SPT 21世纪高等院校教材 理工类

高等数学

——及其教学软件

下 册

上海交通大学
集 美 大 学 编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材(工科类)

高等数学

——及其教学软件

下册

上海交通大学
集 美 大 学　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本教材根据国家教委1995年颁布的“高等数学课程教学基本要求”而编写．本书分上、下两册，上册内容是一元函数微积分和微分方程（共七章），下册内容是多元函数微积分和级数（共五章）．书末还附有微积分应用课题、常用积分表和习题参考答案．

本书尽力把教学改革精神体现在教材中，注重课程对学生的素质与能力的培养．书中加强对数学概念与理论从实际问题的引入和从几何与数值方面的分析，并增加了应用实例和习题；加强计算机对教学辅助作用，结合教学内容充分运用了数学软件，每章后均有“演示与实验”，并配有光盘；注意“简易性”，尽量做到通俗易懂，由浅入深，富于启发和便于学生自学．

本书可以作为高等工科院校工学、经济学等各专业“高等数学”教材，也可作为教师及工程技术人员用书或参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学——及其教学软件，下册/上海交通大学、集美大学编．—北京：科学出版社，2003.2

（21世纪高等院校教材）

ISBN 7-03-011001-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.①上…②集…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 ②高等数学-计算机辅助教学-应用软件-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第096644号

责任编辑：吕　虹／责任校对：柏连海

责任印制：安春生／封面设计：槐寿明

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2003年2月第一版　开本：720×1000 1/16

2003年2月第一次印刷　印张：21

印数：1-5 000　字数：388 000

定价：35.00元（含光盘）

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

《高等数学》编写组

组　　长　杨敏之　林　熙

成　　员　（按姓氏笔画为序）

王　铭　王承国　王昌金　付永钢

何　铭　陈贤峰　林婉霞　张　宪

咸进国　翁苏骏　曾羽群　储理才

主　　审　孙薇荣

序

微积分是人类智慧最伟大的成就之一，它蕴藏着丰富的理性思维和处理连续量的方法. 以微积分为主体内容的"高等数学"是大学中最重要的课程之一，它不仅为后继课程和科技工作提供了必备的数学工具，而且对学生科学素质的形成和分析解决问题能力的成长产生着重要而深远的影响. 如何精选教学内容，通过知识点的传授揭示其概念和理论的本质、突出数学思维方法的培养、加强数学应用能力的训练，是近年来本门课程教学改革的核心内容，一批具有不同风格的革新教材业已面世. 然而，不少普通高等院校仍感可供选择的适用教材品种不足，面对这种需要，在上海交通大学国家工科数学基地的倡导和支持下，由上海交通大学和集美大学一批有丰富教学经验的数学教师联合编写了这部教材.

本教材立足于普通高等院校和重点院校中部分专业的需要，合理地精选和安排了教学内容，力求恰当地处理数学发现与知识传授的关系，理论分析与实际应用的关系，归纳法与演绎法的关系，以提高学生的综合分析能力和创新能力.

本教材最突出的特点是在加强应用能力培养方面下了很大的功夫. 对数学概念和理论，加强了从实际问题的引入和从几何与数值方面的分析，增加了不少实用的数学方法和颇为有趣的应用实例和习题，密切结合教学内容充分运用了数学软件，每章后均有"演示与实验"，附有"微积分应用课题"，并配有光盘. 与传统教材相比，不少章节的面貌有了很大的变化，笔者认为着眼于加强应用能力的培养，为提高学生的综合分析能力和创新能力奠定良好的数学基础是普通高等院校高等数学课程教学改革的主攻方向，本书在这方面做出了显著的成绩. 相信本书的出版必将进一步推动普通高等院校数学课程的教学改革，也为"高等数学"革新教材增添受到读者欢迎的新品种.

