

中学数学题解手册

(上)



電子工業出版社

中学数学题解手册

(上)

朱家骏⁷主⁷审⁷

电子工业出版社

内 容 简 介

本手册选收基础数学题 4000 多例, 分上、下两册. 上册内容有: 说明、检题、备查、名词英汉对照等; 下册是题解.

检题分为数、式、方程、不等式、函数、数分预备、平面几何、平面解析几何、立体几何、应用题等十类. 尽量做到: 问题按类集中、演算过程连续、题解图文对照、难度深浅具备. 在方法上, 首先引导读者判别题目类型, 按类在检题中寻找同类题目, 然后独立思考进行解题, 必要时对照题解的解法, 达到完全弄懂和提高解题能力的目的, 书中摘有备查一千余条, 与下册题解相互呼应, 该部分简述了有关概念、定理、公式以及记忆的方法等, 便于读者查阅. 为了开拓读者思路, 书中还适当收入部分奥林匹克数学竞赛题, 以提高读者的数学水平.

本书是一本学习基础数学的工具书, 可供具有初中数学水平以上的读者参考使用.

中学数学题解手册(上)

姚元基 编著

朱家骏 主审

责任编辑: 竞 力

电子工业出版社出版 (北京海淀区万寿路)

电子工业出版社发行 各地新华书店经销

中国科学院印刷厂印刷

开本: 850×1168 毫米 $1/32$ 印张: 10.75 字数: 564 千字

1989 年 7 月第一版 1989 年 7 月第一次印刷

印数: 1—1000 册 定价: 7.90 元(精)

ISBN7-5053-0555-7/G·79(精)

為中國數學
下世紀走向
世界打下
基礎

陳省身



一九八八年九月

代 序

姚元基老同志送来《中学数学题解手册》一稿，嘱予审阅。由于教务较忙，仅作了大致浏览，但已深为他数十年如一日的辛勤劳动所感动，其中绝大部分是他多年教学实践中的经验体会，诚非亲历其境者所莫属。他不受常见的传统编法所束缚，构思不落俗套，敢于突破、创新，这是首先值得一提的。

他是针对着具有中学程度的读者学习数学而编写的，所以用词力求通俗，讲解不厌求详并别具一格，在方法上：首先是引导读者判别题目类型，能按类在“检题”中寻找同类题目，然后独立思考进行解题，必要时可在“题解”中对照一些方法，达到最后解决问题，从而在不知不觉间提高解题能力。

作为一本工具书，他兼收并蓄了从简单到复杂的一系列例题，还插入了部分高考及数学竞赛试题，所以本书既可作为自学者研习查看之用、也可作为教师组织命题之参考。

书中摘自“备查”一千余条，与后面“题解”相互呼应，其中不但简述了有关概念、定理、公式、方法等的要点，而且还把思考的过程、记忆的诀窍等无保留地贡献出来，这是姚老为读者着想：或因长期未用，或因其它原因，对某些概念、公式偶有遗忘时，尽量能在本书中就近找到提示，而免遍觅各书之烦。

如果读者在使用本书前，先了解一下全部内容，则其效果可能更佳。

当然，要把逻辑性很强的数学内容写成通俗的文字，尤其是某些涉及高等数学的概念，要浅显地、直观地表达出来是不容易的，但是姚老还是做了这方面的尝试，再加上中学数学的范畴和篇幅的局限，挂一漏万或辞不达意，在所不免，这就让它作为抛砖引玉吧。

“春蚕吐丝终有尽，留下青丝献后人。”这是姚老的夙愿，今天终于实现了。本手册的出版是体现着党中央改革精神的落实和双百方针的贯彻，希望对于普及数学知识，促进四化建设将起到一定的作用。

值此手册出版之际，略缀数语，供读者参考。

朱家骏

1984年11月于上海工业大学

说 明

一、本手册供具有初中数学一般基础者自学时参考使用。

二、本手册选收中学数学基础题目 4000 余例, 尽量做到: 问题按类集中、演算过程连续、题解图文对照、难度浅深具备。

三、本手册检题依照各题的要求部分分类。

例如: 已知 $\frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a}$, a, b, c 互不相等, 求证: $x + y + z = 0$. 归整式类; 而已

知 $abc = 1$, 求证: $\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = 1$. 归分式类。

对于式题, 根据其前面部分分类。

例如: 化简 $\sqrt{5^{\log_5 x} - 2\lg x + 1}$ 归根式类; 而化简 $\log_3 \sqrt{81 \times \sqrt[4]{729 \times 9}}$ 归对数类。

对于两可题目, 采用两见办法, 例如: “证明: 一个自然数能被 11 整除的充要条件是它的奇位上数字和与偶位上数字和之差能被 11 整除”一题, 在“整除”类和“解几—充要条件”类都能找到。

四、本手册题解, 按所用解法集中编号。例如: 求 101^n 除以 11 后所得余数。检题归余数类, 题解编二项式号。

五、本手册分上、下两册, 上册包括检题及备查两个部分, 下册为题解。

读者如要查找与某题有关的解法, 可按照题内的要求部分, 先在检题里面寻找与这个题目最类似的题型, 然后根据其后而编号在解题部分找出有关解答, 针对自己所要解决的问题, 对比其性质, 参看其解法, 解决自己所要解决的问题。如还需了解某些概念、定理、性质等的简要内容及公式, 则可查看备查部分。

六、数学题目日新月异, 解题方法多种多样, 本手册所选, 自非唯一标准, 仅供推陈出新, 触类旁通之参考。

七、本手册的编排, 是一种革新尝试, 不妥之处, 请读者指正。

编 者

总 目 录

(上)

