DARK HORSE maths

◆新课标◆  初中版

数学黑马

解直角三角形

崔首诗◇主编

- 名师名题
- 专项突破
- 优化复习

吉林人民出版社

DARK HORSE maths

初中版

数学黑马

CHUZHONGBAN SHUXUE HEIMA

简单的数与式——有理数与整式

一次方程与不等式

图形世界——点、线、面

因式分解与分式

三角形

数的开方与二次根式

四边形与相似形

二次方程

解直角三角形

函数及其图象

统计初步

圆

责任编辑 崔 凯

装帧设计 瑞峰祥工作室

ISBN 7-206-04113-2

ISBN 7-206-04113-2

G · 1463 定价：6.50 元

新课标  初中版

数学黑马

解直角三角形

崔首诗◇主编

吉林人民出版社

解直角三角形

主　　编:崔首诗
责任编辑:崔　凯　　　　电　　话:0431-5649704
封面设计:瑞峰祥工作室　　责任校对:宋　春
吉林人民出版社出版 发行(长春市人民大街4646号　邮政编码:130021)
印　刷:长春市康华彩印厂
开　本:850mm×1168mm　1/16
印　张:6.25　　字数:163千字
标准书号:ISBN 7-206-04113-2/G·1463
版　次:2004年1月第1版　　　印　次:2004年1月第1次印刷
印　数:1-10 000册　　　　定　价:6.50元

丛书主编：崔首诗

副 主 编：沙敬红　牟玉华　吴轶兵

编　　写：郝　艳　孙子晴　尹振彬

王晓东　程云穆　刘大治

王铁军　孙红艳　澎　松

金　海　宋　春　孙明佶

齐　夏　那海涛　吴志明

孙　勇　宿建扬　何汇川

孙宇泽　张力杰　于建华

新课标 新理念 新方法

数学黑马

打造全新的《专项突破》

编者前记

《专项突破》类丛书在浩如烟海的教辅图书中何以能够备受青睐且长销不衰?

所谓“专项”,其特点在于“专”,改变普遍教辅图书“面面俱到”的模式,以学科知识为核心,能力训练为基础,对相关知识进行优化整合,使学生在融会贯通的基础上形成研究性学习。“专项”书的创作空间于理论上深入浅出,于学法上实用灵活,让学生在理解的基础上有所提高,在提高之中实现创新。

本套丛书的特色是什么?

本套书针对数学的各个板块进行科学有序地组合,对每一专题均由浅入深,由表及里地进行系统归纳,不同年级学生可以有针对性地选择,在最短时间内对某一板块知识学精学通。

图书清晰实用的体例:

1. 言简意赅的专项知识剖析
2. 少而精的经典试题讲解
3. 基础与能力的专题突破

在课程改革的大潮之中,丛书的适应性如何?

在目前教材版本与内容不稳定的状况下,本书克服了其他图书“完全同步性”不灵活的弱点,同时又对“同步性”有一定的辅助作用,适用面广。本书尽最大可能体现了 新课标人教版、北师大版、华东师大版的课改理念,增强了原有“专项”的人文意识和科学内涵。

Shu Xue Hei Ma 数学黑马

目录

一　正弦和余弦

知识点讲解

学习目标

掌握正弦、余弦的概念,特殊角的正弦和余弦值.

重点、难点和考点

重点:1. 正弦、余弦的概念. 锐角的正、余弦值的范围,及增减性(即大、小比较).

2. 特殊角的正弦和余弦值. 余角定理与同角的正、余弦关系及其应用.

3. 用计算器计算正弦和余弦.

难点:1. 锐角的正余弦值的增减性.

2. 余角公式与同角的正、余弦公式在化简求值等问题中的应用.

考点:1. 关于0°,30°,45°,60°,90°角的正弦和余弦值的计算为中考必考问题.

