高等学校数学系列教材

工程数学

复变函数

主编 孙广毅

哈尔滨工程大学出版社

工程数学

复变函数

主编　孙广毅
主审　罗跃生

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学 复变函数/孙广毅主编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2003
ISBN 7-81073-485-7

Ⅰ.工… Ⅱ.孙… Ⅲ.复变函数-高等学校-教材 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 055276 号

内 容 简 介

本书根据《复变函数课程教学基本要求》编写,全书共八章,包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数表示、留数定理及其应用、保形映射、傅立叶变换、拉普拉斯变换。每章末有小结,帮助学生掌握要点,书后附有习题答案,供学生参考。书中带“*”号内容,可供各专业选用。

本书可作为工科院校各专业的教材,也可供有关科技人员参考。

哈 尔 滨 工 程 大 学 出 版 社 出 版 发 行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)82519328 邮编:150001
新 华 书 店 经 销
黑 龙 江 省 教 育 厅 印 刷 厂 印 刷
*
开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 8 字数 201 千字
2003 年 7 月第 1 版 2003 年 7 月第 1 次印刷
印数:1—3 500 册
定价:13.50 元

前　言

复变函数是数学的一个古老且重要的分支，在自然科学和工程技术中都有广泛的应用。本书根据《复变函数课程教学基本要求》编写。针对现在学生授课时间少的特点，在叙述时，力求由浅入深，通俗易懂，并配有大量例题，每章后附有小结，对本章内容进行简略概括总结，这些都有助于学生课后自学，并可起到帮助学生深入理解，牢固掌握的作用。

参加本书编写的有贾念念、于飞、樊赵兵、李斌、孙广毅，全书由孙广毅主编并统稿，由罗跃生主审。

目　　录

第一章　复数与复变函数 …………………………………… 1

第一节　复数及其运算 ………………………………… 1

第二节　复数的几何表示 ……………………………… 4

第三节　复数的乘幂与方根 …………………………… 9

第四节　复平面上的点集 ……………………………… 16

第五节　复变函数 ……………………………………… 21

第六节　复变函数的极限与连续性 …………………… 26

小结 ……………………………………………………… 30

习题 ……………………………………………………… 32

第二章　解析函数 ………………………………………… 37

第一节　复变函数的导数 ……………………………… 37

第二节　解析函数 ……………………………………… 47

第三节　初等函数 ……………………………………… 49

小结 ……………………………………………………… 57

习题 ……………………………………………………… 58

第三章　复变函数的积分 ………………………………… 60

第一节　复变函数的积分 ……………………………… 60

第二节　柯西积分定理 ………………………………… 65

第三节　不定积分 ……………………………………… 69

第四节　柯西积分公式 ………………………………… 72

第五节　调和函数 ……………………………………… 76

小结 ……………………………………………………… 79

习题 ……………………………………………………… 81

第四章　解析函数的级数表示 …………………………… 85

第一节　复数项级数 …………………………………………… 85
第二节　幂级数 ………………………………………………… 91
第三节　泰勒级数……………………………………………… 100
第四节　洛朗级数……………………………………………… 106
小结…………………………………………………………… 114
习题…………………………………………………………… 117
第五章　留数定理及其应用……………………………… 121
第一节　孤立奇点……………………………………………… 121
第二节　留数定理……………………………………………… 130
第三节　应用留数定理计算实积分…………………………… 138
第四节*　辐角原理 …………………………………………… 145
小结…………………………………………………………… 151
习题…………………………………………………………… 154
第六章　保形映射………………………………………… 157
第一节　复平面上的曲线及其简单性质……………………… 158
第二节　保形映射……………………………………………… 160
第三节　几个初等函数构成的映射…………………………… 164
第四节　分式线性映射………………………………………… 168
第五节　关于保形映射的例题………………………………… 177
第六节　几个特殊的保形映射和一般性定理………………… 186
第七节　保形映射的一个应用………………………………… 196
小结…………………………………………………………… 200
习题…………………………………………………………… 204
第七章*　傅立叶变换 …………………………………… 209
第一节　傅立叶变换…………………………………………… 209
第二节　傅立叶变换的性质…………………………………… 212
小结…………………………………………………………… 217
习题…………………………………………………………… 219
第八章*　拉普拉斯变换 ………………………………… 221

第一节　拉普拉斯变换…………………………………… 221
第二节　拉普拉斯变换的性质………………………… 223
第三节　拉普拉斯逆变换……………………………… 228
小结…………………………………………………………… 233
习题…………………………………………………………… 235
习题解答…………………………………………………… 237

第一章　复数与复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数.关于复数,在初等数学中已有讨论,本章将在原有基础上对复数的概念及运算作简要的复习与补充,并且引入复平面上的点集、区域、曲线以及复变函数的极限与连续等概念,为进一步研究解析函数奠定理论基础.