说明	IV
检题目录	VIII
检题	1
备查索引	173
备查	183
附录一 部分名词英汉对照表	327
附录二 常用计量单位表	333
附录三 希腊字母表	334

(下)

题解	I~1002
----------	--------

检 题 目 录

(右边的号码是检题的页数)

第一类 数 1			
一、算术 1			
(一) 认数..... 1			
(二) 定数..... 1			
(三) 证数..... 2			
(四) 倍数..... 2			
(五) 整除..... 3			
(六) 余数..... 4			
(七) 比大小..... 4			
(八) 数的最大整数..... 6			
(九) 实数的绝对值..... 6			
(十) 数的进位制..... 6			
(十一) 数学归纳法..... 6			
二、排列组合 7			
(一) 阶乘..... 7			
(二) 排列组合数..... 7			
(三) 组合式系数之和..... 7			
三、指数 8			
(一) 概念题..... 8			
(二) 化简..... 8			
(三) 计算..... 8			
(四) 根据条件求值..... 9			
四、对数 9			
(一) 概念题..... 9			
(二) 化简..... 9			
(三) 计算..... 9			
(四) 求值..... 10			
(五) 对数值中定参值..... 11			
(六) 常用对数..... 11			
五、三角比 (角度是常数) 12			
(一) 概念题..... 12			
(二) 化简..... 12			
(三) 化为积的形式..... 12			
(四) 化为差的形式..... 12			
(五) 求三角比..... 12			
(六) 求式值..... 15			
(七) 计算特殊角的三角比..... 15			
(八) 计算三角比的代数之和..... 15			
(九) 计算三角比的连乘积..... 16			
(十) 三角比的混合计算..... 16			
(十一) 其它有关三角比之题..... 17			
六、复数 17			
(一) 虚根..... 17			
(二) 复数的代数式..... 17			
(三) 复数的几何表示..... 18			
(四) 复数的三角式..... 19			
(五) 实数、虚数混化合化简..... 20			
(六) 其他有关复数之题..... 20			
第二类 式 22			
一、整式 22			
(一) 多项式——商式、余式、公因式..... 22			
(二) 分解因式..... 22			
(三) 根据条件, 求整式之值..... 24			
(四) 根据条件, 证等式成立..... 24			
(五) 恒等式..... 25			
(六) 完全方式(数)..... 25			
(七) 行列式..... 26			
二、分式 (包括负指数) 26			
(一) 化简..... 26			
(二) 根据条件, 求分式之值..... 27			
(三) 证明等式成立..... 27			
(四) 根据条件, 证明等式成立..... 28			
(五) 部分分式——分式分项..... 28			
(六) 其它有关分式之题..... 28			
三、根式 (包括分指数) 29			
(一) 概念题..... 29			
(二) 化简..... 29			
(三) 根据条件, 求根式之值..... 31			
(四) 证明等式成立..... 31			
(五) 根据条件, 证明等式成立..... 31			
四、二项式 31			
(一) 二项式的展开..... 31			
(二) 求展开式的某些项 (或其系数)..... 31			
(三) 根据展开式的某些项, 求 x 32			
五、指数等式 33			
(一) 概念题..... 33			
(二) 证明等式成立..... 33			
(三) 根据条件, 证明等式成立..... 33			
六、对数等式 33			
(一) 概念题..... 33			
(二) 对数公式..... 33			
(三) 对数等式..... 34			
(四) 根据条件, 证明等式成立..... 34			
七、三角等式 34			
(一) 概念题..... 34			
(二) 求等式成立的条件..... 35			
(三) 证明等式成立..... 35			
(四) 根据条件, 证明等式成立..... 37			
(五) 在 $\triangle ABC$ 内, A, B, C 为其三内角..... 37			
(六) 在 $\triangle ABC$ 内, a, b, c 为其各角的对边..... 39			
第三类 方程 41			

一、方程的图象...41	(五) 对数不等式...68	(三) 三角函数... 83	则求导..... 101
二、解方程.....41	(六) 根据条件, 证明不等式成立.....68	七、反三角比和反三角函数..... 84	(五) 其它有关导数之题..... 102
(一) 代数方程.....41	(七) 不等定理的应用.....70	(一) 求角度..... 84	四、微分..... 102
(二) 指数方程.....48	(八) 三角不等式...71	(二) 求比值..... 85	五、积分..... 103
(三) 对数方程.....49	第五类 函数73	(三) 反三角名称的互化..... 86	(一) 不定积分... 103
(四) 三角方程.....50	一、集合.....73	(四) 求证等式成立..... 86	(二) 定积分..... 105
(五) 参数方程.....53	二、函数概念.....73	(五) 根据条件, 求证等式成立..... 87	第七类 平面几何 106
(六) 虚系数方程(组).....54	(一) 已知函数关系建立解析式...73	(六) 反三角等式求 x 87	一、平行..... 106
三、方程的讨论...55	(二) 已知函数解析式作图.....74	(七) 其它有关反三角之题... 87	二、角度..... 106
(一) 一次方程(组).....55	(三) 已知图象情况, 求其解析式.....74	第六类 数分预备 88	(一) 求三角形的内角..... 106
(二) 二次方程(组).....55	(四) 从几个函数图象求其交点个数.....75	一、数列..... 88	(二) 求非三角形内角的角... 108
(三) 高次方程.....59	(五) 函数的讨论...75	(一) 通项、界... 88	(三) 证明角度相等(包括证平分角)... 109
第四类 不等式61	(六) 反函数.....76	(二) 等差数列... 88	(四) 证明角度等式成立..... 109
一、不等式的图象.....61	(七) 有关 $f(x)$ 之题(包括函数值).....76	(三) 调和数列... 90	三、长度..... 110
二、解不等式.....61	三、函数性质77	(四) 等比数列... 90	(一) 求三角形的边长..... 110
(一) 一次不等式...61	(一) 对称性(奇偶性).....77	(五) 等差、等比混合..... 92	(二) 求非三角形边的线段长(包括求距离、求高度)..... 111
(二) 二次及以上不等式.....61	(二) 单调性(增减性).....78	(六) 一般数列... 93	(三) 证明长度相等(包括证平分、证中点)..... 113
(三) 分式不等式...62	(三) 周期性.....78	(七) 其它有关数列之题..... 95	(四) 证明长度等式成立..... 115
(四) 根式不等式...62	四、函数定义域79	二、极限 96	四、面积..... 118
(五) 绝对值不等式.....62	(一) 幂函数.....79	(一) 数列的极限..... 96	(一) 求面积(包括求参数)..... 118
(六) 有省略号的不等式(组).....63	(二) 指数函数.....79	(二) 函数的极限..... 97	(二) 证明面积相等..... 120
(七) 指数不等式...63	(三) 对数函数.....80	三、导数 100	(三) 证明面积等式成立..... 120
(八) 对数不等式(组).....63	(四) 三角函数.....80	(一) 增量、连续..... 100	
(九) 三角不等式...64	(五) 反三角函数...81	(二) 用定义求导..... 100	
三、不等式的讨论.....65	五、函数值域81	(三) 从定义推求导公式..... 100	
四、证不等式.....65	六、函数极值82	(四) 用公式及法..... 100	
(一) 一般不等式...65	(一) 幂函数.....82		
(二) 绝对值不等式.....66	(二) 对数函数.....83		
(三) 有省略号的不等式.....67			
(四) 指数不等式...67			

