线性代数
学习指导与例题分析

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO YU LITI FENXI

牛少彰 刘吉佑 编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

线性代数学习指导与例题分析

牛少彰　刘吉佑　编

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书是“线性代数”课程的学习辅导书，内容包括：行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型等。全书按章节编排，按知识点分类，知识点出现的次序与教材一致，每个知识点均有内容提要、例题的分析和解答、练习题及练习题的详尽解答，每章的后面还有综合练习题和解题提示。本书例题和练习丰富，所选题型基本而新颖，包括近年来研究生入学考试中线性代数的部分典型试题，题目广泛而不重复。通过例题讲解，练习题解答和综合练习题的解题提示，使得解题训练循序渐进，在很大程度上充实和提高了课堂教学的内容。本书可作为“线性代数”课程的同步学习、复习和考研的教学参考书和辅导书，也可作为教师的习题课教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与例题分析/牛少彰，刘吉佑编．—北京：北京邮电大学出版社，2003

ISBN 7-5635-0749-3

Ⅰ.线…　Ⅱ.①牛…②刘…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 077266 号

出 版 者：北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)
邮　编：100876　发行部电话：(010)62282185　62283578(传真)
电子信箱：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京通州皇家印刷厂
开　　本：850 mm×1168 mm　1/32
印　　张：10.75
字　　数：280 千字
印　　数：1—6 000 册
版　　次：2003 年 9 月第 1 版　2003 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0749-3/O·57　　定价：16.00 元

·如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系·

前　　言

线性代数是理工科学生的一门重要的基础课，它主要讨论有限维空间的线性理论，具有较强的抽象性和逻辑性. 随着计算机的日益普及，线性代数在理论和应用上的重要性越来越突出，从而对线性代数课程的内容从深度和广度上都相应地提出了更高的要求. 但是由于线性代数的一些内容比较抽象，以及线性代数的授课时数少，教材编写简练例题较少，使得学生学习时普遍感到困难，为此，根据多年的教学实践，我们编写了这本学习辅导书，内容包括：行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型.

全书按章节编排，按知识点分类，知识点出现的次序与教材一致，每个知识点均有内容提要、例题的分析和解答、练习题及练习题的详尽解答，每章的后面还有复习题和解题提示，复习题是对这一章所学内容的综合练习. 每个知识点中出现的例题与练习题所涉及的知识均不超出本知识点及本知识点前面的内容，每章后面的复习题目侧重于本章各知识点的内容的综合掌握，所用知识不超过本章及本章以前各章的内容，便于读者与教材配套使用，进行同步训练，加强对所学概念和定理的理解.

本书例题和练习题丰富，所选题型基本而新颖，包括近年来研究生考试中线性代数的部分典型试题，题目广泛而不重复. 通过例题讲解，练习题解答和综合练习题的解题提示，使得解题训练循序渐进，在很大程度上充实和提高了课堂教学的内容.

在本书的编写过程中，得到了理学院数学部许多老师的帮助，

赵启松、闵祥伟和罗守山审阅了部分稿件，与数学部老师丁金扣、黄 铮、郭玉翠、史 悦、莫 娇、温巧燕、李叶舟、章卫平、刘宝生、吴波、贺祖国等的教学研讨使编者获益非浅，并丰富了本书的内容，特此表示感谢.

本书作为我校承担的教育部21世纪初高等教育“理工融合”教学改革项目的子课题研究内容的一部分，得到了北京邮电大学教学改革项目《理工融合培养模式中数学系列课程教学内容和课程体系改革方案及其实践》的大力支持，在此表示衷心感谢.

限于编者水平，书中难免有疏漏和错误之处，恳请读者批评指正.

