中学数学题解手册

（上）

电子工业出版社

中学数学题解手册

（上）

朱家骏 主审

電子工業出版社

内 容 简 介

本手册选收基础数学题4000多例，分上、下两册．上册内容有：说明、检题、备查、名词英汉对照等；下册是题解．

检题分为数、式、方程、不等式、函数、数分预备、平面几何、平面解析几何、立体几何、应用题等十类．尽量做到：问题按类集中、演算过程连续、题解图文对照、难度深浅具备．在方法上，首先引导读者判别题目类型，按类在检题中寻找同类题目，然后独立思考进行解题，必要时对照题解的解法，达到完全弄懂和提高解题能力的目的，书中摘有备查一千余条，与下册题解相互呼应，该部分简述了有关概念、定理、公式以及记忆的方法等，便于读者查阅．为了开拓读者思路，书中还适当收入部分奥林匹克数学竞赛题，以提高读者的数学水平．

本书是一本学习基础数学的工具书，可供具有初中数学水平以上的读者参考使用．

中学数学题解手册（上）
姚元基　编著
朱家骏　主审
责任编辑：竞　力
电子工业出版社出版（北京海淀区万寿路）
电子工业出版社发行　各地新华书店经销
中国科学院印刷厂印刷
开本：850×1168毫米 1/32　印张：10.75　字数：564千字
1989年7月第一版　1989年7月第一次印刷
印数：1—1000册　定价：7.90元(精)
ISBN7-5053-0555-7/G·79(精)

為中国数學
下世世紀走向
世界打下
基础
陳省身
一九八八年九月

代 序

姚元基老同志交来《中学数学题解手册》一稿，嘱予审阅．由于教务较忙，仅作了大致浏览，但已深为他数十年如一日的辛勤劳动所感动，其中绝大部分是他多年教学实践中的经验体会，诚非亲历其境者所莫属．他不受常见的传统编法所束缚，构思不落俗套，敢于突破、创新，这是首先值得一提的．

他是针对着具有中学程度的读者学习数学而编写的，所以用词力求通俗，讲解不厌求详并别具一格，在方法上：首先是引导读者判别题目类型，能按类在"检题"中寻找同类题目，然后独立思考进行解题，必要时可在"题解"中对照一些方法，达到最后解决问题，从而在不知不觉间提高解题能力．

作为一本工具书，他兼收并蓄了从简单到复杂的一系列例题，还插入了部分高考及数学竞赛试题，所以本书既可作为自学者研习查看之用、也可作为教师组织命题之参考．

书中摘有"备查"一千余条，与后面"题解"相互呼应，其中不但简述了有关概念、定理、公式、方法等的要点，而且还把思考的过程、记忆的诀窍等无保留地贡献出来，这是姚老为读者着想：或因长期未用，或因其它原因，对某些概念、公式偶有遗忘时，尽量能在本书中就近找到提示，而免遍觅各书之烦．

如果读者在使用本书前，先了解一下全部内容，则其效果可能更佳．

当然，要把逻辑性很强的数学内容写成通俗的文字，尤其是某些涉及高等数学的概念，要浅显地、直观地表达出来是不容易的，但是姚老还是做了这方面的尝试，再加上中学数学的范畴和篇幅的局限，挂一漏万或辞不达意，在所不免，这就让它作为抛砖引玉吧．

"春蚕吐丝终有尽，留下青丝献后人。"这是姚老的夙愿，今天终于实现了．本手册的出版是体现着党中央改革精神的落实和双百方针的贯彻，希望对于普及数学知识，促进四化建设将起到一定的作用。

值此手册出版之际，略缀数语，供读者参考．

朱家骏

1984年11月于上海工业大学

说　　明

一、本手册供具有初中数学一般基础者自学时参考使用.

二、本手册选收中学数学基础题目 4000 余例，尽量做到：问题按类集中、演算过程连续、题解图文对照、难度浅深具备.

三、本手册检题依照各题的要求部分分类.

例如：已知 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$，$a$、$b$、$c$ 互不相等，求证：$x+y+z=0$. 归整式类；而已知 $abc=1$，求证：$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1$. 归分式类.