五、求作…… 121	(六) 动点的轨迹…… 135	(三) 其它有关数字的问题… 150	(三) 平面图形上…… 160
(一) 作点…… 121	(七) 确定或讨论参数…… 136	二、排列组合问题…… 151	十六、集合问题…… 162
(二) 作直线…… 122	(八) 曲线的切线…… 137	(一) 数字的排列组合…… 151	十七、数列问题…… 162
(三) 作三角形… 122	(九) 坐标变换… 138	(二) 其它有关排列组合的问题…… 151	十八、极限问题…… 164
(四) 作四边及以 上的多边形 …… 122	(十) 极坐标系… 138	三、概率问题… 152	十九、用导数解应用题… 164
(五) 作圆…… 122	第九类 立体几何 …… 140	四、推理问题… 153	二十、用微分解应用题… 164
(六) 作轨迹、吻 接、外切、等 分圆…… 122	一、空间点、线、 面、角…… 140	五、行程问题… 154	廿一、用积分解应用题… 164
六、判形…… 123	(一) 一般题型… 140	(一) 平路…… 154	廿二、平面上的 问题…… 165
(一) 答问…… 123	(二) 二面角…… 141	(二) 上下坡…… 154	廿三、测量问题…… 165
(二) 求证…… 123	(三) 三面及以上 的角…… 141	(三) 环路…… 154	廿四、最大最小 问题…… 168
七、定值和定向 …… 124	二、多面体…… 142	(四) 水路…… 155	(一) 平面图形的 最大最小… 168
八、多边形的边 数…… 124	(一) 棱柱…… 142	六、工作问题… 155	(二) 生活中的最 大最小…… 169
九、四点共圆… 125	(二) 棱锥…… 144	七、百分率问题 …… 156	廿五、用解析法 解应用题 …… 171
十、相切…… 125	(三) 棱台…… 145	八、配套问题… 156	廿六、立体问题 …… 171
十一、垂直…… 125	(四) 其它有关多 面体之题… 146	九、年龄问题… 157	(一) 体积、容积、 表面积等… 171
十二、其它…… 125	三、旋转体…… 146	十、时针问题… 157	(二) 有关立体的 最大最小问 题…… 171
第八类 平面解析 几何 …… 127	(一) 圆柱…… 146	十一、换算问题 …… 157	
一、充要条件… 127	(二) 圆锥…… 146	十二、物理问题 …… 157	
二、解析几何… 127	(三) 圆台…… 147	十三、化学问题 …… 158	
(一) 点和它的坐 标…… 127	(四) 球…… 147	十四、不定问题 …… 159	
(二) 圆锥曲线的 方程…… 128	(五) 其它有关旋 转体之题 (旋转一周) …… 148	十五、不等问题 …… 160	
(三) 圆锥曲线的 性质…… 131	第十类 应用题 … 149	(一) 数字上…… 160	
(四) 用解析法解 题…… 132	一、数字问题… 149	(二) 生活上…… 160	
(五) 用解析法证 题…… 133	(一) 求一个数… 149		
	(二) 求两个及以 上的数…… 149		

检 题

(题后号码是下册“题解”的编号,题后右上角有*的选自高考题、有**的选自国内竞赛题、有***的选自国际竞赛题.有关各题的图形在“题解”中.)