编者

2003年8月

目　　录

第一章　行列式

本章主要介绍行列式的定义、性质与计算．要求掌握 n 阶行列式的定义、性质和展开定理，会用行列式的性质和展开定理计算行列式，会用 Cramer 法则求解线性方程组．

第一节　n 阶行列式的定义

一、内容提要

1．全排列及其逆序数

自然数 $1,2,\cdots,n$ 按一定次序排成一排，称为一个 **n 元排列**，n 元排列共有 $n!$ 个．

在一个排列中，任何一对数（无论是相邻的或者不相邻的），如果大数排在小数之前，就称这对数构成一个**逆序**，一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**．

n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$．

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列．

将一个排列中的某两个数的位置互换，而其余的数不动，就称对此排列作一次对换．

对换改变排列的奇偶性．

2．n 阶行列式的定义

n 阶行列式定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

这里$\sum$表示对所有 n 元排列求和，上式右端称为 **n 阶行列式的展开式**.

n 阶行列式的每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 的代数和，这里 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 元排列，由于 n 元排列共有 $n!$ 个，所以行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

二、例题分析

求一个 n 元排列的逆序数，只需对这个排列的 n 个数从左到右顺序地计算每个数与它前面的数有多少个逆序，然后把它们加起来就是这个排列的逆序数.

【例 1】 求排列 $1\ 3\ 5 \cdots (2n-1)\ (2n)\ (2n-2) \cdots 4\ 2$ 的逆序数，并确定它的奇偶性.

【解】 在这个排列中，前 $n+1$ 个数 $1,3,5,\cdots,2n-1,2n$ 中的每一个数与它前面的数都没有逆序. 第 $n+2$ 个数 $2n-2$ 的前面有 2 个数 $2n-1,2n$ 比它大，组成 2 个逆序，第 $n+3$ 个数 $2n-4$ 的前面有 4 个数 $2n-3,2n-1,2n$ 和 $2n-2$ 比它大，组成 4 个逆序，依次类推，得

$$\begin{aligned} & \tau[1\ 3\ 5 \cdots (2n-1)\ (2n)\ (2n-2) \cdots 4\ 2] \\ &= 0+\cdots+0+2+4+\cdots+(2n-4)+(2n-2) \\ &= 2[1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)] \\ &= n(n-1) \end{aligned}$$

由于 n 和 $(n-1)$ 中一定有一个数为偶数，从而 $n(n-1)$ 为偶数，这个排列为偶排列.

【例 2】 选择 i 与 k，使 9 元排列 $1\ i\ 2\ 5\ k\ 4\ 8\ 9\ 7$ 为偶排列.

【解】 由于这个 9 元排列中缺少 3 和 6，因此 i 和 k 只可能取 3 和 6 这两个数，因此有两种可能性：$i=3, k=6$ 或 $i=6, k=3$. 先取 $i=3, k=6$，计算排列 $1\ 3\ 2\ 5\ 6\ 4\ 8\ 9\ 7$ 的逆序数，由于

$$\tau(1\ 3\ 2\ 5\ 6\ 4\ 8\ 9\ 7)=0+0+1+0+0+2+0+0+2=5$$

该排列是奇排列，由于对换改变排列的奇偶性，因此，当 $i=6$，$k=3$ 时，排列 $1\ 6\ 2\ 5\ 3\ 4\ 8\ 9\ 7$ 为偶排列.

由 n 阶行列式的定义，我们知道：行列式的展开式中共有 $n!$ 项；每一项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；在计算每一项所带的正负号时，应把这 n 个元素的行标排成自然排列，即 $a_{1p_1}\ a_{2p_2}\cdots\ a_{np_n}$. 计算列标排列 $p_1\ p_2\cdots\ p_n$ 的逆序数，当 $p_1\ p_2\cdots\ p_n$ 为偶排列时，该项带正号，当 $p_1\ p_2\cdots\ p_n$ 为奇排列时，该项带负号.

【例 3】 选择 k 与 l，使

$$a_{26}\ a_{5k}\ a_{33}\ a_{4l}\ a_{64}\ a_{12}$$

在 6 阶行列式中带有负号.

