

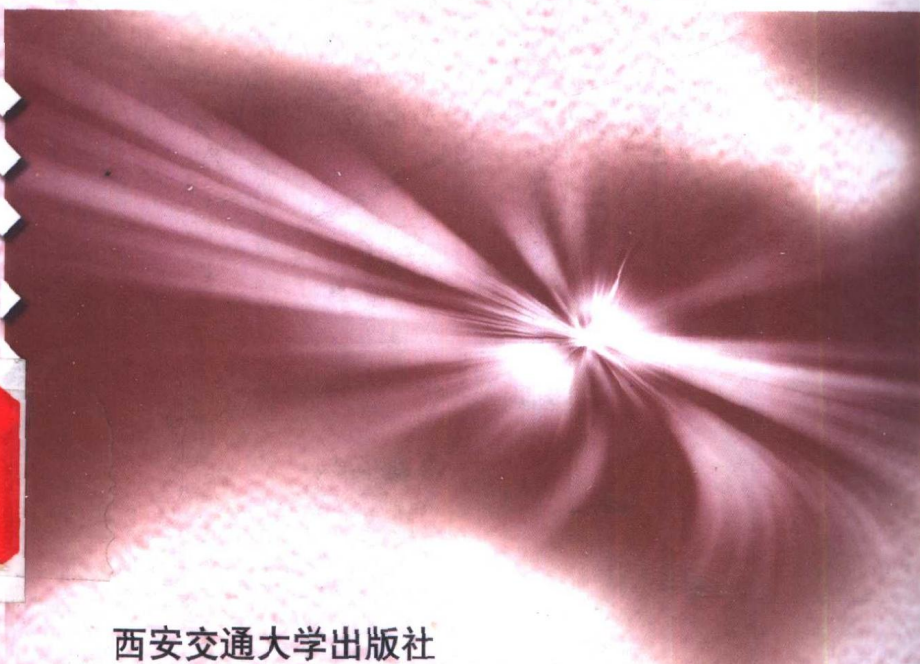


研究生课程参考教材

高等传热学

学习指导及典型题精解

张强 编著



西安交通大学出版社



研究生课程参考教材

高等传热学

学习指导及典型题精解

张 强 编著

西安交通大学出版社

内容简介

本书为研究生高等传热学课的学习参考书。内容包括热传导、对流传热、辐射传热 3 章。每章有要点、基本要求和典型题精解等 3 个方面。这些典型题主要选自国内用得较多的教科书,共计 142 题,满足各类不同学校研究生高等传热学课程教学的需要。附录中收录了完成习题所必需的数据、图表和特殊函数。

本书除可作为研究生高等传热学课程的教学参考书外,也可供从事传热学研究的科研人员和有关的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等传热学学习指导及典型题精解/张强编著. —西安:
西安交通大学出版社, 2001.10

ISBN 7-5605-1471-5

I. 高… II. 张… III. 传热学—研究生—教学参考资料
IV. TK124

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001) 第 067677 号

*

西安交通大学出版社出版发行

(西安市兴庆南路 25 号 邮政编码:710049 电话:(029)2668315)

西安交通大学印刷厂印装

各地新华书店经销

*

开本:850 mm×1 168 mm 1/32 印张:10.375 字数:264 千字

2001 年 10 月第 1 版 2001 年 10 月第 1 次印刷

印数:0 001~2 000 定价:18.00 元

发行科电话:(029)2668357,2667874

前 言

本书是根据作者长期从事研究生“高等传热学”课程教学的经验 and 所做的习题解答写成的。

“高等传热学”课程是热能动力、制冷、建筑环境与设备和工程热物理等许多专业的研究生主干课程。研究生普遍反映这门课难学,特别是习题难做。的确,教科书上的习题不仅是课本内容的运用,许多习题无论在深度上,还是在广度上都对课本内容有较大拓展。正如凯斯(Kays)在他的《对流传热与传质》一书的前言中所说:“这些长作业中的许多个作业看做是研究题目而不是习题可能更为恰当。”一些已经从事或准备从事“高等传热学”课教学的教师 and 研究生们希望有本辅导教材。然而目前还没有此类书籍出版。于是作者萌发了编写本书的想法。作者将备课过程中完成的习题解答,经整理、修改、补充,写成了这本书。本书共3章,即热传导、对流传热、辐射传热。每章除典型题精解外,增加了要点和基本要求两项内容。目前国内还没有统一的“高等传热学”课程教学大纲,课时也在60~100学时不等。本书力求能够满足各类不同学校的教学需要,但所写基本要求作者认为主要是针对较多学时课程的,各校可根据具体情况灵活掌握。本书所选习题力求既具典型性,又有广泛性。目前国内“高等传热学”课的教材也不完全统一。本书是以参考文献[1],[2],[4]三本教科书为基本教材。作者认为这三本教材起点高,内容丰富,讲述较清楚,习题质量也较高,是国内用得较多的教科书。本书的习题除个别自编外,全部选自上述三本教科书和文献[3]这四本教科书。共收入了142道习题的题解。解题过程力求详尽,但对解题过程中在教科书上有详细讲解的地方,本书一般不再详细列出,只指明其出处,而把重点放在整体的思路和教科书上没有或没有详细讲解的解题方法和步骤上。为了读者使用方便,附录中收录了解题所必需的数据、图表