第一类 数

一 算 术

(一) 认 数

▲ 下列各数,哪些是有理数? 哪些是无理数?

$$(1) e; \pi; 3.141; 3.14\dot{i}; 3.141\dots; 5.3\dot{i}06; \frac{22}{7}; -\frac{3}{22}; 512^{-\frac{1}{2}}; 512^{-\frac{1}{3}}; \sqrt{2}-1;$$

$$(\sqrt{2}-1)^2; (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1); 30^\circ; (\sqrt{2}-1)^0; \sqrt[3]{\frac{568}{243}}; \sqrt[3]{\frac{-54}{256}} \quad [1001]$$

$$(2) \ln e; \lg e; \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{3})^0; \log_2 8; 10^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{10} \quad [1501]$$

$$(3) -\sin \frac{5\pi}{3}; \cos \frac{5\pi}{3}; \lg \lg (-840^\circ); (\sqrt{6}-\sqrt{2}) \sin \frac{5\pi}{12} \quad [0001]$$

▲ 已知等腰 $\triangle ABC$ 的底 BC 及高 AD 的长都是整数,那么 $\sin A$ 和 $\cos A$ 中: 是 (A) 一个有理数、一个无理数; (B) 两个有理数; (C) 两个无理数; (D) 要根据 BC 和 AD 的数值来确定. ** [1002]

▲ $\arccos 0$ 是有理数还是无理数? [0701]

▲ 如果 n 是正整数, 那么

$\frac{1}{8} [1 - (-1)^n] (n^2 - 1)$ 的值 (A) 一定是零. (B) 一定是偶数. (C) 是整数但不一定是偶数. (D) 不一定是整数. * [1002]

▲ 下列各数哪些是正数? 哪些是负数?

$$\log_2 2; \log_3 4; \log_{\frac{3}{4}} \frac{3}{4}; \log_{1.9} 1; \log_{\frac{1}{4}} 0.6.$$

[5243]

▲ $-\sqrt{2}i$ 和 $\sqrt{2}-i$ 哪一个是虚数? 哪一个是纯虚数? [1961]

▲ $-2i$ 是不是负数? $+2i$ 是不是正数? [1962]

(二) 定 数

▲ x 取什么整数时, $\frac{(x-1)^2}{2}$ 是 (1) 正数;

(2) 负数; (3) 分数; (4) 整数; (5) 零? [2001]

▲ x 为何值时, $\frac{|x|}{x}$ 是 (1) 1; (2) -1; (3) 无意义? [2201]

▲ x 为什么实数时, $\frac{3}{|x|-2}$ 是 (1) 正数;

(2) 负数; (3) 无意义? [2202]

▲ x 为什么整数时, $\frac{15}{4n^2-1}$ 是 (1) 自然数; (2) 整数? [2203]

▲ x 为何值时, $\frac{3x+6}{x^2-x-2}$ 是 (1) 无意义;

(2) 为零? [2204]

▲ 在什么条件下 $\frac{x^2-1}{(1+xy)^2-(x+y)}$ 为

(1) 正; (2) 负; (3) 零; (4) 无意义? [2205]

▲ 求使得 $\frac{n-13}{5n+6}$ 为一个非零的可约分数的最小正整数 n 是 (A) 45; (B) 68; (C) 155; (D) 226; (E) 不同于 (A) ~ (D) 的答案. *** [1003]

▲ 实数 m 取哪些值时

$2(1+i)m^2 + 5(1-i)m - (3-2i)$ 是

(1) 实数; (2) 纯虚数; (3) 虚数? [1973]

▲ x 为哪些实数时,

$[1 + \cos(-x) - i \sin(-x)]^{1978}$ 是实数. [1974]

(三) 证 数

▲ 证明: 四个连续自然数的乘积加 1 后的算术平方根是一个自然数. ** [1011]

▲ 设 a, b, c, p, q, r 都是整数, 且 p, q, r 两两互质, 又 $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}$ 是一个整数,

求证: $\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \frac{c}{r}$ 都是整数. [1012]

▲ 给定方程组 $\begin{cases} y - 2x - a = 0, & \textcircled{1} \\ y^2 - xy + x^2 - b = 0. & \textcircled{2} \end{cases} a, b$

是整数, 证明: 如果存在一组有理数满足这个方程组, 那么它们应该是整数. [3737]

▲ 证明: 不存在这样两个分数: 它们的和及它们的积都是整数. ** [1013]

▲ 如果 a 和 b 都是任意整数, 证明方程

$$x^2 + 10ax + 5b + 3 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\text{和 } x^2 + 10ax + 5b - 3 = 0 \quad \textcircled{2}$$

的根都不是整数. ** [1014]

▲ 如果 p, q, r 都是有理数, 证明方程

$$(p+q+r)x^2 - 2(p+q)x + p+q-r = 0$$

的根也是有理数. [1015]

▲ 如果 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 是某等差数列中的两项, 证明此数列的任一项都不是有理数. [6041]

▲ 设 a_n 是 $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ 的个位数字, $n=1, 2, \dots$, 试证: $0.a_1a_2\dots a_n$ 是一个有理数. [6288]

▲ 证明: $\sqrt{2}$ 和 $\lg 2$ 都是无理数. [1016]

▲ 设在 $\frac{ax+b}{cx+d} = s$ 中, a, b, c, d 是互不相等的有理数, s 是无理数, 求证 (1) 当 $ad=bc$ 时 s 是有理数; (2) 当 $ad \neq bc$ 时 s 是无理数. ** [1017]

▲ 证明: 由正整数组成的等差数列的各项, 不可能都是质数. [6306]

▲ 证明: 形式为 $m^4 + 4$ 的数是一个合数. ($m \in N$) [1018]

▲ 证明: 若 n 是大于 1 的整数, 则

$$p = n + (n^2 - 1)^{\frac{1-(1/n)^n}{2}}$$

的值是奇数. [1019]

▲ 已知 x, y, z 是整数, x 和 $y+z$ 都是奇数, 且满足 $x = 2y + 3z$, 证明 z 必定是奇数. [1020]

▲ x, y, z 都是整数, 且满足 $x^2 + y^2 = z^2$, 试证 x, y, z 必为两奇一偶或三偶. [1021]

