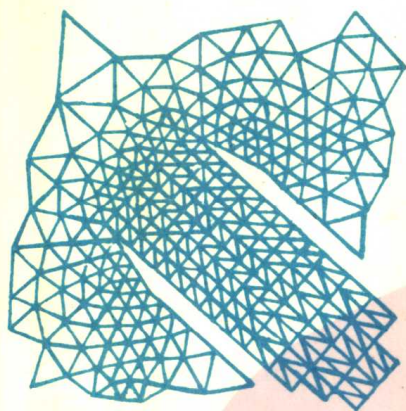


计算流体力学



明喜本民海
张涤崇克杰
蔡章詹黄
编著

中山大学出版社

JISUAN LIUTI LIXUE

计算流体力学

张涤明 蔡崇喜 章克本 编著
詹杰民 黄 海

中山大学出版社

内 容 提 要

本书是一本内容全面的计算流体教材，共三篇十六章，包括流体力学有限差分法、流体力学有限元法、流体力学边界元方法和流体力学有限分析法等。每种方法既有系统介绍，又有应用举例，还尽可能介绍新的发展动态，并附有代表性的计算机程序。为便于教学，每章附有习题和上机计算实习题。

本书可作为应用力学、工程力学、计算数学以及航空、气象、造船、海洋工程、水利水电工程等有关专业的教学用书或参考书，也可供有关专业的工程技术人员学习和参考。

计 算 流 体 力 学

张涤明 蔡崇喜 章克本 编著
詹杰民 黄 海

中山大学出版社出版发行
广东省新华书店经销
广州红旗印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 22.5印张
1991年5月第1版 1991年5月第1次印刷
印数：1—1000册

登记证号(粤)第11号

ISBN7—306—00382—8/O·29

定价：7.10元



前 言

计算流体力学是当代流体力学领域中的一门重要课程，特别是对于将来准备从事流体力学应用与研究的学生来说，这门课程更是不可缺少的。在我国，计算流体力学作为一门系统的课程，是1980年前后相继在一些学校开设的。我们是1980年开始先在大学本科开设了这门课程。最初，由于国内没有合适的教材可采用，我们自编了一本讲义。在近10年的时间里，根据教学的需要和教学实践的经验，我们对这本讲义进行了三次大的修改，在形成这本书之前，我们又进行了重写和补充。因此，本书的出版虽然只以作者署名，但却是包含了其他同志的工作的，其中有陈建基副教授、朱蔚文副教授以及陈楚平、黄沐辉老师，他们中有的参加过讲义的编写或修改，有的从事过讲义的教学实践，提出过宝贵的意见。总之，本书的形成是和其他同志的劳动分不开的，在此一并表示感谢。

计算流体力学的内容包括三大方面：一是流体力学数值方法，二是数值理论，三是流体力学数值方法的广泛应用，即所谓方法、理论和应用。我们的出发点是想写成一本比较基础的、可以用作有关专业的本科生教材和旁近专业的研究生教材。其次还顾及到其它方面用途，例如有关工程技术人员作参考之用。作为教材，除了基础性之外，取材的先进性当然应有保证。从这一目标出发，我们这本书以讲述和介绍基本方法为主。考虑到如果对数值理论涉及太多，必然要牵涉到一些较深的数学概念，这对于

非数学专业或非计算数学专业的本科学生和工程技术人员来说，多数人一时未必有这个基础。所以除了十分必要的一些数值理论概念和知识外，属于数值理论方面的内容我们没有过多涉及。至于应用，这已是一个广阔的海洋，内容多，范围广，若要写，真不知要照顾到哪些领域；并且各领域的应用，不断地有专门的书籍出版。所以除了结合方法的介绍，列举一些必要算例之外，没有花过多的篇幅于应用的介绍。我们深信，一旦读者掌握了基本的方法，是会开放出更多更美的应用之花的。