马知恩

2002 年 5 月于西安交通大学

前　　言

微积分是近代数学最伟大的成就．由于它在各个领域的广泛应用，以其为主要内容的“高等数学”成为大学中最重要的基础课程之一．但是多年来在“高等数学”教学中，存在偏重向学生传授微积分的概念、理论、运算规则和技巧，忽略微积分的数学思想及它与实际的紧密联系的现象，不够注重对于课程在学生的素质与能力的培养方面的积极作用．

进入 21 世纪，教学内容和课程体系的改革在全国更加深入地开展．一些思路比较新且包含有“数学实验”的新教材陆续出现，对教学改革起到了积极推动的作用．但是，适合普通高等院校及重点院校中部分专业的新教材仍很缺乏．在上海交通大学国家工科数学教学基地的大力支持下，上海交通大学和集美大学的十几位数学教师查阅了国内外的一批教材和资料，参照国家教委 1995 年颁布的“高等数学课程教学基本要求”，经过反复研讨，合作编写了这本教材．我们尽力把改革设想和思路体现在教材中，本教材有下列特点：

1．从实际问题出发，引入数学概念和理论．让学生体会到微积分是来源于实际，又能指导实际的一种思维创造．在教材中我们尽量从不同方面多给出实际例子并加入简单的数学模型，让学生初步体会到微积分与现实世界中的客观现象有密切联系；在习题中也适当加大应用问题的比例，书末还附有“微积分应用课题”，以便学生在课程结束时能尝试利用所学微积分知识来分析和解决一些简单的实际问题．

2．合理调整和安排教材中的概念与理论、方法与技巧和应用与实践这三部分内容．加强从几何和数值方面对数学概念的分析，从多方面培养学生的理性思维；增加介绍用表格和图形表示的函数及其运算，注意克服偏重分析运算和运算技巧的倾向；加强实践环节，重视应用能力的培养．

3．随着计算机技术发展，数学教学从传统的自然科学传授走进了与计算机技术和软件相结合的教学过程．本教材引入 Mathematica 教学软件，它发挥了教学辅助的作用．在每一章后附有“演示与实验”，一方面通过数学软件的直观演示加深学生对一些重要的概念和定理的理解，另一方面让学生学习使用数学软件 Mathematica 进行各种运算、绘制图形和完成应用课题，培养学生的动手能力，使学生有机会尝试利用数学知识和计算机软件解决实际问题．

4. 本教材注意“简易性”，尽量做到通俗易懂，由浅入深，富于启发，便于学生自学.

总之，本教材力求恰当地处理归纳法与演绎法、数学的发现与知识的传授、加强实际应用与理论分析能力的培养之间的关系，以提高学生的综合分析能力和创新能力.

本教材内容覆盖面比较广，教师可根据不同专业特点进行取舍. 课内教学约需 144～162 学时，建议可在课外再安排 14～18 学时上机实验.

本教材附有“演示与实验”光盘，内容有：(1)数学软件 Mathematica 4.0 介绍；(2)各章“演示与实验”教学内容；(3)“微积分应用课题”的题目及部分解答. 该光盘可以与本教材配套使用，也可以单独作为高等数学“演示与实验”课使用.

本教材在编写过程中得到上海交通大学国家工科数学教学基地领导叶中行教授、西安交通大学马知恩教授的关心和支持，上海交通大学和集美大学的数学老师们根据教学实践经验为教材编写提出了很好的意见和建议并给予很多帮助，编者在此一并表示衷心的感谢.

由于时间仓促，加上教材改革尚处于尝试阶段，教材中必定存在不少问题. 热忱希望各位专家、教师、学生提出宝贵意见.

E-mail：mathpo@sjtu.edu.cn
jcb@jmu.edu.cn

编 者

2002 年 5 月

致 学 生

拿到新的"高等数学"课本,你一定想知道,为什么要学这门课程? 能学到些什么? 怎么学? 下面让我们介绍一下.

首先,**学好本课程非常重要**. 为什么呢?

杰出的数学家、被人们称为"计算机之父"的冯·诺伊曼(John Von Neumann)说过:"**微积分是近代数学中最伟大的成就,对它的重要性无论做怎样的估计都不会过分**. "300 多年前,英国数学家牛顿(Newton)、德国数学家莱布尼兹(Leibniz)等受天文学和几何方面问题的启发,提出了微积分的概念. 由于它在物理学、工程学、生物学、经济学和社会学等各个领域的愈来愈广泛的应用,以微积分为主要内容的"高等数学"成为大学中最重要的基础课程之一. 大部分专业的学生在大学一年级都要学习这门课程,它不仅是后续课程的基础,而且在培养大学生的素质和能力方面起着重要的作用. 特别是进入 21 世纪,科学技术的发展和现代化的管理对大学生数学素质的要求越来越高,因此学好这门课程对于大学生将来的发展非常重要.

本课程主要学些什么呢?