对于式题，根据其前面部分分类.

例如：化简 $\sqrt{5^{2\log_5 \lg x}-2\lg x+1}$ 归根式类；而化简 $\log_3\sqrt{81\times\sqrt[4]{729\times 9^{\frac{1}{3}}}}$ 归对数类.

对于两可题目，采用两见办法，例如："证明：一个自然数能被 11 整除的充要条件是它的奇位上数字和与偶位上数字和之差能被 11 整除"一题，在"整除"类和"解几一充要条件"类都能找到.

四、本手册题解，按所用解法集中编号. 例如：求 101^{10} 除以 11 后所得余数. 检题归余数类，题解编二项式号.

五、本手册分上、下两册，上册包括检题及备查两个部分，下册为题解.

读者如要查找与某题有关的解法，可按照题内的要求部分，先在检题里面寻找与这个题目最类似的题型，然后根据其后面编号在解题部分找出有关解答，针对自己所要解决的问题，对比其性质，参看其解法，解决自己所要解决的问题. 如还需了解某些概念、定理、性质等的简要内容及公式，则可查看备查部分.

六、数学题目日新月异，解题方法多种多样，本手册所选，自非唯一标准，仅供推陈出新，触类旁通之参考.

七、本手册的编排，是一种革新尝试，不妥之处，请读者指正.

编　者

总 目 录

（上）

（下）

检　题　目　录

（右边的号码是检题的页数）

检　　题

（题后号码是下册“题解”的编号，题后右上角有*的选自高考试题、有**的选自国内竞赛题、有***的选自国际竞赛题.有关各题的图形在“题解”中.）

第一类　数

一　算　术

（一）认　数

▲ 下列各数，哪些是有理数？ 哪些是无理数？

(1) e; π; 3.141; $3.14\dot{1}$; 3.141…; $5.3\dot{1}0\dot{6}$; $\frac{22}{7}$; $-\frac{3}{22}$; $512^{-\frac{1}{3}}$; $512^{-\frac{1}{2}}$; $\sqrt{2}-1$;

$(\sqrt{2}-1)^2$; $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$; 30°; $(\sqrt{2}-1)^0$; $\sqrt{\frac{568}{243}}$; $\frac{\sqrt[3]{-54}}{\sqrt[6]{256}}$　[1001]

(2) $\ln e$; $\lg e$; $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{3})^0$; $\log_2 8$; $10^{2\lg\sqrt{\lg 3}}$　[1501]

(3) $-\sin\frac{5\pi}{3}$; $\cos\frac{5\pi}{3}$; $\lg\operatorname{tg}(-840^\circ)$; $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\frac{5\pi}{12}$　[0001]

▲ 已知等腰 $\triangle ABC$ 的底 BC 及高 AD 的长都是整数，那么 $\sin A$ 和 $\cos A$ 中：是 (A)一个有理数、一个无理数；(B)两个有理数；(C)两个无理数；(D)要根据 BC 和 AD 的数值来确定.**　[0002]

▲ arccos0 是有理数还是无理数？　[0701]

▲如果 n 是正整数，那么 $\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$ 的值 (A)一定是零. (B)一定是偶数. (C)是整数但不一定是偶数. (D)不一定是整数. *　[1002]

▲ 下列各数哪些是正数？哪些是负数？

$\log_3 2$; $\log_{\frac{1}{3}}4$; $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}$; $\log_{1.9}9.1$; $\log_{\frac{7}{4}}0.6$.　[5243]

▲ $-\sqrt{2}i$ 和 $\sqrt{2}-i$ 哪一个是虚数？哪一个是纯虚数？　[1961]

▲ $-2i$ 是不是负数？$+2i$ 是不是正数？　[1962]

（二）定　数

▲ x 取什么整数时，$\frac{(x-1)^2}{2}$ 是(1)正数；(2)负数；(3)分数；(4)整数；(5)零？　[2001]

▲ x 为何值时，$\frac{|x|}{x}$ 是 (1)1；(2)-1；(3)无意义？　[2201]

▲ x 为什么实数时，$\frac{3}{|x|-2}$ 是 (1) 正数；(2) 负数；(3) 无意义？　[2202]