2. 余角公式在中考中出现的机率比 $\sin^2A+\cos^2A=1$ 大,并且多用于与三角函数有关的化简问题,而很少用于后面的解直角三角形问题.

知识点剖析

1. 正弦、余弦的概念.

如图1—1所示,在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,则定义锐角 A 的正弦 $\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$,即 $\sin A=\dfrac{BC}{AB}$ 或 $\sin A=\dfrac{a}{c}$,锐角 A 的余弦 $\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$,即 $\cos A=\dfrac{AC}{AB}$,或 $\cos A=\dfrac{b}{c}$.

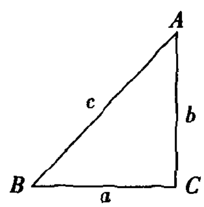

图1—1

特别应明确锐角 A 的正弦和余弦实质上是直角三角形中的两边之比,它的值只与角的度数有关,而与它所在三角形的大小与形状没有关系.

2. 锐角的正弦、余弦值的范围与增减性.

由于 $\sin A$ 与 $\cos A$ 都是直角边与斜边的比,且直角边小于斜边,所以 $0<\sin A<1$,$0<\cos A<1$,并且 $\angle A$ 的正弦值随 $\angle A$ 的增大而增大,余弦值随 $\angle A$ 的增大而减小.

3. 特殊角的正、余弦值.

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

4. 相关公式与定理.

(1)余角公式:$\sin(90°-A)=\cos A$;$\cos(90°-A)=\sin A$.

(2)同角的正、余弦公式 $\sin^2A+\cos^2A=1$.

(注:$\sin^2A$ 表示 $\sin A$ 的平方,即$(\sin A)^2$,$\cos^2A$ 与之同理,可将 $\sin A=\frac{a}{b}$,$\cos A=\frac{b}{a}$代入,由 $a^2+b^2=c^2$ 即可证得.)

5. 用计算器计算

(1)已知角度求正、余弦值.

(2)已知正、余弦值求角度.

名题精析

例1 已知:锐角 α,$\sin\alpha=\frac{4}{5}$,求 $\cos\alpha=$________.

精析 本题由于是已知锐角 α 的正弦,求其余弦,故可用 $\sin^2A+\cos^2A=1$,来计算,但在开方时由于 $0<\cos\alpha<1$,故只取其算术平方根;同时又可由正、余弦的定义来求解,而这种方法在填空、选择题时速度较快.

解 方法一:$\because \sin^2A+\cos^2A=1, 0<\cos\alpha<1$

$$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$$

方法二:令 $Rt\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle A=\alpha$,如图1—2

$\because \sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$,故可设 $BC=4m$,$AB=5m$,由勾股定理可得

$AC=3m$,$\therefore \cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$

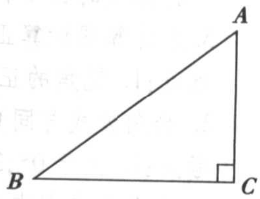

图1—2

点评 本题在使用方法二时,也可直接令 BC 为4个单位长度,AB 为5个单位长度后计算.

例2 化简 $\sqrt{1-2\sin15°\cdot\cos15°}$.

精析 由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,可知,$\sin^215°+\cos^215°=1$,若用其代替式子中的1,可出现完全平方式,但要注意,对于$\sqrt{a^2}$的化简结果应为$|a|$.

解 $\sqrt{1-2\sin15°\cdot\cos15°}$

$=\sqrt{\sin^215°+\cos^215°-2\sin15°\cdot\cos15°}$

$=\sqrt{(\sin15°-\cos15°)^2}$

$\because \cos15°=\sin75°>\sin15°$

$\therefore \sin15°-\cos15°<0$

$\therefore$ 原式 $=\cos15°-\sin15°$

点评 本题为"1"的巧用问题的一种,许多运算解过为"1"的式子取代原式中的"1"后,多有意想不到的效果.

例3 已知 $2\sin^2\alpha-3\sqrt{3}\sin\alpha+3=0$,求锐角 α.