▲ 求证: 当 n 是自然数时 $(3 + \sqrt{7})^n$ 的整数部分是一个奇数. [1022]

▲ 求证在 $11, 111, 1111, \dots, \underbrace{11\dots 11}_{n+1}$ 中, 没有一个是完全平方数 ($n \geq 2$). [1023]

▲ 求证第一个数字与第三个数字相同, 第二个数字与第四个数字相同的四位数不可能是完全平方数. [1024]

▲ 若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, 证明 a, b, c 三数中必有两数互为相反数. [1025]

▲ 假设 d 是正整数 a 和 b 的最大公约数, d' 是正整数 a' 和 b' 的最大公约数, 证明正整数 aa', ab', ba', bb' 的最大公约数是 dd' . *** [1026]

▲ 证明: 当 n 和 k 都是给定的正整数, 且 $n > 1, k > 2$ 时, $n(n-1)^{k-1}$ 可以写成 n 个连续偶数的和. [6305]

▲ 设 n 是满足下列条件的最小整数: 大于 1, 没有小于 10 的质因子, 又不是质数, 则

(A) $100 < n \leq 110$; (B) $110 < n \leq 120$;

(C) $120 < n \leq 130$; (D) $130 < n \leq 140$;

(E) $140 < n \leq 150$. *** [1027]

(四) 倍 数

▲ n 是任意自然数, 求证 $n^3 + 5n$ 是 6 的倍数. [1031]

▲ n 是任意自然数, 求证 $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$

是 17 的倍数. [1032]

▲ 设 n 是正整数, 证明 $13^{2n} - 1$ 是 168 的倍数. ** [1033]

▲ 当 n 为怎样的数时 $7^n - 1$ 是 6 和 8 的倍数. [2421]

▲ 如果一个两位数的十位数字与个位数字之半的和是偶数, 那么这个两位数, 必定是 4 的倍数. [1034]

▲ 证明任意一个整数与它的数字和之差是 9 的倍数. ** [1035]

▲ 有一个 n 位数, 把这个 n 位数按逆序重新排列得一新数, 求证新数与原数之差是 9 的倍数. ** [1036]

▲ 有一个三位数, 在它的百位数字上减去十位数字, 再加上个位数字所得的数是 11 的倍数, 证明这个三位数, 也是 11 的倍数. [1037]

▲ 已知一个四位数 N , 开头两个数字相同, 后面两个数字也相同, (1) 求证 N 是 11 的倍数, (2) 如果 N 是一个完全平方数, 求 $\sqrt{N}$. [1038]

▲ 设整数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 证明 a, b 中至少有一个是 3 的倍数. [1039]

▲ 已知 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$,
 $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$,
 求证 $3(\alpha - \beta), 3(\beta - \gamma), 3(\gamma - \alpha)$ 各为 2π 之整数倍. [0194]

(五) 整 除

▲ 证明下列各题.

(1) $99^n - 1$ 能被 1000 整除. [2422]

(2) $55^n + 9$ 能被 8 整除. [2423]

(3) $53^n - 33^n$ 能被 10 整除. [2424]

▲ n 为自然数, 证明:

(1) $(n+1)^n - 1$ 能被 n^2 整除. [2425]

(2) $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ 能被 13 整除. [1040]

(3) $5^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$ 能被 8 整除. *** [1041]

(4) $3^{2n} - 26n - 1$ 能被 676 整除. [1042, 2426]

(5) $n(n+1)(2n+1)$ 能被 6 整除. [1043]

(6) $n(n+1)(5n+4)$ 能被 6 整除. [1044]

(7) $n(n^2-1)(n^2-5n+26)$ 能被 120 整除. [1046]

(8) $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ 能被 1897 整除. *** [1047]

▲ 求证 $(x+y)(y+z)(z+x) + xyz$ 能被 $x+y+z$ 整除. [5191]

▲ 求证 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 能被 $x+y+z$ 整除. [5192]

▲ 求证多项式 $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$, 当 n 是奇数时能被 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 整除. [5193]

▲ 求证 $x^{444} + x^{333} + x^{222} + x^{111}$ 能被 $x^4 + x^3 + x^2 + x$ 整除. [5194]

▲ 求证: 当 n 是一切奇数时, $2^n + 1$ 能被 3 整除. *** [1048]

▲ 求证: 如果 n 是奇数, 那么 $46^n + 296 \times 13^n$ 能被 1947 整除. *** [1049]

▲ 证明 $2n+1$ 个连续整数的和能被 $2n+1$ 整除. [6304]

▲ 证明 n 个连续整数的积能被 $n!$ 整除. [1250]

▲ 证明 3 个连续自然数的立方和能被 9 整除. [1050]

▲ 如果一个自然数的各位数字和能被 9 整除, 那么这个自然数也能被 9 整除. [1051]

▲ 证明: 一个自然数能被 11 整除的充要条件, 是它的奇位上数字和与偶位上数字和之差能被 11 整除. [1052]

▲ 证明任何一个奇数的平方减 1 能被 8 整除. *** [1053]

▲ 证明任意两个奇数的平方的差能被 8 整除. [1054]

▲ 任给五个整数, 证明必能从其中选取三个数: 使得它们的和能被 3 整除. ** [1055]

▲ 设 p 和 q 都是自然数, 且

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319},$$

求证 p 能被 1979 整除. * [1056]

▲ 证明: 如果 $u^2 + uv + v^2$ 能被 9 整除, 且 u 和 v 都是整数, 那么 u 和 v 都能被 3 整除. ***

[1057]

▲ 对于同样的整数 x 和 y , 表达式 $2x + 3y$ 和 $9x + 5y$ 能同时被 17 整除. *** [1058]

