群表示论

及其在量子力学中的应用

程国均　　编著

四川大学出版社

群 表 示 论

及其在量子力学中的应用

程国均　编著

四 川 大 学 出 版 社

1988年・成都

内 容 简 介

本书是根据作者在四川大学为核物理与核技术专业硕士研究生讲授群论课程的讲稿修改补充而成的．全书共七章，包括群论的基本概念，有限群的表示理论，n次对称群S_n，旋转群，量子力学中的对称性，幺模幺正群SU（n），李代数和李群表示等．内容深入浅出．力求用具体例子来阐明抽象的理论．叙述力求直观、形象、清晰，重视运算技巧和方法．书中吸收了新的研究成果和科研中的计算实例；书中的基本公式都给出了推导，重要定理都给出了证明．每章末都附有习题．

本书可作为非数学专业理、工科大学生和研究生的教材或教学参考书．也可供科技人员参考和自学者自学。

Group Representation TheorY and

Its Application to Quantum Mechanics

Cheng Guojun

群表示论——

及其在量子力学中的应用

程国均　编著

责任编辑　杨守智　封面设计　蒋仲文

四川大学出版社出版（四川大学校内）

四川省新华书店发行　百花潭中学印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/16　印张：23.25　字数：560千字

1988年5月第一版　1988年5月第一次印刷

印数：0001—1500册

ISBN 7—5614—0028—4/O·4　定价：3.86元

序　言

获悉程国均同志编著的《群表示论及其在量子力学中的应用》一书即将出版，我很高兴。

大家知道，群论这门数学学科在物理学中有着很广泛的应用。由于很多群的表示体现了自然界存在着的对称性及守恒律，因此，群表示论方法可以对这些物理规律给出既简洁又严格的描述。特别是在量子力学的多体系统中，群表示论更是不可缺少的工具。随着群论在原子核物理、粒子物理、原子分子物理以及固体物理等学科中日益广泛的应用，群论已成为物理学工作者所必需具备的基础知识。

本书着重在介绍群表示理论及其应用，并力求用一些具体例子来加以阐明，内容比较全面而又容易读懂。对那些初次学习群论的读者来说，本书是比较适合的。本书也适于作为物理系本科生和研究生群论课程的教材或教学参考书。

我祝愿本书的出版将在群论教学和科学研究中发挥良好的作用。

余　友　文

一九八七年四月五日于中国科学院高能物理研究所

前　言

本书是根据作者在四川大学为核物理与核技术专业研究生开设的群论课程讲稿，加以整理、修改和补充后完成的。

本书是为只有一般数学分析知识、打算应用群论但又不想作深入了解的读者，提供一本内容比较全面而又容易读懂的入门书，使他们通过阅读本书能对群表示论的基本内容及其应用有较完整的了解。全书共分群论的基本概念，有限群的表示理论，n次对称群S_n，旋转群，量子力学中的对称性，幺模幺正群SU(n)，李代数和李群表示等七章。在选材和论述时，尽可能考虑到了初学者的困难，力求用具体例子来阐明抽象的理论，叙述力求直观、形象、清晰。除着重在阐明基本概念外，对运算技巧和方法也给予了足够的重视，并附有科研中的计算实例。为了减少读者在学习中的困难和减轻教师在备课中不必要的负担，本书中几乎所有基本公式都给出了推导，重要定理都给出了证明。全书各章还适当地配备了习题，便于读者练习，以检查阅读效果和熟练运算技巧，从而加深对内容的理解。此外，本书还吸收了这个领域的若干最新研究成果；其中包括作者本人的研究成果。

本书可作为非数学专业的理工科大学生和研究生的教材或教学参考书，还适合一般科技人员和正在自修大学课程的广大青年自学。

在本书艰辛的写作历程中，作者得到了很多科学工作者的热情支持和帮助，深情硕谊，作者永志不忘。著名群论学者栾德怀先生仔细审阅了书稿，提供了宝贵的意见，这些意见已基本全部采纳。著名物理学家余友文先生在百忙中抽时间为本书撰写了序言，并就书中的某些内容提出了有价值的建议，使作者获益良多。中国原子能科学研究院研究员苏宗涤、萨本豪等先生曾复核过本书的某些计算，并和作者作过多次有益的讨论。中国科学院理论物理研究所研究员安瑛、张肇西、赵恩广等先生；北京大学教授韩其智先生；暨南大学副教授黄国淳；河南师范大学副教授刘自信；重庆大学讲师胡炳全等学者也提供过很好的意见。作者谨此一并致最衷心的感谢。