和特殊函数。

作者在此深深感谢西安交通大学陶文铨教授对作者的帮助。陶教授在百忙中抽出时间详细审阅了本书的初稿,提出了宝贵的修改意见和建议。他的意见和建议使本书的质量有了显著提高。西安建筑科技大学刘咸定教授也给作者很多的帮助、鼓励并提出很好的建议,这里一并感谢。同时,作者对西安建筑科技大学研究生卜震、蒋建平、田华丽和李兵锋等在插图制作等方面给予作者的帮助,以及西安交通大学出版社杨鸿森教授和其他工作人员为本书做出大量的工作表示感谢。

限于作者水平,书中错误与不妥之处在所难免,恳切欢迎读者批评指正。

张 强

2001年8月

目 录

第 1 章 热传导

1.1 要点	(1)
1.2 基本要求	(2)
1.3 典型题精解	(3)
1.3.1 导热理论基础	(3)
1.3.2 直角坐标系中的分离变量法	(7)
1.3.3 圆柱坐标系中的分离变量法	(14)
1.3.4 球坐标系中的分离变量法	(20)
1.3.5 杜哈美尔定理法	(22)
1.3.6 格林函数法	(26)
1.3.7 拉普拉斯变换法	(41)
1.3.8 近似分析方法	(46)
1.3.9 非线性问题	(50)

第 2 章 对流传热

2.1 要点	(54)
2.2 基本要求	(55)
2.3 典型题精解	(55)
2.3.1 对流换热的基本方程	(55)
2.3.2 边界层方程	(66)
2.3.3 非耦合外部层流边界层的换热	(83)
2.3.4 边界层积分方程解法	(96)
2.3.5 通道内非耦合层流的换热	(110)
2.3.6 紊流基础	(127)
2.3.7 自然对流换热	(146)

第 3 章 辐射传热

3.1 要点	(180)
3.2 基本要求	(181)
3.3 典型题精解	(181)
3.3.1 热辐射	(181)

3.3.2	表面的辐射特性	(182)
3.3.3	漫发射、漫反射表面之间的辐射交换··	(189)
3.3.4	漫辐射交换的角系数	(200)
3.3.5	具有镜反射分量的表面之间的辐射 交换	(217)
3.3.6	辐射交换方程的应用和解	(221)
3.3.7	吸收、发射和散射介质中能量传递的 基本方程	(232)

附录

附录 1	各种材料的密度、导热系数、比热及蓄热 系数	(237)
附录 2	几种保温、耐火材料的导热系数与温度的 关系	(240)
附录 3	常用工质的热物理性质	(241)
附录 4	超越方程的根	(261)
附录 5	误差函数	(265)
附录 6	贝塞尔函数	(268)
附录 7	第一类勒让德多项式的数值	(282)
附录 8	函数的拉普拉斯变换表	(286)
附录 9	流体流动的基本方程组在直角坐标、圆柱坐 标、球坐标中的表达式	(291)
附录 10	边界层分析中某些有用的函数表	(298)
附录 11	黑体辐射函数	(300)
附录 12	当温度为 t 时,各种材料表面法线方向上辐 射的发射率 ϵ_n 和总的半球辐射发射率 ϵ ···	(301)
附录 13	单色发射率 ϵ_λ 的数值	(303)
附录 14	总发射率数值表	(305)
附录 15	角系数一览表	(312)
附录 16	指数积分	(322)