【解】 将行标排成自然排列，由于

$$a_{26}\ a_{5k}\ a_{33}\ a_{4l}\ a_{64}\ a_{12}=a_{12}\ a_{26}\ a_{33}\ a_{4l}\ a_{5k}\ a_{64}$$

要使其带有负号，则列标排列 $2\ 6\ 3\ l\ k\ 4$ 为奇排列. 由于 k 和 l 的选择只能是 $k=1, l=5$ 或 $k=5, l=1$. 当 $k=1, l=5$ 时，

$$\tau(2\ 6\ 3\ 5\ 1\ 4)=1+1+4+2=8$$

所以排列 $2\ 6\ 3\ 1\ 5\ 4$ 为奇排列，应取 $k=5, l=1$.

【例 4】 写出 5 阶行列式中含有因子 $a_{14}a_{23}$ 并且带有负号的项.

【解】 由于 5 阶行列式中每一项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4p_5)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$$

要使其含有因子 $a_{14}a_{23}$，则 p_1,p_2 已经固定，$p_1=4,p_2=3$，从而列标排列 $4\ 3\ p_3\ p_4\ p_5$ 只有 $3!=6$ 种取法，它们是

$$4\,3\,1\,2\,5,4\,3\,1\,5\,2,4\,3\,2\,1\,5,4\,3\,2\,5\,1,4\,3\,5\,1\,2,4\,3\,5\,2\,1.$$

计算它们的逆序数，可知 4 3 1 2 5，4 3 2 5 1，4 3 5 1 2 为奇排列。因此 5 阶行列式中含有因子 $a_{14}a_{23}$ 并且带有负号的项为

$$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55},\ -a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51},\ -a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}.$$

【例 5】 利用行列式定义计算下面的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

【解】 在 D 中只有 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个元素可能不为零，而它们恰好位于不同行不同列，所以 D 中可能不为零的项只能是这 n 个元素的乘积，即 $a_1a_2\cdots a_{n-2}a_{n-1}a_n$.

由于 a_1 位于第 1 行第 $n-1$ 列，a_2 位于第 2 行第 $n-2$ 列，$\cdots$，a_{n-2} 位于第 $n-2$ 行第 2 列，a_{n-1} 位于第 $n-1$ 行第 1 列，a_n 位于第 n 行第 n 列，所以 $a_1a_2\cdots a_n$ 的行标排列为自然排列，列标排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n$，

$$\begin{aligned}\tau[(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n]&=0+1+\cdots+(n-3)+(n-2)+0\\&=\frac{(n-1)(n-2)}{2}\end{aligned}$$

而行列式的其余各项中都至少有一个元素为零，所以其余各项均为零，故

$$D=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$$

【例 6】 用行列式定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & x-2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & x & 0 \\ 5 & 3 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

展开式中 x^4 与 x^3 项的系数.

【解】 若先将行列式展开再求系数,则很繁琐,所以不妨按定义直接考虑,由于行列式中每一项都是由不同行不同列元素乘积组成,因而所给行列式的展开式中 x^4 与 x^3 项只能在对角线上的4个元素相乘这一项中出现.由于

$$(x-1)(x-2)x(x-1)=x^4-4x^3+\cdots$$

故 x^4 的系数为1,x^3 的系数为 -4.

三、练习题

1. 求排列 $(2k)\ 1\ (2k-1)\ 2\ \cdots\ (k+1)\ k$ 的逆序数.

2. 选择 i 与 k,使9元排列 $1\ 2\ 7\ 4\ i\ 5\ 6\ k\ 9$ 为偶排列.

3. 选择 k 与 l,使 $a_{47}a_{53}a_{1k}a_{65}a_{7l}a_{24}a_{31}$ 在7阶行列式中带有负号.

4. 下列各项中,哪一项是5阶行列式的展开式中的项?

(1) $a_{42}a_{53}a_{34}a_{12}a_{25}$;

(2) $a_{12}a_{41}a_{35}a_{53}a_{24}$;

(3) $-a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}$.

5. 利用行列式定义计算下面的 n 阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

6. 确定下列 16 个元素皆不相同的 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 8 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & 7 & -7 & 2 \end{vmatrix}$$

中 $8\cdot(-5)\cdot(-2)\cdot 6$ 一项前面应带有什么符号?

7. 用行列式定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

展开式中 x^4 与 x^3 项的系数.