精析 这里可将 $\sin\alpha$ 看成整体,作为未知数来应用,解方程,然后应用锐角角度与其三角函数值的对应关系求 α.

解 原方程可化为$(2\sin\alpha-\sqrt{3})(\sin\alpha-\sqrt{3})=0$

$2\sin\alpha-\sqrt{3}=0$ 或 $\sin\alpha-\sqrt{3}=0$

$\sin\alpha_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha_2=\sqrt{3}$

$\because \sin\alpha_2=\sqrt{3}>1 \quad 0<\sin\alpha<1$

$\therefore$ 舍去 $\sin\alpha_2=\sqrt{3} \quad \sin\alpha_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha_1=60°$或$120°$，$\because$ α 为锐角，$\therefore$ 锐角 α 的度数为 $60°$.

点评 这类问题在计算后会有 $\sin\alpha>1$ 的解，应由 $0<\sin\alpha<1(0<\alpha<90°)$ 来取舍.

例 4 已知：在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，且 $\sin A$、$\sin B$ 是关于 x 的方程$(m+5)x^2-(2m-5)x+m-8=0$ 的两根. 求 m 的值.

精析 由于在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B=90°$，故 $\sin B=\cos A$，$\sin^2A+\cos^2A=1$，并且由韦达定理可知 $\sin A+\cos A$，$\sin A\cdot\cos A$ 的值，再用方程解出 m.

解 $\because \angle A+\angle B=90°$，$\therefore \sin B=\cos A$

由韦达定理可知：

$$\begin{cases}\sin A+\cos A=\dfrac{2m-5}{m+5} & ① \\ \sin A\cdot\cos A=\dfrac{m-8}{m+5} & ②\end{cases}$$

$①^2-②\times 2$ 得$\left(\frac{2m-5}{m+5}\right)^2-2\left(\frac{m-8}{m+5}\right)=\sin^2A+\cos^2A=1$ ③

解得 $m_1=4$ 或 $m_2=20$

经检验：$m_1=4$ 或 $m_2=20$ 是分式方程③的根.

由于$\triangle\geqslant 0$，$0<\sin A<1$，$0<\cos A<1$.

m 代入原方程检验时，只有 $m=20$ 符合，$\therefore m=20$.

点评 本题在计算出 m 后必须检验，而检验可代入$\begin{cases}0<\dfrac{2m-5}{m+5}<2 \\ 0<\dfrac{m-8}{m+5}<1\end{cases}$中去，符合的留，不符合的舍.

例 5 已知$\triangle ABC$ 为锐角三角形.

求证：(1) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$.

(2) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

精析 由于锐角的正弦是借助直角三角形的计算求得，因此应在$\triangle ABC$ 中作适当的高来构造出直角三角形.

解 (1)如图 1—3 所示，作 BC 边上的高 A，令 $AD=h$.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah$

$\because \sin C=\frac{h}{b}$

$\therefore h = b \cdot \sin C$

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C.$

(2)如图 1—3 所示，

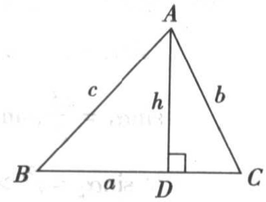

图 1—3

$\because \sin B = \frac{h}{c}, \sin C = \frac{h}{b}$

$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{bc}{h}, \frac{C}{\sin c} = \frac{bc}{h}$

$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

同理可得$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

点评 本题着重体现了在一般三角形中如何作辅助线，以应用解直角三角形的方式对其它图形加以计算的方法和思想.