▲ 设 S 是命题“如果整数 n 的各位数字之和能被 6 整除, 则 n 也能被 6 整除.”表明命题 S 错误的 n 的一个值是 (A)30; (B)33; (C)40; (D)42; (E) 不是以上各数. *** [1059]

▲ 如果 $x^3 - 6x^2 - ax + b$ 能被 $x^2 - 4x + 3$ 整除, 求 a, b . [1061]

▲ 若 $ax^3 - 9x^2 + bx + 2$ 能被 $2x^2 - x - 1$ 整除, 求 a, b . [1062]

▲ 若 $ax^3 + bx^2 - 47x - 15$ 能被 $3x + 1$ 和 $2x - 3$ 整除, 求 a, b . [1063]

▲ 若 $x^4 - 5x^3 + 11x^2 + mx + n$ 能被 $x^2 - 2x + 1$ 整除, 求 m, n . [1064]

▲ 已知七位数 $62a\bar{b}427$ 能被 99 整除, 求 a, b . ** [1065]

(六) 余 数

▲ 求 101^{10} 除以 11 后所得余数. [2427]

▲ 求用 7 去除 48^{13} 后所得余数. [2428]

▲ 求 $a^{1983} + 1$ 除以 $a - 1$ 后所得余数. [1124]

▲ 证明: $4 \cdot 6^n + 5^{n+1}$ 被 20 除后余数为 9. [1045]

▲ 证明: 任何奇数的平方除以 4, 余数是 1. [1125]

▲ 已知 $x^3 + bx^2 + cx + d$ 被 $x - 1$ 除时余 0, 被 $x - 3$ 除时余 2, 被 $x + 2$ 除时和被 $x - 2$ 除时所得余数相等. 求 b, c, d . [5195]

(七) 比 大 小

▲ 比较下列各组数的大小:

(1) π 和 $\frac{22}{7}$; (2) -0.6 和 $-\frac{2}{3}$;

(3) $\sqrt{0.5}$ 和 0.5 ; (4) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ 和 4 ;

(5) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ 和 $1 + \sqrt{15}$;

(6) $\sqrt{29}$ 和 $5\frac{4}{13}$; (7) $-3\sqrt{2}$ 和 $2\sqrt{-4}$;

(8) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ 和 $\sqrt{5} - 2$. [1071]

▲ 比较下列诸数, 找出最小的正数:

(A) $10 - 3\sqrt{11}$, (B) $3\sqrt{11} - 10$,

(C) $18 - 5\sqrt{13}$, (D) $51 - 10\sqrt{26}$,

(E) $10\sqrt{26} - 51$. *** [1072]

▲ 3 和 $3 + i$ 哪一个大? [1963]

▲ 比较下列各组式的大小:

(1) a 和 $2a$; (2) a 和 $a + b$; (3) a 和 $|a|$; (4) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ 和 $(ac + bd)^2$, $(ad - bc)^2$; (5) $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$ 和 $(a^2 + \sqrt{2}a + 1)(a^2 - \sqrt{2}a + 1)$;

(6) $\left(\frac{n}{\sqrt{6}} + 1\right)^3 - \left(\frac{n}{\sqrt{6}} - 1\right)^3$ 和 2. [2002]

▲ 若 $a > 0, a^2 - 2ab + c^2 = 0, bc > a^2$, 比较 a, b, c 三数的大小. [2003]

▲ a, b, c 三数的算术平均数的平方, 与这三数的平方的算术平均数孰大? [2004]

▲ 比较 $1 + \frac{1}{x^2}$ 与 $\frac{2}{x}$ 的大小 ($x \neq 0$).

[2206]

▲ 比较下列各组式的大小:

(1) a 和 $\sqrt{a}$; (2) a 和 $\sqrt{a^2}$;

(3) $\sqrt{a} - \sqrt{a-1}$ 和 $\sqrt{a-2} - \sqrt{a-3}$ ($a \geq 3$) [2301]

▲ 设 a, b, c, d, m, n 都是正实数,

$$p = \sqrt{ab} + \sqrt{cd}, q = \sqrt{ma + nc} \sqrt{\frac{b}{m} + \frac{d}{n}},$$

那么 (A) $p \geq q$, (B) $p \leq q$, (C) $p < q$,

(D) p, q 间的大小关系不确定而与 m, n 的大小有关. ** [2302]

▲ 下列各数哪些大于 1? 哪些小于 1 而大于 0?

(1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-0.7}$; (2) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-0.73}$; (3) $(1.001)^{0.01}$;

(4) $(0.001)^{0.1}$. [5233]

▲ 比较下列各组数的大小:

(1) $3^{0.8}$ 和 $3^{0.7}$; (2) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-0.11}$ 和 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-0.12}$;

(3) $0.75^{1.4}$ 和 $0.75^{1.3}$;

(4) $e^{\frac{1}{2}}$ 和 $e^{\sqrt{2}}$. [5234]

▲ 比较下列各组数的大小:

(1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ 与 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;

(2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$ 与 $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$; (3) $2^{\sqrt{2}}$ 与 $3^{\sqrt{2}}$;

(4) $3^{\frac{1}{3}}$ 与 $5^{\frac{1}{3}}$; (5) $\sqrt[3]{5^m}$ 与 $\sqrt[3]{9^{10}}$;

(6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ 与 0.001. [5235]

▲ 在下列各式里, 比较 m 与 n 的大小:

(1) $1.5^m > 1.5^n$; (2) $\left(\frac{4}{5}\right)^m < \left(\frac{4}{5}\right)^n$;

(3) $\left(\frac{8}{3}\right)^m > \left(\frac{8}{3}\right)^n$; (4) $0.3^m > 0.3^n$;

(5) $(\sqrt{7})^m < (\sqrt{7})^n$. [5236]

▲ 决定下列各式里的 x 是大于 0 还是小于 0?