8. 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = 0.$$

四、练习题解答

1. $\tau[(2k)1(2k-1)2(2k-2)\cdots(k-1)(k+1)k]$

$$= 0+1+1+2+2+\cdots+(k-1)+(k-1)+k$$

$$= 2\cdot\frac{(k-1)k}{2}+k = k^2.$$

2. i 和 k 只能取 3 和 8 这两个数,当 $i=3,k=8$ 时,由于

$$\tau(1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9) = 0+0+0+1+2+1+1=5$$

因此应取 $i=8,k=3$.

3. 由于

$$a_{47}\,a_{53}\,a_{1k}\,a_{65}\,a_{7l}\,a_{24}\,a_{31}=a_{1k}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{47}\,a_{53}\,a_{65}\,a_{7l}$$

列标排列为 $k\ 4\ 1\ 7\ 3\ 5\ l$,当 $k=6,l=2$ 时为奇排列,因此应取 $k=6,l=2$.

4. (1) 因为 a_{42},a_{12}都是取自第 2 列,所以该项不是 5 阶行列式的展开式中的项.

(2) 虽然该项的 5 个元素取自不同行不同列,但由于

$$a_{12}\,a_{41}\,a_{35}\,a_{53}\,a_{24}=a_{12}\,a_{24}\,a_{35}\,a_{41}\,a_{53}$$

列标排列的逆序数 $\tau(2\ 4\ 5\ 1\ 3)=5$,因此应带负号,所以此项不是 5 阶行列式的展开式中的项.

(3) 该项的 5 个元素取自不同行不同列,又

$$a_{52}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{15}\,a_{43}=a_{15}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{43}\,a_{52}$$

且 $\tau(5\ 1\ 4\ 3\ 2)=7$,该项应带负号,所以此项是 5 阶行列式的展开式中的项.

5. $D=(-1)^{\tau(2\,3\,\cdots\,n\,1)}n!\ =(-1)^{n-1}n!$

6. 将 $8\cdot(-5)\cdot(-2)\cdot6$ 写成 $8\cdot6\cdot(-2)\cdot(-5)$,则行标排列为自然排列,列标排列 3 4 2 1 为奇排列,所以该项前应带有负号.

7. 含 x^4 的项为$(-1)^{\tau(1\,2\,3\,4)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=10x^4$,

含 x^3 的项为$(-1)^{\tau(2\,1\,3\,4)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-2x^3$

和$(-1)^{\tau(4\,2\,3\,1)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3x^3$.

因此 x^4 的系数为 10,x^3 的系数为$(-2)+(-3)=-5$.

8. 由于

$$a_{3p_3}=0\quad(p_3=1,2,3);$$

$$a_{4p_4}=0\quad(p_4=1,2,3);$$

$$a_{5p_5}=0\quad(p_5=1,2,3).$$

而 5 阶行列式的一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4p_5)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$$

只要 p_3,p_4,p_5 中有一个取到 1,2 或 3,对应项便为 0,又 p_3,p_4,p_5 应取 1,2,3,4,5 中互不相同的三个数,故其中必有 1,2 或 3,因此行列式的展开式中每一项都为 0,故该行列式等于零.

第二节　行列式的性质、展开定理和计算

一、内容提要

1. 行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 2　对换行列式的任意两行(列),行列式变号.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘此行列式. 或者说,行列式中某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4　行列式中如果有两行(列)对应元素成比例,则此行列式等于零.

性质 5　如果行列式的某一行(列)元素都是两个数之和,则此行列式可表示为两个行列式之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 将行列式的某一行(列)乘以同一数后加到另一行(列)对应元素上去,行列式的值不变.

2. 行列式按一行(列)展开

(1) 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

(2) 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

3. 一些特殊的行列式

(1) 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i - a_j).$$

二、例题分析

行列式的计算是第一章的重点，计算行列式的方法很多，除了前面已经介绍的用行列式的定义直接计算外，主要是用行列式的性质和展开定理进行计算，常用的方法有以下几种：

1. 利用行列式性质化行列式为三角形行列式

【例 1】 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$$

解法一 计算等号左边的行列式，将第 1 列乘 -1 后加到以后各列，则有