"高等数学"主要学习微积分学,上册包括一元函数微积分和微分方程,下册包括多元函数微积分和级数. 微积分学研究的是变化的量. 由于客观世界大量的问题都涉及变化的量,因此,人们迫切需要解决两大问题:(1)如何求这些不断变化着的量的变化率? (2)对于这些不断变化着的量,如何求它们在某个范围内的和? 前者是微分学要解决的问题,后者是积分学要解决的问题. 微积分学的理论基础是极限,而极限的概念在中学已经学过,因此,入门并不困难.

微分学和积分学的方法可以解决互逆的问题. 例如一物体作变速直线运动,设在时间间隔$[t_1,t_2]$内物体运动的路程函数为 $S(t)$,由于速度是不断变化的,想用初等数学的方法求物体在每一时刻的速度 $v(t)$很困难,但微分学能解决这个问题;同样,若已知物体作变速直线运动的速度函数 $v(t)$,积分学可以解决求物体在时间间隔$[t_1,t_2]$内走过的路程的问题. 当然,微积分学不仅仅是这些,其内容非常丰富,比如,微分学可以解决求曲线在某一点处的切线问题、积分学可以用于求初等数学无法解决的一些图形的面积问题等等. 当你学完这门课程,你一定会觉得站在了一个更高的起点上.

怎样才能学好这门课程呢?

这里我们提几点建议:

1. 注意理解课本中介绍的重要概念. 本教材中的每一个重要概念都从实际例子引入,要认真阅读这些例子,这对于理解这些概念会有帮助. 要善于借助几何直观领会这些概念的意义,这样就不觉得这些概念抽象了.

2. 掌握微积分运算的基本方法. 这些方法是很有用的. 教材中每一节后面习题分为A类和B类,A类是最基本的要求,B类具有提高的性质,完成一定数量的练习是必须的.

3. 注意微积分与实际问题联系. 教材中有许多实际例子,书末还附有微积分应用课题. 尝试用学过的方法解决一些简单的应用问题,对于提高能力很有帮助.

4. 认真阅读每一节教材后面的“演示与实验”,并打开光盘观看有趣的演示,对理解教材中一些概念和定理很有帮助. 当你学会使用数学软件Mathematica时,一定会觉得如虎添翼,因为数学软件强大的功能,将使你在进行各种计算、绘制漂亮的图形和完成应用课题方面得心应手.

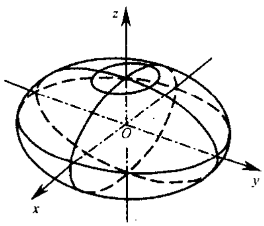
5. 学会自学,培养自主学习的能力. 这是科学技术飞速发展的新时代对大学生的要求. 本教材通俗易懂,相信通过自学,再认真听课一定能达到好的学习效果.

编 者

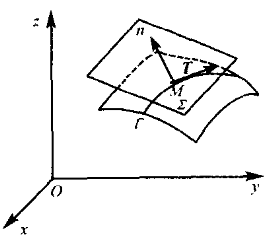
2002年5月

目　　录

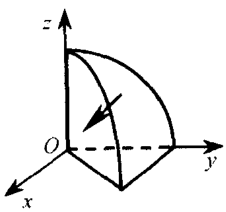
序
前言
致学生
第八章　空间解析几何与向量代数 …………………… (1)
8.1　向量及其线性运算 ………………………… (1)
8.1.1　空间直角坐标系 ……………………… (1)
8.1.2　向量的概念及其坐标表示 …………… (2)
8.1.3　向量的线性运算 ……………………… (4)
习题 8.1 ……………………………………… (7)
8.2　向量的数量积 ……………………………… (9)
8.2.1　向量的数量积 ………………………… (9)
8.2.2　方向角、投影 ………………………… (11)
习题 8.2 ……………………………………… (13)
8.3　向量的向量积、混合积 …………………… (14)
8.3.1　向量的向量积 ………………………… (14)
8.3.2　向量的混合积 ………………………… (18)
习题 8.3 ……………………………………… (19)
8.4　平面及其方程 ……………………………… (20)
8.4.1　平面的点法式方程 …………………… (20)
8.4.2　平面的一般式方程 …………………… (22)
8.4.3　平面的截距式方程 …………………… (23)
8.4.4　点到平面的距离 ……………………… (24)
习题 8.4 ……………………………………… (25)
8.5　空间直线及其方程 ………………………… (25)
8.5.1　空间直线的一般式方程 ……………… (25)
8.5.2　空间直线的对称式方程 ……………… (26)
8.5.3　空间直线的参数式方程 ……………… (27)
8.5.4　点到直线的距离 ……………………… (28)
习题 8.5 ……………………………………… (29)