▲ x 为什么整数时，$\frac{15}{4n^2-1}$ 是 (1) 自然数；(2) 整数？　[2203]

▲ x 为何值时，$\frac{3x+6}{x^2-x-2}$ 是 (1) 无意义；(2) 为零？　[2204]

▲ 在什么条件下 $\frac{x^2-1}{(1+xy)^2-(x+y)}$ 为 (1)正；(2) 负；(3) 零；(4) 无意义？　[2205]

▲ 求使得 $\frac{n-13}{5n+6}$ 为一个非零的可约分数的最小正整数 n 是 (A)45；(B) 68；(C) 155；(D) 226；(E) 不同于 (A) ~ (D) 的答案.***　[1003]

▲ 实数m取哪些值时

$2(1+i)m^2+5(1-i)m-(3-2i)$ 是

(1) 实数；(2) 纯虚数；(3)虚数？ [1973]

▲ x 为哪些实数时，

$[1+\cos(-x)-i\sin(-x)]^{1978}$ 是实数. [1974]

(三) 证 数

▲ 证明：四个连续自然数的乘积加 1 后的算术平方根是一个自然数. ** [1011]

▲ 设 a, b, c, p, q, r 都是整数，且 p, q, r 两两互质，又 $\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}$ 是一个整数，

求证：$\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \frac{c}{r}$ 都是整数. [1012]

▲ 给定方程组 $\begin{cases} y-2x-a=0, & ① \\ y^2-xy+x^2-b=0. & ② \end{cases}$ a, b 是整数，证明：如果存在一组有理数解满足这个方程组，那么它们应该是整数. [3737]

▲ 证明：不存在这样两个分数：它们的和及它们的积都是整数. ** [1013]

▲ 如果 a 和 b 都是任意整数，证明方程

$$x^2+10ax+5b+3=0 \qquad ①$$

和

$$x^2+10ax+5b-3=0 \qquad ②$$

的根都不是整数. ** [1014]

▲ 如果 p, q, r 都是有理数，证明方程

$(p+q+r)x^2-2(p+q)x+p+q-r=0$

的根也是有理数. [1015]

▲ 如果 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 是某等差数列中的两项，证明此数列的任一项都不是有理数. [6041]

▲ 设 a_n 是 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的个位数字，$n=1, 2, \cdots$，试证：$0.a_1a_2\cdots a_n$ 是一个有理数. [6288]

▲ 证明：$\sqrt{2}$ 和lg2 都是无理数. [1016]

▲ 设在 $\frac{ax+b}{cx+d}=s$ 中，a、b、c、d 是互不相等的有理数，x 是无理数，求证 (1) 当 $ad=bc$ 时 s 是有理数；(2) 当 $ad\neq bc$ 时 s 是无理数. ** [1017]

▲ 证明：由正整数组成的等差数列的各项，不可能都是质数. [6306]

▲ 证明：形式为 m^4+4 的数是一个合数. $(m\in N)$ [1018]

▲ 证明：若 n 是大于 1 的整数，则 $p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$ 的值是奇数. [1019]

▲ 已知 x、y、z 是整数，x 和 $y+z$ 都是奇数，且满足 $x=2y+3z$，证明 z 必定是奇数. [1020]

▲ x、y、z 都是整数，且满足 $x^2+y^2=z^2$，试证 x、y、z 必为两奇一偶或三偶. [1021]

▲ 求证：当 n 是自然数时$(3+\sqrt{7})^n$ 的整数部分是一个奇数. [1022]

▲ 求证在11, 111, 1111, $\cdots$, $\underbrace{11\cdots11}_{n\text{个}1}$ 中，没有一个是完全平方数 $(n\geq 2)$. [1023]

▲ 求证第一个数字与第三个数字相同，第二个数字与第四个数字相同的四位数不可能是完全平方数. [1024]

▲ 若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，证明 a、b、c 三数中必有两数互为相反数. [1025]

▲ 假设 d 是正整数 a 和 b 的最大公约数，d' 是正整数 a' 和 b' 的最大公约数，证明正整数 aa'、ab'、ba'、bb' 的最大公约数是 dd'. *** [1026]