作者最初学习群论，是在先师何启智教授指导下进行的。后来从事群论教学和研究，也曾得到他的有益教诲和热情支持，借此机会，作者谨向先师何启智教授致最深沉的悼念。

作者才疏学浅，在本书写作中虽力求其善，然完全避免缺点和错误，非所敢望。愿就教于读者诸君，俾便改进。

作　者

1987年4月12日于四川大学

绪 论

群论是描述和研究自然界对称性的一门学科，它属于近世代数学的范畴。诺贝尔奖金获得者、著名物理学家杨振宁教授认为："对称性决定相互作用。"他说，把对称性原理继续推广，将是八十年代、九十年代和二十一世纪物理学的重要发展方向。目前，群论已成为物理学、化学、生物学等自然科学学科的重要工具，它不但对自然科学而且更一般地对人们关于自然界的认识，都曾经产生而且还在继续产生深远的影响。大家知道，诺贝尔奖是科学研究的最高荣誉。从1957年以来，关于对称性理论的研究已获得了四次诺贝尔奖，这就是：1957年李政道、杨振宁的宇称不尽守恒理论；1963年维格纳（Wigner）的把对称群应用于物理学；1965年盖尔曼（Gell—Mann）的幺正对称理论；1979年格拉肖（Glashow）、温伯格（Weinberg）、萨拉姆（Salam）的弱电统一规范理论。即此一斑，也可看出对称性理论在自然科学中的地位是多么重要了。

所谓"对称性"，顾名思义，就是"对比相称"。根据韦勃斯特（Webster）大辞典的解释，对称（Symmetry）就是"和谐形态所显示出的美"（beauty of form arising from the harmony）。它本质上是一种静态观念。确切地说，我们可以把对称性概括为：如果一种现象或一个系统在某一变换下保持不变，我们就说这种现象或这个系统具有和该变换相对应的对称性。实际上，对称性的观念直接来自于我们的日常见解，它是我们在日常生活中经常用到的一个普通名词。本书封面的《骑士图》是荷兰画家埃舍尔（M. O. Escher）的一件出色作品，在这张图中，埃舍尔巧妙地表达了对称性原理。从图中可以看到，虽然图画本身和它的镜象并不相同，但是如果我们将镜象的黑白两种颜色互换一下，那末两者就完全一样了。对称性在自然界中是无处不在无时不有的，人类对它的认识可以一直上溯到几千年前，古建筑中的对称图案有力地说明了这一点。

二十世纪初期，人们认识到，对称原理和守恒定律之间具有非常密切的关系，一般说来，一个对称原理就对应着一个守恒定律。例如，空间平移下物理规律不变性的结果是动量守恒；空间旋转下物理规律不变性的结果是角动量守恒。随着相对论的出现，人们发现，对称原理和动力学定律之间存在着更完整而且相互依存的关系。同时，对称原理的范畴也大大地丰富了，它包括了仅据日常经验决看不出的对称性，这些对称性的正确是由复杂的实验推论出来或加以肯定的。这样通过复杂实验发展起来的对称性，观念上既简单又美妙。人们认识到，自然界具有一种我们能够了解的秩序。

然而，直到1925年量子力学出现之后，人们才发现对称原理在物理学上有很多用处。贝特和维格纳等人首先把群论用于原子结构和光谱的计算，从此以后，物理学家才开始大量使用对称观念。描述物理系统状态的量子数常常就是表示这系统对称性的量，例如，能量量子数描述了物理体系在时间平移变换下保持不变的对称性；角动量量子数描述了物理体系在空间旋转变换下保持不变的对称性。对称原理在量子力学中所起的作用是如此之大，以致我们无论怎样强调它的重要性都不会是过份的。关于这一点，杨振宁教授在1957年12月11日所作的诺贝尔讲演中曾说过："周期表的总结构，本质上就是库仑定律各向同性的直接结果。反