(1) $10^x = 7$; (2) $\left(\frac{5}{6}\right)^x = \frac{3}{4}$;

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{5}{2}$; (4) $\left(\frac{7}{4}\right)^x = 0.6$. [5238]

▲ 比较下列各组数的大小:

(1) $\log_2 0.63$ 与 $\log_2 \frac{1}{16}$; (2) $\log_2 3$ 与 $\log_2 2$;

(3) $\log_2 \frac{3.14}{\pi}$ 与 $\log_2 1$; (4) $\log_2 3$ 与 $\log_2 8$;

(5) 2 与 $\log_2 10$; (6) $\log_2 1$ 与 $\log_2 1$;

(7) $\log_2 5$ 与 $\log_2 6$; (8) $\log_2 9$ 与 $\log_2 8$;

(9) $\log_2 12$ 与 $\lg 21$; (10) $\log_2 4$ 与 $\log_2 4$;

(11) $\log_2 0.98$ 与 $0.98^{0.9}$; (12) $\log_2 \frac{2}{3}$ 与 $\log_2 \frac{4}{3}$;

(13) $a \lg \frac{1}{3}$ 与 $b \lg \frac{1}{3}$; (14) $\log_2 3$ 与 $\log_2 2$;

(15) $\log_{0.1} 7$ 与 $\log_{0.1} 8$. [5244]

▲ 比较下列两式中 a 与 b 的大小:

(1) $\log_{\sqrt{2}} a > \log_{\sqrt{2}} b$; (2) $\log_{0.1} a > \log_{0.1} b$ [5245]

▲ 指出下列各数在哪个两个连续整数之间:

(1) $\log_2 7$; (2) $\log_2 \frac{1}{5}$;

(3) $\lg 27$; (4) $\lg 0.46$ [1502]

▲ 若 $x = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}}$ 则 x 的值是属于开区间

(A) $(-3, -2)$; (B) $(-2, -1)$;

(C) $(1, 2)$; (D) $(2, 3)$. ** [1503]

▲ 确定 0.3^2 , $\log_2 0.3$, $2^{0.3}$ 三数之间的顺序.

[1504, 5246]

▲ 已知 $f(x) = 1 + \log_x 5$, $g(x) = \log_x 9 + \log_x 8$, 比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小. ** [5247]

▲ 设 $0 < x < 1$, 比较 $|\log_x (1-x)|$ 与 $|\log_x (1+x)|$ 的大小. * [5248]

▲ 不进行求值, 用比较大小的方法, 确定下列各式的正负:

(1) $\log_{\frac{4}{3}} \frac{1}{3} - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$

(2) $\frac{\log_2 11 - \log_2 25}{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{30} - \log_{\frac{1}{3}} 30} (1 - \log_2 5)$ [5249]

(3) $\sin 20^\circ - \sin 21^\circ$ [0611]

(4) $\sin 120^\circ - \sin 240^\circ$ [0612]

(5) $\sin 260^\circ - \sin 250^\circ$ [0613]

(6) $\cos 20^\circ - \cos 21^\circ$ [0614]

(7) $\cos 20^\circ - \cos 120^\circ$ [0615]

(8) $\cos 320^\circ - \cos 310^\circ$ [0616]

(9) $\lg 120^\circ - \lg 121^\circ$ [0617]

(10) $\operatorname{ctg} 200^\circ - \operatorname{ctg} 210^\circ$ [0618]

▲ 若 $\log_2[\log_2(\log_2 x)] = \log_2[\log_2(\log_2 y)]$
 $= \log_2[\log_2(\log_2 z)] = 0$, 比较 x, y, z 三数
 的大小. [1505]

▲ 比较下列各组数的大小:

(1) $\sin 307^\circ$ 与 $\lg 310^\circ$; (2) $\sin 235^\circ$ 与
 $\operatorname{ctg} 155^\circ$; (3) $\lg \frac{5\pi}{9}$ 与 $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{9}$ [0003]

▲ 比较下列两组数的大小:

(1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ 和 $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$;

(2) $\operatorname{arctg}(-1.5)$ 和 $\operatorname{arctg}(-2)$ [0702]

▲ a 是什么值时, $\arccos a - \arccos(-a)$ 的
 值(1) 大于 0; (2) 小于 0; (3) 等于 0? [0703]

▲ $\arccos(-x)$ 大于 $\arccos x$ 的充要条件, 是
 (A) $x \in (0, 1]$; (B) $x \in (-1, 0)$;

(C) $x \in [0, 1]$; (D) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]^*$ [0704]

(八) 数的最大整数

▲ 满足 $n^{200} < 5^{300}$ 的最大整数 n 是 (A) 8;
 (B) 9; (C) 10; (D) 11; (E) 12. *** [1076]

▲ $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 若
 $M = \sqrt{[\sqrt{x}]}$, $N = [\sqrt{\sqrt{x}}]$ (其中 $x \geq 1$),
 则一定有 (A) $M > N$; (B) $M = N$;
 (C) $M < N$; (D) 以上答案都不对. ** [1077]

▲ $[x]$ 表示取 x 的最大整数部分.