▲ 证明：当 n 和 k 都是给定的正整数，且 $n>1$、$k>2$ 时，$n(n-1)^{k-1}$ 可以写成 n 个连续偶数的和. [6305]

▲ 设 n 是满足下列条件的最小整数：大于 1、没有小于 10 的质因子、又不是质数，则

(A) $100<n\leq 110$; (B) $110<n\leq 120$;

(C) $120<n\leq 130$; (D) $130<n\leq 140$;

(E) $140<n\leq 150$. *** [1027]

(四) 倍 数

▲ n 是任意自然数，求证 n^3+5n 是 6 的倍数. [1031]

▲ n 是任意自然数，求证 $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$

是 17 的倍数. [1032]

▲ 设 n 是正整数，证明 $13^{2n}-1$ 是 168 的倍数. ** [1033]

▲ 当 n 为怎样的数时 7^n-1 是 6 和 8 的倍数. [2421]

▲ 如果一个两位数的十位数字与个位数字之半的和是偶数,那么这个两位数,必定是 4 的倍数. [1034]

▲ 证明任意一个整数与它的数字和之差是 9 的倍数. ** [1035]

▲ 有一个 n 位数,把这个 n 位数按逆序重新排列得一新数，求证新数与原数之差是 9 的整倍数. ** [1036]

▲ 有一个三位数,在它的百位数字上减去十位数字、再加上个位数字所得的数是 11 的倍数,证明这个三位数,也是 11 的倍数. [1037]

▲ 已知一个四位数 N,开头两个数字相同,后面两个数字也相同,(1)求证 N 是11的倍数,(2)如果 N 是一个完全平方数，求 $\sqrt{N}$. [1038]

▲ 设整数 a、b、c 满足 $a^2+b^2=c^2$, 证明 a、b 中至少有一个是 3 的倍数. [1039]

▲ 已知 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$,

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0,$$

求证 $3(\alpha-\beta)$、$3(\beta-\gamma)$、$3(\gamma-\alpha)$ 各为 2π 之整数倍. [0194]

(五) 整 除

▲ 证明下列各题.

(1) $99^{10}-1$ 能被 1000 整除. [2422]

(2) $55^{55}+9$ 能被 8 整除. [2423]

(3) $53^{53}-33^{33}$ 能被 10 整除. [2424]

▲ n 为自然数,证明:

(1) $(n+1)^n-1$ 能被 n^2 整除. [2425]

(2) $4^{2n+1}+3^{n+2}$ 能被 13 整除. [1040]

(3) $5^n+2\times3^{n-1}+1$ 能被 8 整除. *** [1041]

(4) $3^{3n}-26n-1$ 能被 676 整除. [1042,2426]

(5) $n(n+1)(2n+1)$ 能被 6 整除. [1043]

(6) $n(n+1)(5n+4)$ 能被 6 整除. [1044]

(7) $n(n^2-1)(n^2-5n+26)$ 能被 120 整除. [1046]

(8) $2903^n-803^n-464^n+261^n$ 能被 1897 整除. *** [1047]

▲ 求证 $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$ 能被 $x+y+z$ 整除. [5191]

▲ 求证 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 能被 $x+y+z$ 整除. [5192]

▲ 求证多项式 $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$, 当 n 是奇数时能被 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 整除. [5193]

▲ 求证 $x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}$ 能被 $x^4+x^3+x^2+x$ 整除. [5194]

▲ 求证: 当 n 是一切奇数时, 2^n+1 能被 3 整除. *** [1048]

▲ 求证: 如果 n 是奇数,那么 $46^n+296\times13^n$ 能被 1947 整除. *** [1049]

▲ 证明 $2n+1$ 个连续整数的和能被 $2n+1$ 整除. [6304]

▲ 证明 n 个连续整数的积能被 $n!$ 整除. [1250]

▲ 证明 3 个连续自然数的立方和能被 9 整除. [1050]

▲ 如果一个自然数的各位数字和能被 9 整除,那么这个自然数也能被 9 整除. [1051]

▲ 证明: 一个自然数能被 11 整除的充要条件,是它的奇位上数字和与偶位上数字和之差能被 11 整除. [1052]