粒子（如正电子、反质子、反中子）的存在，是根据洛仑兹变换的对称性而理论地 预料 到的。在上述两例中，造化看来利用了对称定律的简单数学表达方式。当人们考虑这过程中的优雅而完美的数学推理，并把它同复杂而意义深远的物理结论加以对照时，一种对于对称原理威力的敬佩之情便会油然而生。”（杨振宁：物理学中的宇称守恒及其他对称定律，1957年12月11日获得诺贝尔奖金时的讲演。）

由上所述，我们可以清楚地看到，描述和研究自然界对称性的群论，在当代自然科学中具有无可置疑的重要地位。群通过表示论，在自然科学和工程技术中得到了广泛的应用。群表示很自然地出现在具有某种对称性的科学技术问题的研究中。目前，在自然科学和工程技术中，特别是在高技术领域，群论的应用范围日见广泛，它已经成为不可缺少的了。可以断言，在人类对未知自然规律的探索中，群论将起非常重要的作用；同时，在自然科学思想的变 革进程中，群论也将为我们提供所需要的信息。

目　录

第一章　　群论的基本概念

§1.1　集合论简介

群论属于代数学的范畴，它所研究的是群这样一个代数系统。所谓代数系统，就是一个具有满足一定法则的代数运算的集合。在这一节里，我们先对集合论作一个简单介绍。

一、集合：若干个可以区分的事物的全体，称为集合。如把x满足某条件表示成$P(x)$，则满足$P(x)$的一切x所组成的集合A可表示成

$$A=\{x\mid p(x)\}$$

x叫做A的元素。记为$x\in A$。若x的个数是有限的，我们就说A是一个有限集。若x的个数是无限的，我们就说A是一个无限集。

若元素y不属于集合A，则记为$y\notin A$。

二、空集：一个没有元素的集合，称为空集。记为ϕ。

三、集合的运算：并，交，差.

设A，B是两个集合，则

并：$A\cup B=\{x\mid x\in A$或$x\in B\}$，如图1.1.

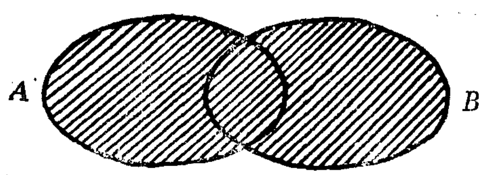

图　1．1

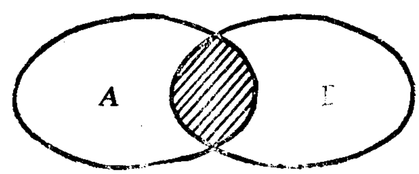

图　1．2

交：$A\cap B=\{x\mid x\in A$同时$x\in B\}$，如图1.2．若$A\cap B=\phi$，我们就说A和B不相交.

差：$A-B=\{x\mid x\in A$但$x\notin B\}$，如图1.3.

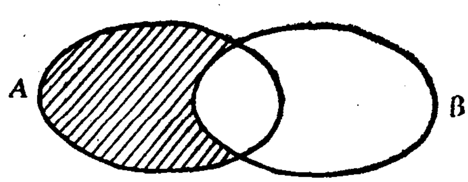

图　1．3

四、包含：设有两个集合A和B，若$x\in A$，必有$x\in B$，我们就说$A\subset B$、如图1.4．我们也可记为$B\supset A$，这时就说A是B的子集.

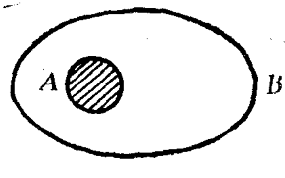

图 1.4

五、相等：设有两个集合A和B，若$A\subset B$，同时$B\subset A$，我们就说集合A和B相等，记为$A=B$.

六、集合的直积：设有两个集合A和B，定义A和B的直积$A\times B$为

$$A\times B=\{(x,\ y)|x\in A,\ \text{且}\ y\in B\} \tag{1.1}$$

即先在A中取一个元素x，然后在B中取一个元素y，把它们按取的先后顺序，x 在 前，y在后，搭配起来成为（x，y）．可以证明，$A\times B\neq B\times A$．例：设有集合$A=\{$红色,黑 色$\}$，$B=\{$将，士，象，车，马，炮，兵$\}$，通过直积$A\times B=C$所得到的新集合$C=\{$(红，将），（红，士），…$\}$就是中国象棋所有不同种类棋子的集合.