参考文献

第 1 章 热传导

1.1 要点

本章主要包含两方面内容,即导热理论基础和导热问题的分析解法。

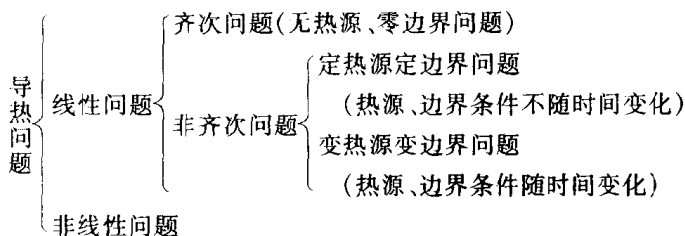
1. 导热理论基础

主要介绍导热的基本定律和导热问题数学模型的建立方法。数学模型包括控制方程和单值性条件两部分。一个具体导热问题的控制方程可由通用控制方程在具体条件下进行简化而得到,也可对所选取的系统(微元的或有限大小的)应用物理定律而得到。不同坐标系(正交或非正交)的控制方程既可通过选取相应的系统(一般使系统界面与坐标面平行)并应用基本物理定律得到,也可通过坐标转换的方法得到。对于正交坐标系,还可通过拉梅系数由向量形式的控制方程得到。在单值性条件的建立方面,主要介绍了边界条件的种类、数学描述以及非线性边界条件的处理方法。

2. 导热问题的分类

导热问题根据其数学物理特征的不同,大体可以分为以下几种类型。

按照是否满足特解叠加原理可以分为线性问题和非线性问题两大类。线性问题可以分为齐次问题和非齐次问题。非齐次问题又分为定热源定边界问题和变热源变边界问题两种类型。如下所示



其中定热源定边界问题可以分解为若干个只含一个非齐次项的稳态问题和一个齐次非稳态问题。变热源变边界问题的解一般需要利用定热源定边界问题的解或齐次问题的解经适当叠加而构成。

3. 导热问题的分析解法

分析解法包括精确分析解法和近似分析解法两类。对于线性导热问题,精确分析解法可以采用分离变量法、杜哈美尔定理法、格林函数法和拉普拉斯变换法等。分离变量法可以用于求解齐次问题和定热源定边界问题。其它方法则主要用于求解变热源变边界问题。其中杜哈美尔定理法是利用定热源定边界问题的解构造变热源变边界问题的解,格林函数法是用齐次问题的解构造非齐次问题的解,而拉普拉斯变换法则是将非稳态问题中对时间变量的偏导数从方程中消去从而使方程的求解变得容易。

在近似分析解法中主要分析了积分方程近似解法、基于变分原理的里兹法、伽略金法等。其中积分方程近似解法与对流换热边界层积分方程解法是完全类似的。

1.2 基本要求

1. 掌握各向同性介质中导热的基本定律——傅里叶定律;理解各向异性介质中热流密度与温度分布间关系的表达式。

2. 掌握导热问题控制方程和单值性条件的建立方法。理解温度场对单值性条件的反馈以及导热反问题的处理方法。

3. 掌握线性导热问题的分类及各类问题适宜的解法。会选用

适当的方法求解直角坐标、圆柱坐标和球坐标系中的线性导热问题,可重点掌握分离变量法及格林函数法。理解导热问题的积分方程近似解法等近似分析方法。了解非线性问题的一些处理方法。

1.3 典型题精解

1.3.1 导热理论基础

1-1 试证明柱坐标 (r, φ, z) 中的 ∇T 与 $\nabla \cdot \mathbf{q}$ 如下式所示

$$\nabla T = \mathbf{u}_r \frac{\partial T}{\partial r} + \mathbf{u}_\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \mathbf{u}_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rq_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$$

证 柱坐标的拉梅系数(尺度系数)为

$$a_1 = 1, a_2 = r, a_3 = 1, a = a_1 a_2 a_3 = r$$

$$\nabla T = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T}{\partial u_1} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{a_2} \frac{\partial T}{\partial u_2} \mathbf{u}_2 + \frac{1}{a_3} \frac{\partial T}{\partial u_3} \mathbf{u}_3$$

$$= \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

$$(u_1 = r, u_2 = \varphi, u_3 = z)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{a}{a_1} q_1 \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{a}{a_2} q_2 \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{a}{a_3} q_3 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rq_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(q_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(rq_z) \right]$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rq_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial q_z}{\partial z} + 0 \right)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rq_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$$

$$(\mathbf{q} = q_1 \mathbf{u}_r + q_2 \mathbf{u}_\varphi + q_3 \mathbf{u}_z)$$

证毕。

1-2 椭球坐标系 (η, θ, φ) 由 $\eta = \text{常数}$ 的椭球面, $\theta = \text{常数}$ 的双曲线面及 $\varphi = \text{常数}$ 的平面组成。当 $\eta \rightarrow 0$ 时,椭球面就变成 z