第一节　复数及其运算

一、复数的概念

形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 或 $z = x + y\mathrm{i}$ 的数称为复数.其中 x 和 y 是任意实数,i 满足 $\mathrm{i}^2 = -1$,称为虚数单位,实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部,记为

$$x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z)$$

虚部为零的复数就可以看作实数,即 $x + \mathrm{i}\cdot 0 = x$,因此全体实数是全体复数的一部分.虚部不为零的复数也称为虚数,而实部为零且虚部不为零的复数称为纯虚数,即 $0 + \mathrm{i}y = \mathrm{i}y$.特别地,当 $x = y = 0$ 时,规定 $z = 0 + \mathrm{i}\cdot 0 = 0$.

复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相等是指 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$,记作 $z_1 = z_2$.

读者须注意,和实数不同,一般来说两个复数不能比较大小.

二、复数的四则运算

由于实数是复数的特例,因此规定复数运算的一个基本要求

是:复数的运算法则施行于实数特例时,能够和实数的运算结果相符合,同时也要求复数运算能够满足实数运算的一般规律.

两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$,其四则运算定义如下:

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2) \end{aligned} \tag{1-1}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \tag{1-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0) \end{aligned} \tag{1-3}$$

依据以上定义,可证明复数的加(减)法、乘法满足交换律、结合律和分配律:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1z_2 = z_2z_1$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

三、复数的共轭运算

实部相同而虚部互为相反数的两个复数 $x + \mathrm{i}y$ 和 $x - \mathrm{i}y$ 称为共轭复数,与 z 共轭的复数记为 $\bar{z}$. 显然复数共轭的概念是相互的,即若 $\bar{z}_1 = z_2$,则有 $\bar{z}_2 = z_1$.

共轭复数有如下性质:

(1) $\bar{\bar{z}} = z$;

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(3) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z),\ z-\bar{z}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$;

(4) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$.

例 1　设 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$,求 $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z),z\bar{z}$.

解
$$z=\frac{\mathrm{i}^2+(1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}=\frac{-1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$
$$=\frac{(-1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-3-\mathrm{i}}{2}$$

故
$$\mathrm{Re}(z)=-\frac{3}{2}$$
$$\mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2}$$
$$z\bar{z}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

例 2　设 $z_1=4+3\mathrm{i},z_2=4-3\mathrm{i}$,求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 和 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解　$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4+3\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}=\frac{(4+3\mathrm{i})^2}{(4-3\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}=\frac{7}{25}+\frac{24}{25}\mathrm{i}$$

故
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{7}{25}-\frac{24}{25}\mathrm{i}$$

例 3　设 z_1,z_2 为两个任意复数,证明
$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

证明
$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1\bar{\bar{z}}_2$$
$$=z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

第二节　复数的几何表示

一、复平面及复数的表示法

1. 复数的点表示法

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 由一对有序实数 (x, y) 惟一确定，而有序实数 (x, y) 又与平面直角坐标系中的点 $P(x, y)$ 一一对应，从而复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可由平面直角坐标系中坐标为 (x, y) 的点来表示，我们将这个直角坐标平面称为复平面或 z 平面，x 轴称为实轴，y 轴（除去原点后）称为虚轴. 于是复数与复平面上的点一一对应. 今后把“点 z”和“复数 z”作为同义语而不加区别.

2. 复数的向量表示法

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与复平面上的点 $P(x, y)$ 一一对应，同时，与从原点指向点 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 一一对应，因此复数 z 也可用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示（图 1－1）. 今后把“复数 z”与其对应的“向量 z”也视为同义语. 这使得我们在处理和复数有关的问题时，具有直观性强、方法灵活等特点.