基础过关题

一、选择题

1. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，则 $\sin A=$(　　)

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$ 都是锐角，且 $\sin A=\frac{1}{2}$，$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\triangle ABC$ 的形状是(　　)

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 不能确定

3. 如果 $\angle\alpha$ 是等边三角形的一个内角，那么 $\cos\alpha$ 的值等于(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，若 $AB=2AC$，则 $\cos A$ 等于(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. 若 α 是锐角，$\sin\alpha=\cos 50°$，则 α 等于(　　)

A. $20°$　　B. $30°$　　C. $40°$　　D. $50°$

6. 若 α、β 都是锐角，且 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=1$，则 α 与 β 的关系是(　　)

A. $\alpha=\beta$　　B. $\alpha+\beta=90°$　　C. $\alpha=-\beta$　　D. $\alpha+\beta=180°$

7. 计算 $\sin^2 45°+\cos^2 45°$ 的过程正确的是(　　)

A. 原式 $=\sin^2(45°+45°)=\sin^2 90°=1$

B. 原式 $=(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})^2=(\frac{2\sqrt{2}}{2})^2=2$

C. 原式 $=(\sin 45°+\cos 45°)(\sin 45°-\cos 45°)=(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})=0$

D. 原式 $=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

8. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，如果各边长度都扩大 2 倍，则锐角 A 的正弦值和余弦值(　　)

A. 都没有变化　　B. 都扩大 2 倍　　C. 都缩小 2 倍　　D. 不能确定

9. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，那么 $\sin B+\cos B$ 的值(　　)

A. 等于 1　　B. 大于 1　　C. 小于 1　　D. 不能确定

10. 已知锐角 α，且 $\cos\alpha<\frac{1}{2}$，则 α(　　)

A. 大于 $60°$　　B. 大于 $30°$　　C. 小于 $60°$　　D. 小于 $30°$

二、填空题

1. $\angle A$ 是锐角，已知 $\cos A=\frac{15}{17}$，那么 $\sin(90°-A)=$ ________.

2. 如图 1—4，$\sin\alpha =$ ________，$\cos\alpha =$ ________.

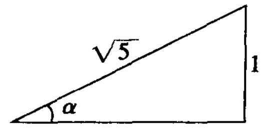

图 1—4

3. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，若 $\sin A = \frac{5}{13}$，$b = 24$，则 $a =$ ________，$c =$ ________，$\cos A =$ ________.

4. 在$\triangle ABC$ 中，$\sqrt{2\cos A - 1} + |\cos B - \frac{\sqrt{2}}{2}| = 0$，则$\angle C =$ ________.

5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\cos A > \cos B > \cos C$，则三个内角从小到大的排列为 ________.

6. 已知 $\sin^2 32° + \sin^2\alpha = 1$，则锐角 $\alpha =$ ________.

7. 计算：$\sin 60° \cdot \cos 30° + \sin^2 45° =$ ________.

8. 若 α 是锐角，且 $\tan(90° - \alpha) = \cot 36°$，则 $\alpha =$ ________.

9. $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$，且$\angle B - \angle C = 90°$，则$\angle B =$ ________，$\angle C =$ ________.

10. 若$\frac{1}{2\cos\alpha - \sqrt{3}}$无意义，则锐角 $\alpha =$ ________.

三、解答题

1. 在$\triangle ABC$ 中，$AB = \sqrt{3}$，$AC = 1$，$BC = 2$，求最大内角和最小内角的度数.

2. 在$\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上的高，$\angle B = 45°$，$\angle C = 30°$，$AD = 2$，求$\triangle ABC$ 的面积.

3. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$.

(1)已知$\angle A = 60°$，$b = 10\sqrt{3}$，求 c.

(2)已知 $c=2\sqrt{3}$,$b=3$,求$\angle B$.

(3)已知 $a=5$,$b=5\sqrt{3}$,求 c 和$\angle A$.