轴上长度为 $2A$ 的直线;当 $\eta \rightarrow \infty$ 时,椭球面近似为圆。对于 $\theta = 0$,双曲线面退化成由 A 到 $+\infty$ 的 z 轴;对于 $\theta = \pi$,双曲线面退化到由 $-A$ 到 $-\infty$ 的 z 轴;对于 $\theta = \frac{\pi}{2}$,双曲线为 xy 平面。如果椭球坐标 (η, θ, φ) 与矩形坐标的关系为

$$x = A \sinh \eta \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = A \sinh \eta \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = A \cosh \eta \cos \theta$$

试证明尺度系数为

$$a_1 = a_\eta = A(\sin^2 \theta + \sinh^2 \eta)^{1/2}$$

$$a_2 = a_\theta = A(\sin^2 \theta + \sinh^2 \eta)^{1/2}$$

$$a_3 = a_\varphi = A \sinh \eta \sin \theta$$

证 已知
$$\begin{cases} x = X(\eta, \theta, \varphi) = A \sinh \eta \sin \theta \cos \varphi \\ y = Y(\eta, \theta, \varphi) = A \sinh \eta \sin \theta \sin \varphi \\ z = Z(\eta, \theta, \varphi) = A \cosh \eta \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1 = a_\eta &= \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)^2} \\ &= A \sqrt{(\sin \theta \cos \varphi \cosh \eta)^2 + (\sin \theta \sin \varphi \cosh \eta)^2 + (\cos \theta \sinh \eta)^2} \\ &= A [(\sin \theta \cosh \eta)^2 + (\cos \theta \sinh \eta)^2]^{1/2} \\ &= A [(\sin \theta \cosh \eta)^2 - (\sin \theta \sinh \eta)^2 + (\sin \theta \sinh \eta)^2 \\ &\quad + (\cos \theta \sinh \eta)^2]^{1/2} \\ &= A(\sin^2 \theta + \sinh^2 \eta)^{1/2} \end{aligned}$$

推导中用到 $(\cosh \eta)^2 - (\sinh \eta)^2 = 1$.

$$\begin{aligned} a_2 = a_\theta &= \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta}\right)^2} \\ &= A [(\sinh \eta \cos \varphi \cos \theta)^2 + (\sinh \eta \sin \varphi \cos \theta)^2 \\ &\quad + (\cosh \eta (-\sin \theta))^2]^{1/2} \\ &= A [(\sinh \eta \cos \theta)^2 + (\cosh \eta \sin \theta)^2]^{1/2} \\ &= A(\sin^2 \theta + \sinh^2 \eta)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 = a_\varphi &= \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)^2} \\
 &= A[(\sinh \eta \sin \theta (-\sin \varphi))^2 + (\sinh \eta \sin \theta \cos \varphi)^2 + 0]^{1/2} \\
 &= A[(\sinh \eta \sin \theta)^2]^{1/2} \\
 &= A \sinh \eta \sin \theta
 \end{aligned}$$

证毕。

1-3 试写出以下热传导问题的数学描述：

1. 一块平板, $0 \leq x \leq L$, 初始温度为 $F(x)$ 。当时间 $t > 0$ 时, $x = 0$ 处始终绝热, $x = L$ 处以对流方式与温度为零的介质换热。

2. 一半无限大物体, $0 \leq x < \infty$, 初始温度为 $F(x)$ 。当时间 $t > 0$ 时, 物体内部产生速率为常数 g_0 W/m³ 的热量, 而 $x = 0$ 处始终为零度。

3. 一实心圆柱体, $0 \leq r \leq b$, 初始温度为 $F(r)$ 。当时间 $t > 0$ 时, 物体内部产生速率为 $g(r)$ W/m³ 的热量, 而 $r = b$ 处以对流方式与温度为零的介质换热。

4. 一实心球, $0 \leq r \leq b$, 初始温度为 $F(r)$ 。当时间 $t > 0$ 时, 物体内部产生速率为 $g(r)$ W/m³ 的热量, 而 $r = b$ 处始终保持均匀温度 T_0 。

解

$$1. \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < L, t > 0$$

$$T(x, 0) = F(x) \quad 0 \leq x \leq L, t = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad x = 0, t > 0$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = hT \quad x = L, t > 0$$