本书分三篇共十六章。首篇讲述流体力学有限差分法。这是计算流体力学中最基本的方法，也是发展得最早的方法。在这一篇里，仅讲述流体力学有限差分法最基本的内容及若干常规通用的差分格式。在流体力学若干分支中一些特种差分方法，我们涉及不多。这一篇中第四章是关于气体流动问题的计算，第五章是势流计算，第六章是不可压粘性流计算，这三章是各自独立的，如果课时较紧，可以不必依次每章都讲，而按照学习者的专业要求有所选择。第二篇讲述流体力学有限单元法。这是从60年代后期开始大量地从固体力学领域传入到流体力学领域并迅速得到发展的流体力学数值方法，现已成为计算流体力学的一种主要基本方法。这一篇对流体力学有限单元法的基本方法讲述得比较详细。此外在第十三章，我们还用了整整一章的篇幅介绍有限单元法在流体力学中的若干新发展，以展示其发展趋势。如果初学不便，或课时紧张，这一章也可以先不学。第三篇介绍除有限差分法和有限单元法之外的流体力学其他的数值方法。但限于篇幅，我们只介绍了较多遇到的边界拟合坐标差分法，边界元法和有限分析法。这一篇作为基础课教学或初学者都可以暂时先不学。我们在专业本科生的教学实践中，不包括计算实习时间，约80个学时可以讲授完第一和第二篇的基本内容。为了方便教学，本书还于每章后附有习题。这些习题有些是属于计算实习的。我们认为

抓好习题演习，特别是计算实习，对于搞好本课程的教学是至关重要的。书后附有几个附录，是一些有关的知识，方便读者备查的。附录中给出了一些典型的计算机语言程序，给初学的读者计算实习时编写程序参考之用。

总的来说，我们水平有限，经验也不够，本书难免有不少缺点甚至错误，恳请批评指正，不胜感谢。

作 者

1991年12月

目 录

前 言

第一篇 流体力学有限差分法

第一章 流体力学基本方程及模型方程.....	(1)
第一节 流体力学基本方程	(1)
一、可压缩粘性流体流动的纳维-斯托克斯方程组	(1)
二、可压缩无粘流体流动的欧拉方程组	(3)
三、不可压缩粘性流体流动的纳维-斯托克斯方程组	(4)
四、不可压缩无粘流体流动基本方程组	(7)
第二节 模型方程	(10)
第三节 模型方程初边值条件的适定提法	(16)
习题	(20)
第二章 有限差分法引论	(22)
第一节 有限差分逼近	(22)
一、差商、逼近误差	(22)
二、差分网格	(26)
三、差分格式	(30)
第二节 截断误差与相容性	(39)
第三节 离散化误差与收敛性	(41)
第四节 差分格式的稳定性	(52)
一、差分格式稳定性的概念	(52)
二、最大模方法	(56)

三、傅里叶分析方法	(60)
四、矩阵方法	(64)
第五节 腊克斯等价定理	(69)
第六节 差分格式的数值效应, 黑特稳定性分析	(70)
一、差分格式的数值损耗与弥散	(70)
二、黑特稳定性分析	(76)
习题	(79)
第三章 若干差分格式	(82)
第一节 差分格式的构造方法	(82)
一、泰勒级数展开方法	(82)
二、多项式拟合方法	(87)
三、积分方法	(90)
四、控制体积方法	(93)
第二节 对流方程的迎风格式和正型格式	(96)
一、迎风格式	(96)
二、腊克斯格式	(97)
三、利用特征线构造格式的方法	(100)
四、正型格式	(104)
第三节 对流-扩散方程的 FTCS 格式	(107)
第四节 二阶精度格式	(111)
一、蛙跳法和蛙跳格式	(111)
二、腊克斯-温德洛夫格式	(116)
第五节 隐格式	(118)
一、隐格式构成方法及稳定性分析	(119)
二、隐格式方程的解法	(127)
第六节 守恒型差分格式	(131)
第七节 多步显式格式	(134)
一、一维对流方程二步格式	(135)
二、一维对流-扩散方程的二步格式	(137)

第八节 多维空间的差分格式	(138)
一、时间分裂法	(141)
二、交错方向法 (ADI 方法)	(144)
习题	(148)
第四章 气体力学问题的计算方法	(149)
第一节 基本方程	(149)
第二节 一维不定常流动的特征线与激波关系式	(152)
第三节 激波捕获法	(161)
第四节 Godunov 格式	(163)
习题	(178)
第五章 不可压缩无粘流体定常势流的差分法计算	(180)
第一节 差分格式	(181)
一、网格及边界处理	(181)
二、内点差分格式	(183)
三、边界点差分格式	(187)
第二节 差分边值问题的求解	(191)
一、迭代法	(192)
二、时间相关法	(197)
三、ADI 方法	(200)
第三节 计算实例	(202)
习题	(205)
第六章 不可压缩粘性流体流动的差分法计算	(207)
第一节 基本方程的表示形式	(207)
第二节 流函数涡量法	(212)
一、求解运动学量	(212)
二、求解压力	(231)
三、计算实例	(236)
第三节 速度压力法	(240)
一、差分网格系统	(241)