七、映射：设有函数$y=f(x)$，$x\in R$，$y\in R$，这里R为实数集合．函数可表示为

$$f:\ R\to R \qquad x\mapsto y=f(x) \tag{1.2}$$

对每一个$x\in R$，f在x的值是$f(x)$．把函数概念加以拓广，即得到映射的概念.

设X和Y是两个抽象的集合．如果通过某一法则f，对X内的任何一个元素x，能得到Y中的一个且只能得到一个y和这个x对应，我们就称这个法则f是集合X到集合Y 的 一 个 映射；元素y叫做元素x在映射f之下的象；元素x叫做元素y在映射f下的一个逆象.

我们常用以下符号来描写一个映射：

$$f:\ X\to Y \tag{1.3}$$

$$\text{或}\quad x\mapsto y=f(x) \tag{1.4}$$

这里$f(x)$只是一个符号，就是说，我们把y这个元写成$f(x)$，它暗示，y是把f应用到x上所得的结果.

给了集合X和Y，一般来说，有各种不同的映射可以替每一个元素x规定一个象．假如对于集合X的任何一个元素x来说，

$$f_1(x)=f_2(x) \tag{1.5}$$

我们就说集合X到集合Y的两个映射f_1和f_2是相等的.

设f是集合X到集合Y的一个映射．若是在f作用下，集合Y的每一个元都至少是集合X中某一个元的象，我们就说f是X到Y上的映射（mapping onto），或者说f是X到Y的一个满射．这时，Y中的任何元素，在X中必有逆象，但逆象可能不止一个.

例　　$X=\{1,2,3,\cdots\}$，$Y=\{$奇，偶$\}$．那末

f：1,3,5,…　→奇；2,4,6,…　→偶

是一个X到Y的满射．这时，X的不同的元素1,3,… 在Y里的象都是奇，X的不同的 元 素2,4,…在Y里的象都是偶.

设f是集合X到集合Y的一个映射．若是在f作用下，集合X的不同的元在集合Y中有不同的象，我们就说f是X到Y的一个单射.

假如一个集合X到集合Y的映射f既是满射又是单射，那末f叫做集合X与集合Y间的-

个双射(也叫一一映射)．在X与Y间的一个双射之下，Y的每一个元都是而且只是X里面一个元的象．

集合X与集合Y间的一个双射f带来一个通常用f^{-1}表示的Y与X间的一个双射．我们称f^{-1}是f的逆映射，当然，f也是f^{-1}的逆映射．我们规定，

$$f^{-1}: y \mapsto x = f^{-1}(y)，假如 y = f(x)$$

可以证明，f^{-1}是集合Y与集合X间的一个双射．

当X和Y是相同的集合时，我们称集合X到集合X的一个映射叫做X的一个变换．相应地，一个X到X的满射、单射分别叫做X的一个满射变换和单射变换，X与X间的一个双射叫做X的一个双射变换．若X是有限集合，则称X的一个双射变换叫做一个置换．

八、等价关系：设X是一个集合，对X中的任何两个元素a和b，(a,b)就是直积$X\times X$的一个元素；设另一个集合$D=\{对，错\}$．

定义 一个$X\times X$到D的映射R叫做集合X的元素间的一个关系．

若$(a,b)\overset{R}{\mapsto}$对，我们说$a$与$b$符合关系$R$，记成$aRb$．若$(a,b)\overset{R}{\mapsto}$错，我们说$a$与$b$不符合关系$R$．

定义 设R是集合X的元素间的一个关系，若R满足下面三条公理：

(i)自反性：对集合X内的任何元素x，有xRx．

(ii)对称性：对X中的两个元素x和y，若xRy，则有yRx．

(iii)传递性：对X中的三个元素x,y,z，若xRy，yRz，则有xRz．

就称R是集合X内的一个等价关系，并用符号$\sim$来代替R．等价关系是现代数学中一个很重要的概念．若$x\sim y$，我们就说x与y等价．

设x是X中的一个元素，与x等价的所有元素组成的集合，就叫做由x产生的等价类，记为$[x]$，即：

$$[x]=\{y \mid y\in X，\ y\sim x\}$$

九、分类 我们除了把两个集合拿来比较之外，有时也要把一个集合分成若干个子集来加以讨论．如果把集合分成一些子集，使得X的每一个元属于而且只属于一个子集，我们称这些子集的全体叫做集合的一个分类．