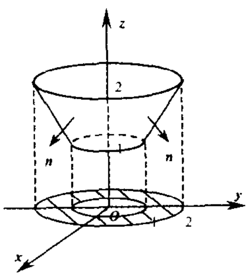


8.6　直线　平面之间的关系 …………………… (30)
8.6.1　两平面之间的关系 …………………… (30)
8.6.2　两直线之间的关系 …………………… (31)
8.6.3　平面与直线的关系 …………………… (32)
8.6.4　平面束 …………………… (34)
习题 8.6 …………………… (35)
8.7　曲面及其方程 …………………… (36)
8.7.1　一般曲面 …………………… (36)
8.7.2　二次曲面 …………………… (40)
习题 8.7 …………………… (45)
8.8　空间曲线和向量函数 …………………… (47)
8.8.1　空间曲线及其方程 …………………… (47)
8.8.2　空间曲线在坐标面上的投影 …………………… (48)
8.8.3　向量函数确定的空间曲线 …………………… (50)
8.8.4　向量函数的导数和积分 …………………… (52)
习题 8.8 …………………… (55)
8.9　演示与实验 …………………… (57)
习题 8.9 …………………… (68)
第九章　多元函数微分学 …………………… (69)
9.1　多元函数 …………………… (69)
9.1.1　区域 …………………… (69)
9.1.2　多元函数的概念 …………………… (71)
9.1.3　多元函数的极限 …………………… (74)
9.1.4　多元函数的连续性 …………………… (76)
习题 9.1 …………………… (77)
9.2　偏导数与全微分 …………………… (78)
9.2.1　偏导数的定义及其计算 …………………… (78)
9.2.2　高阶偏导数 …………………… (83)
9.2.3　全微分 …………………… (84)
习题 9.2 …………………… (88)
9.3　链式法则与隐式求导法 …………………… (90)
9.3.1　链式法则 …………………… (90)
9.3.2　隐式求导法 …………………… (96)
习题 9.3 …………………… (99)
9.4　方向导数与梯度 …………………… (101)
9.4.1　方向导数 …………………… (101)
9.4.2　梯度 …………………… (103)

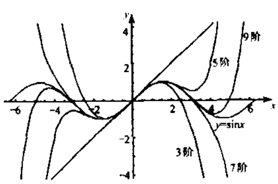


习题 9.4 ………………………………… (105)
9.5　微分法在几何上的应用 ………………… (106)
9.5.1　空间曲线的切线与法平面 ………… (106)
9.5.2　空间曲面的切平面与法线 ………… (107)
习题 9.5 ………………………………… (109)
9.6　多元函数的极值 ……………………… (110)
9.6.1　极值与最大值、最小值 …………… (110)
9.6.2　条件极值的拉格朗日乘子法 ……… (114)
习题 9.6 ………………………………… (119)
9.7　演示与实验 …………………………… (120)
习题 9.7 ………………………………… (126)
第十章　多重积分 …………………………… (127)
10.1　二重积分的概念 ……………………… (127)
10.1.1　二重积分的定义 ………………… (127)
10.1.2　二重积分的性质 ………………… (130)
习题 10.1 ……………………………… (131)
10.2　二重积分的计算 ……………………… (132)
10.2.1　二重积分在直角坐标系下的计算 ……………………………… (132)
10.2.2　二重积分在极坐标下的计算 …… (138)
10.2.3　二重积分的物理应用 …………… (142)
习题 10.2 ……………………………… (144)
10.3　三重积分 …………………………… (148)
10.3.1　三重积分的概念 ………………… (148)
10.3.2　三重积分的计算 ………………… (151)
习题 10.3 ……………………………… (160)
10.4　演示与实验 ………………………… (163)
习题 10.4 ……………………………… (167)
第十一章　曲线积分和曲面积分 ……………… (169)
11.1　场　数量场的曲线积分 ……………… (169)
11.1.1　场 ………………………………… (169)
11.1.2　数量场的曲线积分 ……………… (170)
习题 11.1 ……………………………… (174)
11.2　向量场的曲线积分 ………………… (175)
习题 11.2 ……………………………… (178)
11.3　格林公式及其应用 ………………… (179)
11.3.1　格林公式 ………………………… (179)