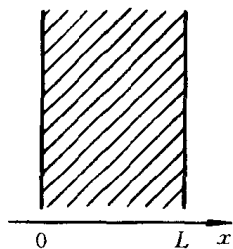


图 1-1

几何条件及坐标系参见图 1-1。

$$2. \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < \infty, t > 0$$

$$T(x, 0) = F(x) \quad 0 \leq x < \infty, t = 0$$

$$T(0, t) = 0 \quad x = 0, t > 0$$

几何条件及坐标系参见图 1-2。

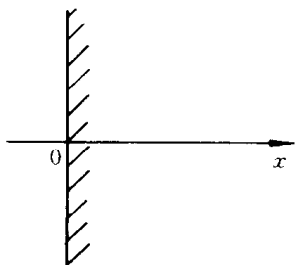


图 1-2

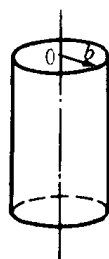


图 1-3

$$3. \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{g(r)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < r < b, t > 0$$

$$T(r, 0) = F(r) \quad 0 \leq r \leq b, t = 0$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = hT \quad r = b, t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0, t > 0 \quad (\text{对称条件})$$

几何条件及坐标系参见图 1-3。

$$4. \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{g(r)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < r < b, t > 0$$

$$T(r, 0) = F(r) \quad 0 \leq r \leq b, t = 0$$

$$T(b, t) = T_0 \quad r = b, t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0, t > 0 \quad (\text{对称条件})$$

几何条件及坐标系参见图 1-4。

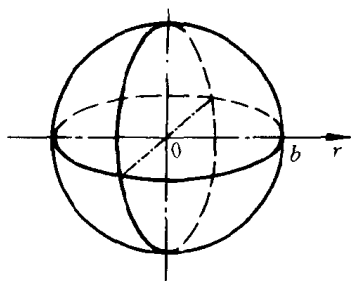


图 1-4

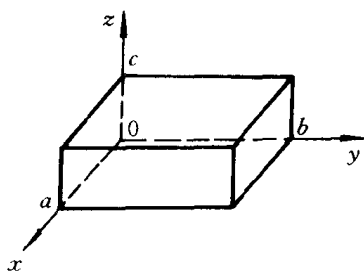


图 1-5

1.3.2 直角坐标系中的分离变量法

1-4 一长方体, $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$, 初始温度均匀为 T_0 , 时间 $t > 0$ 时, 在 $x = 0, y = 0, z = 0$ 的边界处绝热, 在 $x = a, y = b, z = c$ 的边界处温度维持零度。试用乘积解的方法求区域内温度分布 $T(x, y, z, t)$ 的表达式。

解 本问题的数学描述为(参见图 1-5)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} & 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c \\ T(x, y, z, 0) = T_0 & t = 0 \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \\ T(a, y, z) = 0, T(x, b, z) = 0, T(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

这是一个三维不稳态热传导齐次问题, 其初始温度分布可表示为单个空间变量函数乘积的形式, 即

$$T(x, y, z, 0) = T_1(x, 0)T_2(y, 0)T_3(z, 0) = T_0 \cdot 1 \cdot 1$$

因此, 其解为 3 个一维问题解的乘积

$$T(x, y, z, t) = T_1(x, t)T_2(y, t)T_3(z, t) \quad (1-1)$$

这 3 个一维问题分别是

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_1}{\partial t} & 0 < x < a \\
T_1(x, 0) &= T_0 & t = 0 \\
\left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, T_1(x, t) \Big|_{x=a} = 0
\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_2}{\partial t} & 0 < y < b \\
T_2(y, 0) &= 1 & t = 0 \\
\left. \frac{\partial T_2}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0, T_2(y, t) \Big|_{y=b} = 0
\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_3}{\partial t} & 0 < z < c \\
T_3(z, 0) &= 1 & t = 0 \\
\left. \frac{\partial T_3}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0, T_3(z, t) \Big|_{z=c} = 0
\end{aligned} \right\}$$

下面分别求解 T_1, T_2, T_3 。用分离变量法求解, 这时 T_1 的解可表示为(文献[1]中式(2-36))

$$T_1(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha \beta_m^2 t} \frac{1}{N(\beta_m)} X(\beta_m, x) \int_0^a X(\beta_m, x') F_1(x') dx' \quad (1-2)$$