定理 集合X的元素间的一个等价关系$\sim$决定X的一个分类．

证明 我们分三步来证明这个定理．

(i)两个等价的元素所产生的等价类相同，即若有$a\sim b$，则有$[a]\sim[b]$．

设$x\in[a]$，于是$x\sim a$，已知$a\sim b$，由等价关系的传递性质，知$x\sim b$，即$x\in[b]$，这就是说$[a]\subset[b]$．但由等价关系的对称性，我们有$b\sim a$，由此可同样推得$[b]\subset[a]$．所以我们有$[a]=[b]$．

(ii)X的每一个元素a必属于一个等价类：由等价关系的自反性，$a\sim a$，所以a必属于由它自己所产生的等价类$[a]$．

(iii)X的每一个元素a只属于一个等价类：假如a属于两个不同的等价类，即$a\in[b]$，同时$a\in[c]$，则由等价类的定义，$a\sim b$，$a\sim c$，由等价关系的对称性和传递性，得$b\sim c$，于是$[b]=[c]$，和$[b]$与$[c]$是不相同的两个等价类的假设相矛盾．至此定理得证． 证完

由此，利用集合X的一个等价关系，就可以把集合X分解为许多不同的等价类：$[x]$，$[y]$，$[z]$，…，X中的每一个元素必属于且只属于一个等价类．同一个等价类里的元素互相等价，不同等价类的元素之间必不等价，这样就得到了集合X的一个分类．利用X的不同的等价关系，可得到集合X的不同的分类．

十、商集 设有集合X，把其中的一个等价关系记为E，于是可按等价关系E将集合X分解为若干个等价类：

$$X \xrightarrow{\text{分解为}} \{[a],\ [b],\ [c],\ \cdots\}$$

现在把每一个等价类看成一个元素，即把$[a]$看成是由等价于a的所有元素“凝结”而成的一个新元素，$[b]$是另一个新元素，…，等等，由这些新元素所组成的集合叫做X的商集，记为X/E，即有

$$X/E=\{[a],\ [b],\ [c],\ \cdots\}.$$

用不同的等价关系，将得到不同的商集．

§1.2 群的观念

有了上一节的准备工作以后，我们现在来讨论群这个代数系统．群只有一种代数运算，即对集合中任意一对有序元素a,b，在集合中有一第三元素ab与之对应，我们把这种代数运算称为乘法。

由元素g_1，g_2，g_3，…组成的一个集合G

$$G=\{g_1,\ g_2,\ g_3,\ \cdots\} \tag{1.6}$$

假如具有下列性质：

(i)对任意两个（不同的或相同的）元素g_1，$g_2\in G$，定义了乘法，其乘积$g_2g_1\in G$．我们把这个性质叫做群的封闭性．

(ii)对此乘法，结合律成立，这就是说，对于G中任意三个元素g_1，g_2，g_3，

$$g_3(g_2g_1)=(g_3g_2)g_1 \tag{1.7}$$

(iii)存在单位元素$e\in G$，使

$$eg=ge=g \tag{1.8}$$

对每个$g\in G$都成立．

(iv)对每个$g\in G$，存在一个唯一的元素$g^{-1}\in G$，使

$$g^{-1}g=gg^{-1}=e \tag{1.9}$$

成立．我们称元素g^{-1}为g的逆元素．

这时，我们说集合G对于所定义的叫做乘法的代数运算来说作成一个群．

G为有限集时，所构成的群称为有限群；G为无限集时，则称所成的群为无限群．无限群又可分为分立群与连续群；含有可数无限个元素的群称为分立群；若群中元素的个数是不可数无限的，则群是连续群．有限群中元素的个数，称为群的阶数．具有n个元素的有限群就

称为n阶群.

若群元素的乘积满足交换律，即若有$ab=ba$，a，b都是群G的任一元素，则称群G为阿贝尔群或交换群.

设a是群G的一个元素，能够使得　　$a^n=e$　（e是单位元）

的最小整数n称为群元素a的阶．如果这样的一个n不存在，则说a是无限阶的.