11.3.2 平面曲线积分与路径无关的条件 …… (182)
11.3.3 全微分求积 全微分方程 …… (184)
习题 11.3 …… (186)
11.4 曲面积分 …… (188)
11.4.1 曲面的面积 …… (188)
11.4.2 数量场的曲面积分 …… (190)
11.4.3 向量场的曲面积分 …… (193)
习题 11.4 …… (201)
11.5 奥-高公式、通量和散度 …… (204)
11.5.1 奥-高公式 …… (204)
11.5.2 通量和散度 …… (208)
习题 11.5 …… (211)
*11.6 斯托克斯公式 环流量和旋度 …… (213)
11.6.1 斯托克斯公式 …… (213)
11.6.2 环流量和旋度 …… (215)
习题 11.6 …… (218)
11.7 演示与实验 …… (219)
习题 11.7 …… (223)
第十二章 无穷级数与逼近 …… (224)
12.1 无穷级数的概念及性质 …… (224)
12.1.1 基本概念 …… (224)
12.1.2 收敛级数的简单性质 …… (228)
习题 12.1 …… (229)
12.2 级数的收敛判别法 …… (231)
12.2.1 正项级数收敛的充要条件 …… (231)
12.2.2 正项级数收敛的比较判别法 …… (233)
12.2.3 交错级数的收敛判别法 …… (234)
12.2.4 绝对收敛与比值判别法 …… (236)
12.2.5 级数的重排和乘法 …… (239)
习题 12.2 …… (240)
12.3 幂级数 …… (242)
12.3.1 幂级数及其收敛性 …… (242)
12.3.2 幂级数的运算性质 …… (246)
习题 12.3 …… (249)
12.4 泰勒级数 …… (251)



12.4.1 用多项式逼近函数——泰勒公式 …………………………………… (251)
12.4.2 泰勒级数 ………………………… (256)
12.4.3 函数展开成泰勒级数 …………… (257)
习题 12.4 ………………………………… (260)
12.5 傅里叶级数 ……………………………… (261)
12.5.1 三角函数系的正交性与三角级数的系数 ……………………………… (262)
12.5.2 函数的傅里叶级数 ……………… (264)
12.5.3 正弦级数与余弦级数 …………… (267)
12.5.4 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数 …………………………………… (270)
习题 12.5 ………………………………… (273)
12.6 演示与实验 ……………………………… (275)
习题 12.6 ………………………………… (280)
微积分应用课题 ……………………………………… (281)
附录 本书所配光盘的使用方法 ………………… (295)
习题参考答案 ………………………………………… (297)

第八章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何主要研究空间几何图形，如同平面解析几何一样，它把数学研究的两个基本对象“数”和“形”统一起来，从而可以用代数方法解决几何问题，也可以用几何方法解决代数问题.

本章我们先引进向量及其代数运算，讨论向量的各种运算规律，然后介绍空间曲面和空间曲线，并以向量为工具来研究平面和空间直线，最后介绍二次曲面.

8.1　向量及其线性运算

8.1.1　空间直角坐标系

从空间任意一点 O，作三条互相垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，它们都以 O 点为原点且一般具有相同的长度单位，这三条轴分别叫做 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称**坐标轴**. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正向符合右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 8-1，这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系，点 O 叫做坐标原点（或原点）.

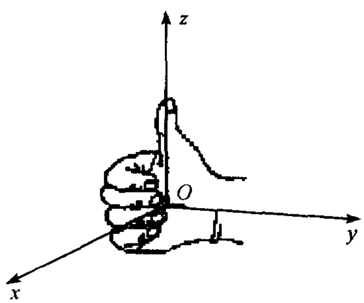


图 8-1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样两两确定出的三个平面称为坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面为 xOy 面，y 轴及 z 轴和 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别叫做 yOz 面及 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个卦限（如图 8-2），在 xOy 面上方是第(1) (2) (3) (4) 卦限，下方是(5) (6) (7) (8) 卦限.

设 M 为空间一已知点. 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R（图 8-3），这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴的坐标依次为 x,y,z. 于是空间一点 M 就惟一地确定了一个有序数组 x,y,z；反过