二、差分格式	(242)
三、计算流程	(253)
四、速度压力法与流函数涡量法比较	(255)
第四节 粘性流体流动计算的雷诺数限制	(253)
习题	(261)

第二篇 流体力学有限单元法

第七章 若干数学概念	(263)
第一节 空间概念	(263)
第二节 算子概念	(271)
习题	(273)
第八章 有限单元法基本方法	(275)
第一节 概述	(275)
第二节 李兹法	(277)
一、米赫林 (Mikhlin) 定理	(277)
二、求解变分问题的李兹法	(289)
第三节 伽辽金法	(295)
一、变分方程 (或称“虚功方程”)	(295)
二、变分方程的近似求解	(297)
第四节 有限单元法	(298)
一、李兹意义的有限单元法	(299)
二、单元分析与总体合成	(306)
三、有限单元法的解题步骤	(314)
四、伽辽金意义的有限单元法	(315)
习题	(320)
第九章 变分原理及加权余量法	(324)
第一节 概述	(324)
第二节 变分法	(325)
一、变分	(325)

二、欧拉 (Euler) 方程	(328)
三、自然边条件与本质边条件	(331)
第三节 物理原理的数学表述	(332)
一、两点间最短连线问题	(333)
二、最速降线问题	(334)
三、哈密顿 (Hamilton) 原理	(335)
四、最小势能原理	(337)
第四节 变分约束的解除, 拉氏乘子法	(339)
一、端点约束的解除	(339)
二、积分域内函数形式变分约束的解除	(341)
第五节 加权余量法	(346)
一、配置法	(348)
二、最小二乘法	(350)
三、矩量法	(353)
四、伽辽金法	(354)
第六节 伽辽金加权余量法	(356)
一、强表示形式	(356)
二、弱表示形式	(358)
三、含自然边条件的强表示形式	(359)
四、伽辽金加权余量法与经典变分原理的关系	(360)
习题	(364)
第十章 单元插值函数	(368)
第一节 单元剖分	(368)
一、剖分规则	(368)
二、结点选取与编号	(371)
三、单元剖分的几个特征量	(374)
四、网格的加密原则	(375)
第二节 单元函数逼近总论	(376)
一、单元函数逼近的基本要求	(376)
二、多项式插值	(379)

三、完全多项式与对称多项式.....	(383)
第三节 一维线元的拉格朗日插值	(387)
一、局部笛卡尔坐标系.....	(388)
二、长度坐标.....	(392)
第四节 二维三角形单元的拉格朗日插值	(395)
一、线性插值.....	(395)
二、面积坐标.....	(399)
三、二次插值.....	(401)
四、三次插值.....	(405)
第五节 二维矩形单元的拉格朗日插值.....	(410)
一、双线性插值.....	(410)
二、双二次插值.....	(415)
三、八点插值.....	(418)
第六节 二维等参单元	(420)
一、曲边三角形等参单元.....	(422)
二、任意四边形等参单元.....	(423)
三、曲边四边形等参单元.....	(425)
第七节 三维四面体单元的拉格朗日插值.....	(426)
一、线性插值.....	(427)
二、无量纲体积坐标.....	(429)
三、二次插值.....	(431)
第八节 三维正六面体单元的拉格朗日插值	(433)
第九节 一维线元的埃尔米特插值	(436)
第十节 二维三角形单元的埃尔米特插值.....	(441)
第十一节 二维矩形单元的埃尔米特插值.....	(445)
习题	(453)
第十一章 平面势流问题的有限单元法计算.....	(460)
第一节 有限元方程的建立	(461)
第二节 三角形单元求解	(464)