▲ 证明任何一个奇数的平方减 1 能被 8 整除. *** [1053]

▲ 证明任意两个奇数的平方的差能被 8 整除. [1054]

▲ 任给五个整数,证明必能从其中选取三个数: 使得它们的和能被 3 整除. ** [1055]

▲ 设 p 和 q 都是自然数，且

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319},$$

求证 p 能被 1979 整除。* [1056]

▲ 证明：如果 u^2+uv+v^2 能被 9 整除，且 u 和 v 都是整数，那么 u 和 v 都能被 3 整除。*** [1057]

▲ 对于同样的整数 x 和 y，表达式 $2x+3y$ 和 $9x+5y$ 能同时被 17 整除。*** [1058]

▲ 设 S 是命题"如果整数 n 的各位数字之和能被 6 整除，则 n 也能被 6 整除。"表明命题 S 错误的 n 的一个值是 $(A)30$；$(B)33$；$(C)40$；$(D)42$；(E) 不是以上各数。*** [1059]

▲ 如果 x^3-6x^2-ax+b 能被 x^2-4x+3 整除，求 a、b。 [1061]

▲ 若 ax^3-9x^2+bx+2 能被 $2x^2-x-1$ 整除，求 a、b。 [1062]

▲ 若 $ax^3+bx^2-47x-15$ 能被 $3x+1$ 和 $2x-3$ 整除，求 a、b。 [1063]

▲ 若 $x^4-5x^3+11x^2+mx+n$ 能被 x^2-2x+1 整除，求 m，n。 [1064]

▲ 已知七位数 $62\alpha\beta427$ 能被 99 整除，求 α、β。** [1065]

(六) 余　　数

▲ 求 101^{10} 除以 11 后所得余数。 [2427]

▲ 求用 7 去除 48^{13} 后所得余数。 [2428]

▲ 求 $a^{1985}+1$ 除以 $a-1$ 后所得余数。 [1124]

▲ 证明：$4\cdot6^n+5^{n+1}$ 被 20 除后余数为 9。 [1045]

▲ 证明：任何奇数的平方除以 4，余数是 1。 [1125]

▲ 已知 x^3+bx^2+cx+d 被 $x-1$ 除时余 0、被 $x-3$ 除时余 2、被 $x+2$ 除时和被 $x-2$ 除时所得余数相等。求 b、c、d。 [5195]

(七) 比 大 小

▲ 比较下列各组数的大小：

(1) π 和 $\frac{22}{7}$；(2) -0.6 和 $-\frac{2}{3}$；

(3) $\sqrt{0.5}$ 和 0.5；(4) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 和 4；

(5) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ 和 $1+\sqrt{15}$；

(6) $\sqrt{29}$ 和 $5\frac{4}{13}$；(7) $-3\sqrt[6]{2}$ 和 $2\sqrt[3]{-4}$；

(8) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 和 $\sqrt{5}-2$。 [1071]

▲ 比较下列诸数，找出最小的正数：

$(A)\ 10-3\sqrt{11}$，$(B)\ 3\sqrt{11}-10$，

$(C)\ 18-5\sqrt{13}$，$(D)\ 51-10\sqrt{26}$，

$(E)\ 10\sqrt{26}-51$。*** [1072]

▲ 3 和 $3+i$ 哪一个大？ [1963]

▲ 比较下列各组式的大小：

(1) a 和 $2a$；(2) a 和 $a+b$；(3) a 和 $|a|$；(4) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 和 $(ac+bd)^2$、$(ad\neq bc)$；(5) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ 和 $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$；

(6) $\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3$ 和 2。 [2002]

▲ 若 $a>0$，$a^2-2ab+c^2=0$，$bc>a^2$，比较 a、b、c 三数的大小。 [2003]

▲ a、b、c 三数的算术平均数的平方，与这三数的平方的算术平均数孰大？ [2004]

▲ 比较 $1+\frac{1}{x^2}$ 与 $\frac{2}{x}$ 的大小 $(x\neq0)$。 [2206]

▲ 比较下列各组式的大小：

(1) a 和 $\sqrt{a}$；(2) a 和 $\sqrt{a^2}$；

(3) $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ 和 $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$ $(a\geqslant3)$ [2301]

▲ 设 a、b、c、d、m、n 都是正实数，

$p=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$q=\sqrt{ma+nc}\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$，

那么 $(A)\ p\geqslant q$，$(B)\ p\leqslant q$，$(C)\ p<q$，

(D) p、q 间的大小关系不确定而与 m、n 的大小有关. ** [2302]

▲ 下列各数哪些大于 1? 哪些小于 1 而大于 0?