若群G的每一个群元都是G的某一固定群元a的幂，即有$G=\{a,a^2,a^3,\cdots,a^{n-1},a^n=e\}$，则称$G$为循环群；或者说，$G$是由元素$a$生成的，记作：$G=(a)$

a就称为群G的一个生成元．a的阶就是循环群G的阶．显然，循环群一定是阿贝尔群，但反之则不然.

例1．量子力学中经常碰到全同粒子，假定有二个电子，处于二个不同的单电子状态$|\psi_\alpha{}^{(1)}>$和$|\psi_\beta{}^{(2)}>$，则由这二个电子组成的体系的一个可能状态是乘积态，即有

$$|\alpha\beta>=|\psi_\alpha{}^{(1)}>|\psi_\beta{}^{(2)}> \tag{1.9}$$

式中1，2代表第一、二个电子坐标编号．由于电子是全同粒子，因此我们把两个电子任意置换一下，也还是两个电子的可能状态．在量子力学中，这些置换都是算符．用符号P_{12}来表示1和2的对换，则有

$$\begin{aligned}P_{12}|\alpha\beta>&=P_{12}(|\psi_\alpha^{(1)}>|\psi_\beta^{(2)}>)\\&=|\psi_\beta^{(1)}>|\psi_\alpha^{(2)}>=|\beta\alpha>\end{aligned} \tag{1.10}$$

除了1，2对换的情况外，还有不交换的情况，这就是恒等变换I．即有

$$I|\alpha\beta>=|\alpha\beta> \tag{1.11}$$

I，P_{12}构成的集合$\{I，P_{12}\}$对乘法运算成群，这是一个二阶循环群．可证明如下：

证明：(i)封闭性：$IP_{12}|\alpha\beta>=I|\beta\alpha>=|\beta\alpha>$，$P_{12}I|\alpha\beta>=P_{12}|\alpha\beta>=|\beta\alpha>$，故有$IP_{12}=P_{12}I=P_{12}$.

(ii)结合律：显然.

(iii)单位元：$II|\alpha\beta>=I|\alpha\beta>$，$P_{12}I|\alpha\beta>=P_{12}|\alpha\beta>=IP_{12}|\alpha\beta>$　故有

$II=I$，$P_{12}I=IP_{12}=P_{12}$

故单位元即是I.

(iv)逆元：显然有$II=I$．由(1.10)式，可得

$$P_{12}P_{12}|\alpha\beta>=P_{12}|\beta\alpha>=|\alpha\beta> \tag{1.12}$$

把(1.12)式和(1.11)式相比较，即可得到

$$P_{12}P_{12}=I \tag{1.13}$$

所以，I的逆元就是I本身，P_{12}的逆元也就是P_{12}本身．显然，$\{I,P_{12}\}$是一个阿贝尔群.

例2　空间反射变换P：$\psi(x,y,z)\to\psi(-x,-y,-z)$，

恒等变换I：$\psi(x,y,z)\to\psi(x,y,z)$。

P,I所构成的集合$\{P,I\}$对变换的组合运算成群，这也是一个二阶循环群，同样可证明如下：

证明　(i)封闭性：

$$IP\psi(x,y,z)=I\psi(-x,-y,-z)=\psi(-x,-y,-z) \tag{1.14}$$

(ii)结合律：显然.

(iii)单位元：$II\psi(x,y,z)=I\psi(x,y,z)$

$PI\psi(x,y,z)=IP\psi(x,y,z)=P\psi(x,y,z)=\psi(-x,-y,-z)$

I即是单位元．

(iv)逆元：$II\psi(x,y,z)=I\psi(x,y,z)$故$II=I$

$PP\psi(x,y,z)=P\psi(-x,-y,-z)=\psi(x,y,z)=I\psi(x,y,z)$

故$PP=I$，所以，I的逆元是I，P的逆元是P．证完．

显然，$\{P,\ I\}$是一个阿贝尔群．

例3　绕Z轴转动0°，120°，240°，分别记这三个转动为e，a，b，它们所构成的集合$\{e,\ a,\ b\}$对"接连实施"运算成群．这是一个三阶循环群，习惯上称为C_3群．

证明：(i)封闭性：先转0°，再转120°，显然最后总共转了120°，于是有$ea=a$．同理，可得$eb=b$，$ab=e$，$aa=b$，$bb=aaaa=ea=a$．