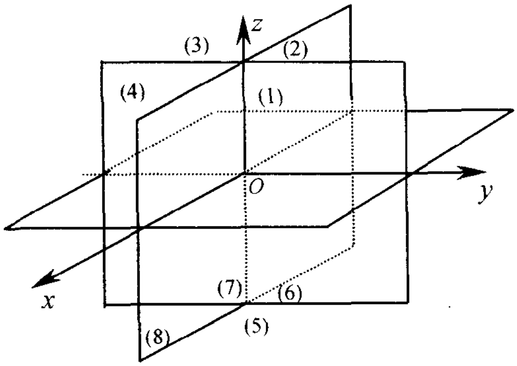


图 8-2

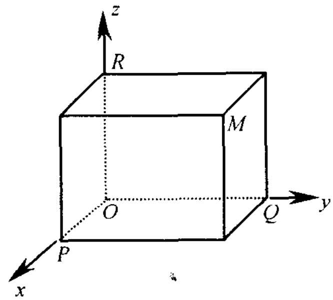


图 8-3

来，已知一有序数组 x,y,z，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 Z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后通过 P、Q 与 R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 (x,y,z) 所确定的惟一点. 这样，就建立了空间的点 M 和有序数组 x,y,z 之间的一一对应关系，表示为

$$M \longleftrightarrow (x,y,z).$$

这组数 x,y,z 就叫做**点 M 的坐标**，并依次称 x,y 和 z 为**点 M 的横坐标，纵坐标和竖坐标**. 坐标为 x,y,z 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

根据平面解析几何知识，我们知道，平面上两点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$ 间的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

将该公式推广到三维空间，我们得到空间中两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别是，空间中点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 之间距离 $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

8.1.2　向量的概念及其坐标表示

我们把只有大小的量称为**数量**，例如时间、温度、长度等；把既有大小又有方向的量称为**向量**（**或矢量**），例如位移、速度、加速度、力等. 为区别于数量，通常用一个黑体的字母或一个上面加箭头的字母来表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$，$\vec{v}$，$\vec{F}$ 等.

向量概念中包含两个要素 —— 大小和方向，而几何中的有向线段正好具备这两个要素，因此很自然地，我们用有向线段来表示向量．有向线段$\overrightarrow{AB}$ 所表示的向量，其大小就是有向线段$\overrightarrow{AB}$ 的长度，其方向就是有向线段$\overrightarrow{AB}$ 的方向，即从 A 到 B 的方向，这个向量记为$\overrightarrow{AB}$，A 叫做**向量的起点**，B 叫做**向量的终点**．如果有向线段$\overrightarrow{AB}$ 表示向量$\boldsymbol{v}$，则称$\overrightarrow{AB}$ 为$\boldsymbol{v}$ 的一个几何表示．

向量$\boldsymbol{v}$ 的大小，即有向线段的长度，叫做向量的**模**，记为 $|\boldsymbol{v}|$．有时称它为向量的长度．

两个向量**方向相同**，是指将它们移到同一始点时，它们在一条直线上，且这时两个终点分布在始点的同一侧；反之，若两个终点分布在始点的两侧，则称两向量**方向相反**．

我们还规定长度是零的向量，称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$．零向量的方向可以认为是任意的．

如果两个向量大小相等，方向相同，称这两个向量**相等**．因此向量的起点可以任意选取，就是说，起点不同而大小、指向均相同的有向线段都表示同一个向量．正由于此，我们讨论的向量被称为**自由向量**．

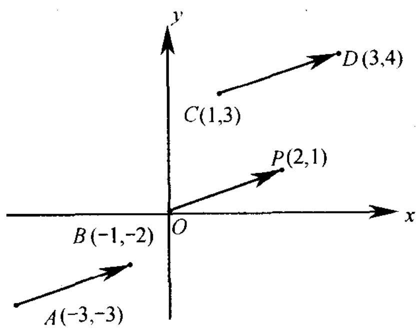


图 8-4

考察图 8-4 中的三个向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$ 和$\overrightarrow{OP}$，它们终点横坐标与起点横坐标的差都是 2，终点纵坐标与起点纵坐标的差都是 1，根据平面上两点间距离公式，我们可以算得以上各向量的大小相等，再计算有向线段的斜率，得出以上各向量方向相同．图上所有向量虽然位置不同，但由于大小相同方向一致，所以表示同一向量，即向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$ 与起点在原点，终点在(2,1) 的向量$\overrightarrow{OP}$ 相同．事实上，向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$ 可由向量$\overrightarrow{OP}$ 平移得到，所以，向量具有平移不变性．可以想像这些向量可由 $\{2,1\}$ 这一个二元有序数组来表示，我们有如下定义：

定义 8-1 一个二元有序实数组 $\{a,b\}$ 称为一个**二维向量**．二维向量的全体记作 V_2．一个三元有序实数组 $\{a,b,c\}$ 称为一个**三维向量**．三维向量的全体记作