4. 计算:

(1)$\frac{1}{2}\sin60^\circ+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos45^\circ+\sin30^\circ\cdot\cos30^\circ$

(2)$(1-\cos30^\circ+\sin45^\circ)(1-\sin45^\circ-\cos30^\circ)$

(3) $\sqrt{(\sin45^\circ-\frac{1}{2})^2}-|\sin30^\circ-2\sin60^\circ|$

5. 已知:如图 1—5,AD 是 $Rt\triangle ABC$ 的中线,$\angle C=90^\circ$,$\angle ADC=45^\circ$,求 $\sin\angle BAC$.

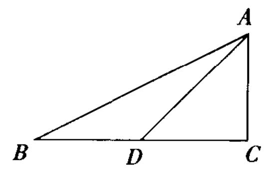

图 1—5

6. 已知 a、b、c 为$\triangle ABC$ 的三边,方程 $b(x^2-1)+c(x^2+1)-2ax=0$ 的两根相等,且 $a\cos B=b\cos A$,试判定$\triangle ABC$ 的形状.

7. 在$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$a=3$,且 $1+\sin A=4\cos B$,求 b.

四、开放性试题

实数 m、n 应满足怎样的条件，才能使方程 $x^2-\sqrt{m}x+n=0$ 的两根成为一直角三角形两锐角的正弦.

能力拓展题

一、选择题

1. 在△ABC 中，∠C 为直角，$\cos B=\frac{2}{3}$，则 $a:b:c$ 等于(　　)

A. $2:\sqrt{5}:3$　　B. $1:2:3$　　C. $1:\sqrt{2}:3$　　D. $2:3:\sqrt{5}$

2. 在△ABC 中，$\sin\frac{A+B}{2}$等于(　　)

A. $\sin\frac{c}{2}$　　B. $\cos\frac{c}{2}$　　C. $\sin c$　　D. $\cos c$

3. 若菱形的边长为 4，它的一个内角为 126°，则较短的对角线的长为(　　)

A. $4\sin54°$　　B. $4\cos63°$　　C. $8\sin27°$　　D. $8\cos27°$

4. 在△ABC 中，$a=5$，$b=12$，$c=13$，则 $\sin A$ 的值为(　　)

A. $\frac{8}{17}$　　B. $\frac{8}{15}$　　C. $\frac{5}{13}$　　D. 不能确定

5. 如果∠A 是锐角，且 $\sin A=\frac{3}{4}$，那么(　　)

A. $0°<\angle A<30°$　　B. $30°<\angle A<45°$　　C. $45°<\angle A<60°$　　D. $60°<\angle A<90°$

6. 若 $\sin(50°-\alpha)+\cos(40°+\alpha)=\sqrt{2}$，则锐角 α 的度数为(　　)

A. 50°　　B. 40°　　C. 5°　　D. 不能确定

7. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根是一直角三角形的两锐角的正弦值，且 $a+5b=1$，则 a，b 的值分别为(　　)

A. $-\frac{3}{5},\frac{8}{25}$　　B. $-\frac{7}{5},\frac{12}{25}$　　C. $-\frac{4}{5},\frac{9}{25}$　　D. 1，0

8. AE、CF 分别是锐角△ABC 的两条高，且$\frac{AE}{CF}=\frac{2}{3}$，则$\frac{\sin A}{\sin C}$的值为(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 不能确定

9. 化简 $\sqrt{\sin^2 20°-2\sin20°\cos20°+\cos^2 20°}$等于(　　)

A. 0　　B. $\sin20°-\cos20°$

C. $\cos20°-\sin20°$　　D. $\pm(\sin20°-\cos20°)$

10. 如图 1—6，在矩形 $ABCD$ 中，$DE\perp AC$ 于 E，设∠$ADE=\alpha$，且 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$AB=4$，则 AD 的长为(　　)

A. 3　　B. $\frac{16}{3}$

C. $\frac{20}{3}$　　D. $\frac{16}{5}$

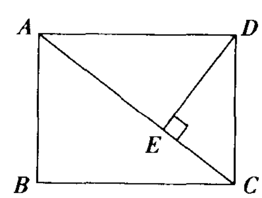

图 1—6