式中, $F_1(x') = T_1(x, 0) = T_0$, 特征函数 $X(\beta_m, x)$, 范数 $N(\beta_m)$ 及特征值 β_m 可由文献[1]中表 2-2 查得:

$$X(\beta_m, x) = \cos \beta_m x, \frac{1}{N(\beta_m)} = \frac{2}{a}, \beta_m \text{ 是方程 } \cos \beta_m a = 0 \text{ 的根,}$$

因此 $\beta_m a = (m-1)\pi + \frac{\pi}{2}, m = 1, 2, \dots$

$$\beta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2a},$$

将以上结果代入式(1-2), 得

$$T_1(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha \left[\frac{(2m-1)\pi}{2a} \right]^2 t} \cdot \frac{2}{a} \cos \left[\frac{(2m-1)\pi}{2a} x \right]$$

$$\int_0^a \cos\left[\frac{(2m-1)\pi}{2a}x'\right] T_0 dx'$$

$$\text{其中 } \int_0^a \cos\left[\frac{(2m-1)\pi}{2a}x'\right] dx' = \frac{2a}{(2m-1)\pi} \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^{m-1}2a}{(2m-1)\pi}$$

$$\text{于是 } T_1(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2T_0 \cdot (-1)^{m-1}}{m\pi - \frac{\pi}{2}} \cos\left[\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{x}{a}\right] e^{-(m\pi - \frac{\pi}{2})^2 \frac{at}{a^2}}$$

同理可得

$$T_2(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{n\pi - \frac{\pi}{2}} \cos\left[\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{y}{b}\right] e^{-(n\pi - \frac{\pi}{2})^2 \frac{at}{b^2}}$$

$$T_3(z, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{p-1}}{p\pi - \frac{\pi}{2}} \cos\left[\left(p\pi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{z}{c}\right] e^{-(p\pi - \frac{\pi}{2})^2 \frac{at}{c^2}}$$

将 T_1, T_2, T_3 的表达式代入式(1-1) 就得到原问题的解为

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2T_0 \cdot (-1)^{m-1}}{m\pi - \frac{\pi}{2}} \cos\left[\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{x}{a}\right] e^{-(m\pi - \frac{\pi}{2})^2 \frac{at}{a^2}} \\ &\quad \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{n\pi - \frac{\pi}{2}} \cos\left[\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{y}{b}\right] e^{-(n\pi - \frac{\pi}{2})^2 \frac{at}{b^2}} \\ &\quad \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{p-1}}{p\pi - \frac{\pi}{2}} \cos\left[\left(p\pi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{z}{c}\right] e^{-(p\pi - \frac{\pi}{2})^2 \frac{at}{c^2}} \\ &= 8T_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{(m-1)+(n-1)+(p-1)} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right)\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\left(p\pi - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &\quad \cdot e^{-a\left[\left(\frac{m\pi - \frac{\pi}{2}}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi - \frac{\pi}{2}}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi - \frac{\pi}{2}}{c}\right)^2\right]t} \\ &\quad \cdot \cos\left[\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{x}{a}\right] \cos\left[\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{y}{b}\right] \end{aligned}$$

$$\cdot \cos\left[\left(p\pi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{z}{c}\right] \quad (1-3)$$

1-5 试求矩形区域($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$)内稳态温度分布的表达式。区域内含有恒定的发热源 $g(x, y) = g_0 = \text{常数}$, 并具有如下边界条件: $x = 0$ 与 $y = 0$ 处维持绝热, 而 $x = a$, $y = b$ 处维持温度为零度。

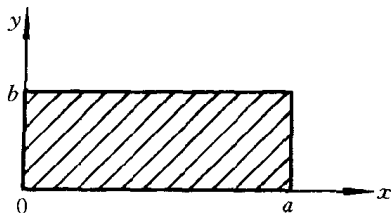


图 1-6

解 问题的数学描述为
(参见图 1-6)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{g_0}{k} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \\ T(a, y) &= 0, T(x, b) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

这是含常数热源的多维稳态热传导问题, 其边界条件是齐次的。令

$$T(x, y) = \theta(x, y) + p(x, y) + A,$$

其中 $\theta(x, y)$ 为齐次(不含热源)方程的解, $p(x, y)$ 是原问题的一个特解, A 是为了使齐次方程的边界条件只有一个是非齐次的而引入的常数, 其确定方法由下面可以看出; $p(x, y)$ 由文献[1]中表 2-4 查得为

$$p(x, y) = -\frac{g_0 x^2}{2k},$$

于是

$$T(x, y) = \theta(x, y) - \frac{g_0 x^2}{2k} + A \quad (1-5)$$

将式(1-5)代入式(1-4), 得