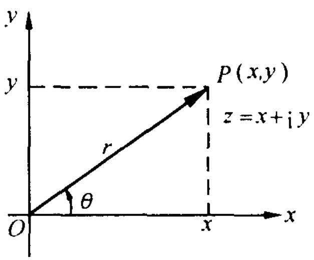

图 1－1

3. 复数的三角表示式和指数表示式

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示时，向量的长度 r 叫做复数 z 的模或绝对值，记为

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1-4}$$

显然有如下各式成立：

$$|x| \leqslant |z|, |y| \leqslant |z|, z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

当 $z\neq 0$ 时,实轴正向转到与向量$\overrightarrow{OP}$方向一致时所成的角度 θ 叫做复数 z 的辐角,记为

$$\mathrm{Arg}z = \theta$$

其满足

$$\tan(\mathrm{Arg}z) = \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{1-5}$$

显然任一非零复数 z 有无穷多个辐角,其中我们把复数 z 的满足条件 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值,或 z 的主辐角,记为 $\theta_0 = \arg z$. 于是

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1-6}$$

当 $z = 0$ 时, $|z| = 0$,而辐角不确定.

当 $z\neq 0$ 时,辐角主值 $\arg z$ 可以由反正切 $\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\frac{y}{x}$ 按如下关系来确定:

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z} = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & (x>0); \\ \dfrac{\pi}{2}, & (x=0, y>0); \\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & (x<0, y\geqslant 0); \\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & (x<0, y<0); \\ -\dfrac{\pi}{2}, & (x=0, y<0). \end{cases} \tag{1-7}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.

由复数的直角坐标与极坐标的关系(图 1 - 1) 可知:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{1-8}$$

因此复数 z 还可表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1-9}$$

式(1 - 9)称为复数的三角表示式,如果再利用欧拉(Euler)公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1-10}$$

则复数 z 又可表示为

$$z = re^{i\theta} \tag{1-11}$$

式(1 - 11)称为复数的指数表示式.

例 1 求下列复数的模与辐角.

(1)3;(2) - i;(3) - 3 - 4i.

解 由 z 平面上的对应点的位置,可得

(1) $|3| = 3, \arg 3 = 0, \mathrm{Arg}3 = 2k\pi$.

(2) $|-i| = 1, \arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}, \mathrm{Arg}(-i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

(3) $|-3-4i| = 5, \arg(-3-4i) = \mathrm{argtan}\dfrac{4}{3} - \pi$,

$$\mathrm{Arg}(-3-4i) = \arctan\frac{4}{3} + (2k-1)\pi. \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

例 2 将下列复数化为三角表示式和指数表示式.

(1) $z = -1 + \sqrt{3}i$;(2) $z = \sin\dfrac{\pi}{10} + i\cos\dfrac{\pi}{10}$.

解 (1)

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\arg z = \arctan\frac{\sqrt{3}}{-1} + \pi = \frac{2}{3}\pi$$

因此

$$z = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 2e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

(2)

$$|z| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{\pi}{10}} = 1$$

又

$$\sin\frac{\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \cos\frac{2}{5}\pi$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\frac{2}{5}\pi$$

因此

$$z = \cos\frac{2}{5}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{5}\pi = \mathrm{e}^{\frac{2}{5}\pi\mathrm{i}}$$

4. 复数的三角不等式

由复数的向量表示法可知，复数的加法、减法法则与向量的加法、减法法则一致.

如图 1 - 2，以向量 $\overrightarrow{Oz_1}$、$\overrightarrow{Oz_2}$ 为邻边的平行四边形的两条对角

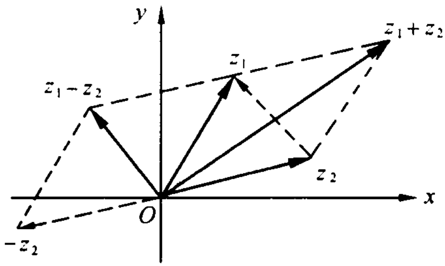

图 1 - 2

线分别表示向量 z_1 与 z_2 的和与差，其中 z_2 指向 z_1 的向量表示 $z_1 - z_2$，另一条对角线所对应的向量表示 $z_1 + z_2$，由三角形两边之和大于第三边以及两边之差小于第三边，分别得到三角不等式

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{1 - 12}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big| \tag{1 - 13}$$

另外，$|z_1 - z_2|$ 还表示复平面上点 z_1 和 z_2 之间的距离，即

$$\begin{aligned} d &= |z_1 - z_2| = |(x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 + \mathrm{i}y_2)| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

这正是平面上两点间的距离公式.