(1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-8/7}$; (2) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-7/3}$; (3) $(1.001)^{2/3}$;

(4) $(0.001)^{0.3}$. [5233]

▲ 比较下列各组数的大小:

(1) $3^{0.8}$ 和 $3^{0.7}$; (2) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3/2}$ 和 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1/2}$;

(3) $0.75^{1.4}$ 和 $0.75^{1.5}$;

(4) $e^{\frac{1}{2}}$ 和 $e^{\sqrt{2}}$. [5234]

▲ 比较下列各组数的大小:

(1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ 与 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;

(2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$ 与 $\left(\frac{5}{4}\right)^{4.9}$; (3) $2^{\sqrt{2}}$ 与 $3^{\sqrt{3}}$;

(4) 3^{45} 与 5^{n}; (5) $\sqrt{5}^{99}$ 与 $\sqrt[3]{9}^{110}$;

(6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ 与 0.001. [5235]

▲ 在下列各式里,比较 m 与 n 的大小:

(1) $1.5^{m} > 1.5^{n}$; (2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{m} < \left(\frac{4}{5}\right)^{n}$;

(3) $\left(\frac{8}{3}\right)^{m} > \left(\frac{8}{3}\right)^{n}$; (4) $0.3^{m} > 0.3^{n}$;

(5) $(\sqrt{7})^{m} < (\sqrt{7})^{n}$.

[5236]

▲ 决定下列各式里的 x 是大于 0 还是小于 0?

(1) $10^{x}=7$; (2) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x}=\frac{3}{4}$;

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{5}{2}$; (4) $\left(\frac{7}{4}\right)^{x}=0.6$. [5238]

▲ 比较下列各组数的大小:

(1) $\log_{3}0.63$ 与 $\log_{3}\frac{1}{16}$; (2) $\log_{\frac{1}{2}}3$ 与 $\log_{\frac{1}{3}}2$;

(3) $\log_{2}\frac{3.14}{\pi}$ 与 $\log_{2}1$; (4) $\log_{4}3$ 与 $\log_{16}8$;

(5) 2 与 $\log_{3}10$; (6) $\log_{4}1$ 与 $\log_{5}1$;

(7) $\log_{5}5$ 与 $\log_{6}6$; (8) $\log_{8}9$ 与 $\log_{9}8$;

(9) $\log_{3}12$ 与 $\lg 21$; (10) $\log_{\frac{1}{3}}4$ 与 $\log_{\frac{1}{5}}4$;

(11) $\log_{3}0.98$ 与 $0.98^{1/3}$; (12) $\log_{2}\frac{2}{3}$ 与 $\log_{4}\frac{4}{3}$;

(13) $a\lg\frac{1}{3}$ 与 $b\lg\frac{1}{3}$; (14) $\log_{a}3$ 与 $\log_{a}2$;

(15) $\log_{a-1}7$ 与 $\log_{a-1}8$. [5244]

▲ 比较下列两式中 a 与 b 的大小:

(1) $\log_{\sqrt{5}}a > \log_{\sqrt{5}}b$; (2) $\log_{0.1}a > \log_{0.1}b$

[5245]

▲ 指出下列各数在哪两个连续整数之间:

(1) $\log_{2}7$; (2) $\log_{3}\frac{1}{5}$;

(3) $\lg 27$; (4) $\lg 0.46$ [1502]

▲ 若 $x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$ 则 x 的值是属于开区间

(A) $(-3, -2)$; (B) $(-2, -1)$;

(C) $(1, 2)$; (D) $(2, 3)$. ** [1503]

▲ 确定 0.3^{2}、$\log_{2}0.3$、$2^{0.3}$ 三数之间的顺序.

