2 为对角线长）；

梯形：$S=\frac{a+b}{2}h$（a，b为底，h 为高）；

$S=mh$（m 为中线）；

正多边形：$S=\frac{pa}{2}$（p 为周长，a 为边心距）。

圆：$S=\pi R^2$。

扇形：$S=\frac{Rl}{2}=\frac{R^2\alpha}{2}=\frac{\pi R^2 a}{360}$（$a$ 为扇形弧的角度数；α 为弧度数；l 为弧长）。

侧 面 积

棱柱：$S_{侧}=pl$（p 为直截面的周长，l 为侧棱长）。

正棱锥：$S_{侧}=\frac{pa}{2}$（p 为底面周长，a 为斜高）。

正棱台：$S_{侧}=\frac{p_1+p_2}{2}a$（p_1，p_2 为两个底面的周长，a 为斜高）。

圆柱：$S_{侧}=2\pi RH$。

圆锥：$S_{侧}=\pi Rl$（l 为母线长）。

圆台：$S_{侧}=\pi(R_1+R_2)l$。

球面积：$S=4\pi R^2$。

体　积

棱柱：$V=SH$（S 为底面积，H 为高）。

棱锥：$V=\dfrac{SH}{3}$。

棱台：$V=\dfrac{H}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$。

圆柱：$V=\pi R^2H$。

圆锥：$V=\dfrac{\pi R^2H}{3}$。

圆台：$V=\dfrac{\pi H}{3}(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)$。

球：$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$。

角度和弧度互化

$\alpha=\dfrac{\pi\cdot a^\circ}{180^\circ}$；　$a^\circ=\alpha\dfrac{180^\circ}{\pi}$（$\alpha$ 是角的弧度，a 是角 度）。

两角和、差公式

1．$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

2．$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$。

3．$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

倍角公式和半角公式

1．$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$。 2．$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$。

3. $\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$.　　4. $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$.

5. $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$.

6. $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

7. $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.　　8. $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

和差化积公式

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

5. $\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

6. $1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

7. $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.