若 $y = 4 \left(\frac{x + [u]}{4} - \left[\frac{x + [u]}{4} \right] \right)$,

且当 $\begin{cases} x = 1, 8, 11, 14 \text{ 时 } y = 1, \\ x = 2, 5, 12, 15 \text{ 时 } y = 2, \\ x = 3, 6, 9, 16 \text{ 时 } y = 3, \\ x = 4, 7, 10, 13 \text{ 时 } y = 0. \end{cases}$

已知表达式: (A) $u = \frac{x+2}{4}$; (B) $u = \frac{x+1}{4}$;

(C) $u = \frac{x}{4}$; (D) $u = \frac{x-1}{4}$ 中只有一个是

正确的, 问是哪一个? ** [1078]

▲ 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则

$\sum_{n=1}^{100} [\log_2 n] = (A) 8192; (B) 8204; (C) 9218;$
 (D) $\log_2 1024$; (E) 不在以上各数之中. ***

[1079]

▲ 设 $[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数, 则
 方程 $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$ 的实数解的个数是
 (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4. ***

[1080]

(九) 实数的绝对值

▲ 脱去下列各式里的绝对号:

(1) $|x + |x||$; (2) $|x + 5| - |3 - 2x|$;
 (3) $|x - 2| - |2x - 1| - |x - 4|$. [1081]

(十) 数的进位制

▲ 把八进位数 543 转换成二进位数. [1091]

▲ 以三进位制表示的数 M 是
 12 112 211 122 211 112 222, 则以九进位制表
 示时这个数 M 的第一位是什么数? *** [1092]

(十一) 数学归纳法

▲ 当 n 是任意自然数时, 试用数学归纳法求
 证下列各题:

证明: $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ 能被 13 整除. [1040]

证明: $5^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$ 能被 8 整除.

[1041]

证明: $3^{2n} - 26n - 1$ 能被 676 整除.

[1042]

证明: $n(n+1)(5n+4)$ 能被 6 整除.

[1044]

证明: $4 \cdot 6^n + 5^{n+1}$ 被 20 除后余数为 9.

[1045]

▲ 求证: 当 n 是一切奇数时 $2^n + 1$ 能被 3
 整除. [1048]

▲ 证明: 三个连续自然数的立方和能被 9
 整除. [1050]

▲ 证明: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$
 $= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. [2171]

▲ 证明 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ [4602]

▲ 证明: 当 $n \geq 5$ 自然数时, $2^n > n^2$ [4763]

▲ 证明: 当 $\alpha > -1, n \geq 1$ 时,
 $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$ [4764]

▲ 求证: 当 n 是扩大自然数时,
 $\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdots \cos 2^n \alpha$
 $= \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}$ [0272]

▲ 求证: $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \cdots$
 $\cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$ [0273]

▲ 求证: $\cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cdots$
 $+ \cos (2n-1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta}$ [0277]

二、排列组合

(一) 阶乘

▲ 求证: $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ [1201]

▲ 求证: $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots n!$
 $= \frac{(n!)^{n+1}}{3! \cdot 4! \cdot 5! \cdots n^{n-2}}$ [1202]

▲ 数 100! 的末尾有多少个 0? [1203]

▲ 数 1000! 的末尾有多少个 0? *** [1204]

(二) 排列组合数

▲ 证明: $A_n^k = 2A_n^k$ [1206]

$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ [1207]

$A_m^n + nA_m^{n-1} = A_{m+1}^n$ [1208]

▲ 证明: $P_n = P_{n+1} - nP_n$ [1209]

$P_{n+1} - P_n = n^2 P_{n-1}$ [1210]

$1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \cdots + nP_n$
 $= (n+1)! - 1$ [1211]

$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ 接尾公式 [1212]

$C_m^n = C_m^{m-n}$ 化简公式 [1213]

$C_m^n = \frac{m}{n} C_{m-1}^{n-1}$, 或 $nC_m^n = mC_{m-1}^{n-1}$

留头公式 [1214]

$C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n$ 舍不舍公式 [1215]

$A_m^n = n! C_m^n$ 排组公式 [1216]

▲ 求证: $C_{m+1}^n = C_m^{n-1} + C_m^n + C_{m-1}^n$ [1217]

$C_{m+1}^n = C_m^{n-2} + 2C_m^{n-1} + C_m^n$ [1218]

$C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^{n-2} + \cdots$
 $+ C_{m-1}^1 + C_{m-1}^0 = C_m^{n+1}$ [1219]

▲ 已知 $C_m^{n-1} = C_{m+1}^n$, 求证
 $m = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ [1220]

(三) 组合式系数之和

▲ 求证: $C_1^1 2^n - C_2^2 2^{n-1} + C_3^3 2^{n-2} - \cdots$
 $+ (-1)^n C_n^n 2^0 = 1^n$ [2411]

▲ 求证: (1) $C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + \cdots$
 $+ C_n^1 = 2^n$
 (2) $C_1^2 - C_2^2 + C_3^2 - \cdots$
 $+ (-1)^n C_n^2 = 0$ [2412]

▲ 求证: $C_1^1 + C_2^2 + C_3^3 + \cdots + C_n^n$
 $= 2^{n-1}$ (n 是偶数) [2413]

▲ 求证: $1C_1^1 + 2C_2^1 + 4C_3^1 + \cdots + 2^n C_n^1$
 $= 3^n$ [2414]

▲ 求证: $1C_1^2 + 2C_2^2 + 3C_3^2 + \cdots + nC_n^2$
 $= n \cdot 2^{n-1}$ [2415]

▲ 求证: $1C_1^3 - 2C_2^3 + 3C_3^3 - \cdots$
 $+ (-1)^n (n+1)C_n^3 = 0$ [2416]

▲ 求证: $C_1^1 + \frac{C_1^1}{2} + \frac{C_2^2}{3} + \cdots$
 $+ \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ [2417]

▲ 求证: $(C_1^1)^2 + (C_2^2)^2 + (C_3^3)^2 + \cdots$
 $+ (C_n^n)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ [2418]