[1504,5246]

▲ 已知 $f(x)=1+\log_{x}5$, $g(x)=\log_{x^2}9+\log_{x^3}8$, 比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小. ** [5247]

▲ 设 $0<x<1$, 比较 $|\log_{a}(1-x)|$ 与 $|\log_{a}(1+x)|$ 的大小. * [5248]

▲ 不进行求值,用比较大小的方法,确定下列各式的正负:

(1) $\log_{\frac{4}{5}}\frac{1}{3}-\log_{\frac{5}{4}}\frac{1}{3}$

(2) $\dfrac{\log_{8}11-\log_{8}25}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{30}-\log_{\frac{1}{2}}30}(1-\log_{3}5)$ [5249]

(3) $\sin 20°-\sin 21°$ [0611]

(4) $\sin 120°-\sin 240°$ [0612]

(5) $\sin 260°-\sin 250°$ [0613]

(6) $\cos 20°-\cos 21°$ [0614]

(7) $\cos 20°-\cos 120°$ [0615]

(8) $\cos 320°-\cos 310°$ [0616]

(9) $\operatorname{tg} 120°-\operatorname{tg} 121°$ [0617]

(10) $\operatorname{ctg} 200°-\operatorname{ctg} 210°$ [0618]

▲ 若 $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)]=\log_3[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y)]=\log_5[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z)]=0$，比较 x、y、z 三数的大小. [1505]

▲ 比较下列各组数的大小:

(1) $\sin 307°$ 与 $\operatorname{tg} 310°$; (2) $\sin 235°$ 与 $\operatorname{ctg} 155°$; (3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{9}$ 与 $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{9}$ [0003]

▲ 比较下列两组数的大小:

(1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ 和 $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$;

(2) $\operatorname{arctg}(-1.5)$ 和 $\operatorname{arctg}(-2)$ [0702]

▲ a 是什么值时，$\arccos a-\arccos(-a)$ 的值(1) 大于 0;(2) 小于 0;(3) 等于 0? [0703]

▲ $\arccos(-x)$ 大于 $\arccos x$ 的充要条件，是

(A) $x\in(0,1]$; (B) $x\in(-1,0)$;

(C) $x\in[0,1]$; (D) $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$* [0704]

(八) 数的最大整数

▲ 满足 $n^{200}<5^{300}$ 的最大整数 n 是 (A) 8; (B) 9; (C) 10; (D) 11; (E) 12.*** [1076]

▲ $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，若 $M=\sqrt{[\sqrt{x}]}$、$N=[\sqrt{\sqrt{x}}]$ (其中 $x\geq 1$)，则一定有 (A) $M>N$; (B) $M=N$; (C) $M<N$; (D) 以上答案都不对. ** [1077]

▲ $[x]$ 表示取 x 的最大整数部分.

若 $y=4\left(\frac{x+[u]}{4}-\left[\frac{x+[u]}{4}\right]\right)$,

且当 $\begin{cases} x=1,8,11,14 \text{ 时 } y=1, \\ x=2,5,12,15 \text{ 时 } y=2, \\ x=3,6,9,16 \text{ 时 } y=3, \\ x=4,7,10,13 \text{ 时 } y=0. \end{cases}$

已知表达式: (A) $u=\frac{x+2}{4}$; (B) $u=\frac{x+1}{4}$; (C) $u=\frac{x}{4}$; (D) $u=\frac{x-1}{4}$ 中只有一个是正确的，问是哪一个? ** [1078]

▲ 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\sum_{n=1}^{1024}[\log_2 n]=$ (A) 8192; (B) 8204; (C) 9218; (D) $\log_2 1024$; (E) 不在以上各数之中. *** [1079]

▲ 设 $[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数，则方程 $4x^2-40[x]+51=0$ 的实数解的个数是 (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4.*** [1080]

(九) 实数的绝对值

▲ 脱去下列各式里的绝对号:

(1) $|x+|x||$; (2) $|x+5|-|3-2x|$; (3) $|x-2|-|2x-1|-|x-4|$. [1081]

(十) 数的进位制

▲ 把八进位数 543 转换成二进位数. [1091]