例 3 设 z_1 和 z_2 是两个复数，试证

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

并应用此等式证明三角不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

证明 $$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}$$
$$=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$
$$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2$$

由第一节例 3 可知

$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

故

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

又

$$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leqslant|z_1\bar{z}_2|=|z_1||z_2|$$

因此

$$|z_1+z_2|^2\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$
$$=(|z_1|+|z_2|)^2$$

即

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

二、无穷远点与复球面

前面我们建立了复数与复平面上的点的一一对应关系，下面我们借助地图制图学中的将地球投影到平面上的测地投影法，建立复平面与球面上的点的一一对应关系，从而引入无穷远点的概念.

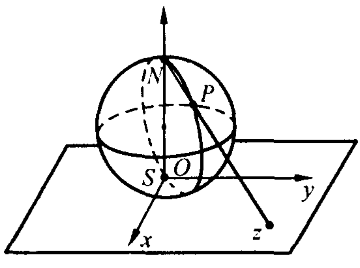

图 1－3

设 xOy 平面为复平面，取一个在原点 O 与复平面相切的球面，过原点作一条垂直于复平面的直线与球面交于

另一点 N,N 称为北极,原点 O 也记为点 S,S 称为南极(图 1-3).在复平面上任取一点 z,连接北极 N 与点 z 的直线必交于球面上惟一的一点 P.反之,在球面上任取一点 P(N 除外),连接 NP 并延长,必交于复平面上惟一的一点 z.这样就建立了复平面上所有点与球面上除 N 点之外的所有点的一一对应关系.

现在我们考虑北极 N 和复平面上的什么点相对应?由图 1-3 易知,当复平面上的点 z 无限地远离原点时,其对应的球面上的点 P 就无限地接近点 N.因此,北极 N 可看作是与复平面上的一个模为无穷大的假想点相对应的点,我们称这个假想的点为无穷远点,并记为 ∞.复平面加上无穷远点后称为扩充复平面,与它对应的整个球面,称为复球面.

值得注意的是,复平面上的无穷远点是一个点,它与微积分中的 ∞ 是不同的概念.无穷远点 ∞ 的实部、虚部与辐角都无意义,但规定它的模是正无穷大,即 $|\infty| = +\infty$.显然复平面上的每一条直线都过无穷远点.关于 ∞ 的四则运算有如下规定:

(1)$\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ 均无意义;

(2)$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty (a \neq \infty)$;

(3)$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$, $\frac{a}{0} = \infty$($a \neq 0$ 但可为 ∞);

(4)$\frac{\infty}{a} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0 (a \neq \infty)$.

第三节　复数的乘幂与方根

一、复数的乘积与商

由欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$,容易验证

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)},\quad \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{1-14}$$

因此,利用复数的指数形式作复数的乘除法较为简单.设

$$z_1=r_1e^{i\theta_1},\quad z_2=r_2e^{i\theta_2}$$

由式(1－14)可得

$$z_1z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\quad(z_2\neq 0)$$

即

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq 0) \tag{1-15}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2 \tag{1-16}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2 \tag{1-17}$$

上述公式说明,z_1z_2 所对应的向量是把 z_1 所对应的向量沿本身方向延长 $|z_2|$ 倍,再逆时针旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$ 后得到的(图 1－4).特别地,当 $|z_2|=1$ 时,z_1z_2 表示将 z_1 逆时针旋转角度 $\arg z_2$ 后得到的.例如,iz 所对应的向量就相当于将 z 所对应的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到的,而 $-iz$ 所对应的向量则相当于将 $\overrightarrow{Oz}$ 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到的.

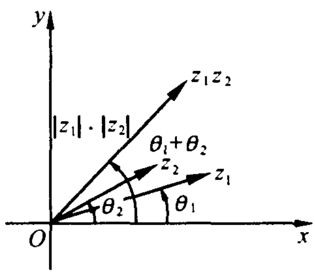

图 1－4

对于式(1－16)和式(1－17),读者要正确理解.由于辐角的多值性,等式的两端均表示由无穷多个数(角度)构成的数集,因此式(1－16)和式(1－17)应理解为等式两端可能取值的全体是