第三节 等参单元求解	(475)
第四节 机翼绕流计算	(483)
第五节 具有自由水面的势流	(487)
一、已知流量的迭代法	(491)
二、未知流量问题的双点迭代法	(494)
习题	(498)
参考文献	(500)
第十二章 不可压缩粘性流问题的有限单元法计算	(501)
第一节 流函数涡量法	(501)
一、有限元方程	(502)
二、有限元方程的解法	(507)
三、涡量的边界条件	(507)
四、数值实例	(511)
第二节 流函数法	(514)
一、有限元方程	(518)
二、数值实例	(520)
第三节 速度压力法	(526)
一、有限元方程	(530)
二、数值实例	(533)
习题	(536)
参考文献	(538)
第十三章 有限单元法的若干新发展	(539)
第一节 迎风有限元	(540)
第二节 集中质量有限元法	(550)
第三节 罚函数有限元方法	(558)
第四节 相似单元法	(561)
习题	(571)
参考文献	(572)

第三篇 流体力学其它数值方法

第十四章	边界拟合坐标差分法	(573)
第一节	边界拟合坐标系	(574)
第二节	边界拟合坐标变换的几个例子	(582)
第三节	一些数学式在边界拟合坐标系下的形式	(588)
第四节	边界拟合坐标差分法	(591)
习题		(600)
参考文献		(601)
第十五章	边界元方法	(602)
第一节	位势问题中的边界元法	(602)
第二节	边界元离散方法	(612)
第三节	数值算例	(623)
习题		(631)
第十六章	流体力学有限分析法	(633)
第一节	有限分析法基本方法	(634)
第二节	势流的有限分析解	(639)
第三节	不可压粘性流体流函数方程的有限分析离散格式	(649)
第四节	涡量扩散方程的有限分析离散格式	(660)
第五节	有限分析法算例	(667)

附 录

I	代数方程组的解法	(673)
II	非线性常微分方程的几种迭代方法	(681)
III	数值积分公式	(684)
IV	势流和不可压粘性流的差分法程序	(687)
V	势流的有限元法程序	(696)

第一篇 流体力学有限差分法

第一章 流体力学基本方程及模型方程

计算流体力学研究的是用数值方法求解流体力学问题，至今主要地还是从描述流体力学各类问题的基本方程出发。描述各类流体力学问题的基本方程，一般流体力学的书籍都有详细的介绍和推导。这里为应用方便起见，概括性地予以叙述。在讨论流体力学数值方法时，是以经过提炼的在流体力学中具有广泛代表性和一定典型性的模型方程为具体对象的。因此，在这一章里我们还要简要地介绍这些模型方程及它们的定解问题的适定性和一些解的性质。

第一节 流体力学基本方程

一、可压缩粘性流体流动的纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程组

流体力学基本方程是由流体运动的质量守恒、动量守恒和能量守恒三个守恒定律推导得出的，是这三个守恒定律的数学描述。

实际流体具有压缩性和粘性。基本方程如果考虑流体压缩性和粘性的影响，则为如下可压缩流体的纳维-斯托克斯方程组（常简称为N-S方程）：

连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.1.1a)$$

动量方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ &+ \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.1.1b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ &+ \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.1.1c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ &+ \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.1.1d)$$

能量方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho T} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \\ &+ \frac{\nu}{T} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (1.1.1e)$$

式中 s 为熵, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 为流体剪切运动粘性系数, 这里设为常数,

K 为流体热传导系数, x, y, z 为笛卡尔坐标。并注意到这里所考虑的是满足广义牛顿假设的牛顿流体, 而且假设流体的体膨胀系

$$\text{数 } \lambda = -\frac{2}{3}\mu。$$

可以看出, 可压缩粘性流体的上述基本方程组, 未知量的个数大于方程的个数, 并不封闭。对于它的求解, 还必须辅以联系流体压力 p 、温度 T 和流体密度 ρ 的状态方程

$$p = p(\rho, T) \quad (1.1.2)$$

二、可压缩无粘流体流动的欧拉(Euler)方程组

一般气体力学问题, 除边界层问题外, 都视气体为无粘流体, 或称之为理想流体。如果可压缩流体的流动是无粘性和无热传导的, 那么在纳维-斯托克斯方程组(1.1.1)中, 动量方程右端的粘性项和能量方程右端的热传导项都为零。于是流动基本方程就是如下可压缩流体流动的欧拉方程组:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.1.3a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.1.3b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.1.3c)$$