▲ 以三进位制表示的数 M 是 12 112 211 122 211 112 222，则以九进位制表示时这个数 M 的第一位是什么数? *** [1092]

(十一) 数学归纳法

▲ 当 n 是任意自然数时，试用数学归纳法求证下列各题:

证明: $4^{2n+1}+3^{n+2}$ 能被 13 整除. [1040]

证明: $5^n+2\times 3^{n-1}+1$ 能被 8 整除. [1041]

证明: $3^{3n}-26n-1$ 能被 676 整除. [1042]

证明: $n(n+1)(5n+4)$ 能被 6 整除. [1044]

证明: $4\cdot 6^n+5^{n+1}$ 被 20 除后余数为 9. [1045]

▲ 求证: 当 n 是一切奇数时 2^n+1 能被 3 整除. [1048]

▲ 证明: 三个连续自然数的立方和能被 9 整除. [1050]

▲ 证明: $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. [2171]

▲ 证明 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ [4602]

▲ 证明：当 $n\geqslant 5$ 自然数时，$2^n>n^2$ [4763]

▲ 证明：当 $\alpha>-1$，$n\geqslant 1$ 时，

$(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha$ [4764]

▲ 求证：当 n 是扩大自然数时，

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\cdots\cdot\cos 2^n\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$ [0272]

▲ 求证：$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$ [0273]

▲ 求证：$$\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cdots+\cos(2n-1)\theta=\frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$$ [0277]

二、排列组合

（一）阶　乘

▲ 求证：$\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}=1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$ [1201]

▲ 求证：$$1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot n!=\frac{(n!)^{n-1}}{3^1\cdot 4^2\cdot 5^3\cdot\cdots\cdot n^{n-2}}$$ [1202]

▲ 数100!的末尾有多少个0？ [1203]

▲ 数1000!的末尾有多少个0？ ***[1204]

（二）排列组合数

▲ 证明：$A_{16}^3=2A_8^4$ [1206]

$A_m^n=\frac{m!}{(m-n)!}$ [1207]

$A_m^n+nA_m^{n-1}=A_{m+1}^n$. [1208]

▲ 证明：$P_n=P_{n+1}-nP_n$ [1209]

$P_{n+1}-P_n=n^2P_{n-1}$ [1210]

$1P_1+2P_2+3P_3+\cdots+nP_n=(n+1)!-1$ [1211]

$C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!}$　接尾公式[1212]

$C_m^n=C_m^{m-n}$　化简公式 [1213]

$C_m^n=\frac{m}{n}C_{m-1}^{n-1}$，或 $nC_m^n=mC_{m-1}^{n-1}$　留头公式 [1214]

$C_m^n=C_{m-1}^{n-1}+C_{m-1}^n$　含不含公式 [1215]

$A_m^n=n!C_m^n$　排组公式 [1216]

▲ 求证：$C_{m+1}^n=C_m^{n-1}+C_{m-1}^{n-1}+C_{m-1}^n$ [1217]

$C_{m+2}^n=C_m^{n-2}+2C_m^{n-1}+C_m^n$ [1218]

$C_{m-1}^n+C_{m-2}^n+C_{m-3}^n+\cdots+C_{n+1}^n+C_n^n=C_m^{n+1}$ [1219]

▲ 已知 $C_m^{m-1}=C_{n+1}^{n-1}$，求证

$m=1+2+3+\cdots+n$ [1220]

（三）组合式系数之和

▲ 求证：$C_n^0 2^n-C_n^1 2^{n-1}+C_n^2 2^{n-2}-\cdots+(-1)^nC_n^n 2^0=1^n$ [2411]

▲ 求证：(1) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$

(2) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=0$ [2412]

▲ 求证：$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^{n-1}=2^{n-1}$（$n$ 是偶数） [2413]

▲ 求证：$1C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+\cdots+2^nC_n^n=3^n$ [2414]

▲ 求证：$1C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$ [2415]

▲ 求证：$1C_n^0-2C_n^1+3C_n^2-\cdots+(-1)^n(n+1)C_n^n=0$ [2416]

▲ 求证：$$C_n^0+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+\cdots+\frac{C_n^n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$ [2417]

▲ 求证：$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$ [2418]