(ii)结合律：$e(ab)=ee=e$，$(ea)b=ab=e$，于是有$e(ab)=(ea)b$，同理，可证$(ab)e=a(be)$等．

(iii)单位元：$ee=e$，$ea=a$，$eb=b$，故e是单位元．

(iv)逆元：$ab=e$，$ee=e$，ab互为逆元．e的逆元是e本身．证完．

显然，$\{e,\ a,\ b\}$是一个阿贝尔群．

例4　$x^3=1$的三个根：1，$\varepsilon_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$，$\varepsilon_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$组成的集合$G=\{1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}$，对"普通乘法"这个乘法运算成群，这是一个三阶群．

证明　(i)封闭性：$1\cdot\varepsilon_1=\varepsilon_1$，$1\cdot\varepsilon_2=\varepsilon_2$，$\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2=1$，

(ii)结合律：$1\cdot(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)=1\cdot1=1$，$(1\cdot\varepsilon_1)\varepsilon_2=\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2=1$．

(iii)单位元：1是G的单位元．

(iv)逆元：$1\cdot1=1$，$\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2=1$，1的逆元是1，$\varepsilon_1$的逆元是$\varepsilon_2$，$\varepsilon_2$的逆元是$\varepsilon_1$．

例5　考虑一矩形

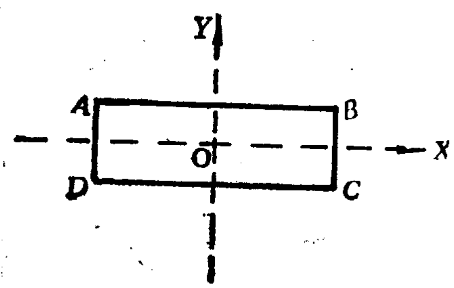

图 1.5

此图形有下列四个变换：

(i)恒等变换"E"：
$$E\begin{bmatrix}A & B\\ D & C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ D & C\end{bmatrix}\tag{1.15}$$

(ii)绕垂直于XY平面的中心轴旋转180°的变换"R"：
$$R\begin{bmatrix}A & B\\ D & C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C & D\\ B & A\end{bmatrix}\tag{1.16}$$

(iii)相对于X轴的反射变换"X"：

$$X\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D & C \\ A & B \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

(iv)相对于Y轴的反射变换"Y"：

$$Y\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B & A \\ C & D \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

这四个变换组成集合$G=\{E, R, X, Y\}$，在G中定义变换的组合为乘法运算，把所得结果造成表，这个表叫做群乘法表．把G的元素E，R，X，Y依次写在这个表的最上面的第一行和最左面的第一列中，乘法运算的顺序是先实施第一行中的变换，然后再实施第一列中的变换．例如，在乘积$XR=Y$中，表示先实施R然后再实施X，所得的乘积Y就位于跟R对应的列和跟X对应的行的交叉点处．造表时，必须把所有运算一一弄清楚再作．

先＼后	E	R	X	Y
E	E	R	X	Y
R	R	E	Y	X
X	X	Y	E	R
Y	Y	X	R	E

表1.1　矩形变换的乘法表

根据表1.1，G中任意两个变换的积仍属于G，G中每一个变换的逆变换也属于G，容易验证，结合律在G中成立，因此，集合G对"接连实施"这个乘法运算来说成群．由于所得乘积相对于对角线来说是对称的，所以这是一个阿贝尔群．从表1.1中还可看到，由于$R^2=E$，$X^2=E$，$Y^2=E$，在群G中不存在有生成元，因而群G是一个四阶非循环群，称为4-群（*four-group*）．

依据上面所述的规则，我们可分别造出例1到例4的乘法表如下：

	I	P_{12}
I	I	P_{12}
P_{12}	P_{12}	I

表1.2　例一的乘法表

	I	P
I	I	P
P	P	I

表1.3　例二的乘法表

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

表1.4　例三的乘法表

	1	ε_1	ε_2
1	1	ε_1	ε_2
ε_1	ε_1	ε_2	1
ε_2	ε_2	1	ε_1

表1.5　例四的乘法表

例1到例5所列出的群都是特殊的具体的群．当我们一般地说到群时，指的是满足前面