工程数学

线性代数

第四版

同济大学应用数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

工程数学

线性代数

第四版

同济大学应用数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书第四版仍由同济大学应用数学系骆承钦教授修订。这次修订保持第三版的编写体系，增加了一些解说性的文字，使论述更通俗易懂，还调整增加了部分例题和习题，其中有些选自研究生入学考试的试题。

全书内容分为：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、*线性空间与线性变换等六章，各章均配有一定数量的习题，书末附有习题答案。其中一至五章符合教育部颁发的工科本科线性代数课程教学基本要求，教学时数约 34 学时，第六章较多地带有理科的色彩，供对数学要求较高的专业选用。

本书可供高等院校工程类各专业使用，也可供自学者和科技工作者阅读。

特别提醒

本书扉页为防伪页，对光可看到有“高等教育出版社”字样及高等教育出版社社标，无上述标记或标记为伪造者均为盗版书，请广大读者注意识别和抵制！

图书在版编目（CIP）数据

工程数学．线性代数／同济大学应用数学系编．—4 版．—北京：高等教育出版社，2003.7

ISBN 7-04-011941-2

Ⅰ．工…　Ⅱ．同…　Ⅲ．①工程数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 030734 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	1981 年 11 月第 1 版
印　　张	11		2003 年 7 月第 4 版
字　　数	200 000	印　　次	2003 年 9 月第 2 次印刷
		定　　价	12.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

第四版前言

本书第三版自1999年出版以来，广大读者和使用本书的同行们对于它的编写体系，即先建立线性方程组理论、后讨论向量组的线性相关性的体系，都表示赞同，认为这样的编排有利于理解线性代数的抽象的知识，降低了学习本课程的难度。因此在这次修订时，我们保留了原来的体系，仅对其中几处作了次序的调整，以使叙述更加顺畅；在文字上也作了少许修改，并增加了一些解说性的段落，以使论述更加通俗易懂；此外还调整并增加了部分例题和习题，其中有些选自近年研究生入学考试的试题。

这次修订工作仍由同济大学骆承钦同志承担。

编　者

2003年2月

第一版前言

同济大学数学教研室主编的《高等数学》(1978年第1版)年前决定修订再版,其中的第十三章线性代数决定单独成书,以便应用。为此,由同济大学骆承钦同志把《高等数学》第十三章改编成本书。在改编时,对原教材作了较多的修改与补充,以期能较为符合1980年制订的教学大纲的要求。

本书介绍线性代数的一些基本知识,可作为高等工业院校工程数学"线性代数"课程的试用教材和教学参考书。本书前五章教学时数约34学时,第六章较多地带有理科的色彩,供对数学要求较高的专业选用。各章配有少量习题,书末附有习题答案。

参加本书审稿的有上海海运学院陆子芬教授(主审)、浙江大学盛骤、孙玉麟等同志。他们认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此我们表示衷心感谢。

编　者

1981年11月

第二版前言

本书第一版自1982年出版以来,我们采用它作为教材,已经经历了多次的教学实践。这次我们根据在实践中积累的一些经验、并吸取使用本书的同行们所提出的宝贵意见,将它的部分内容作了修改,成为第二版。

这次修订,对第三章和第四章改动稍大,第一、二、五章也有改动,并增加了少量习题。此外,对超出国家教委于1987年审定的高等工业学校“线性代数课程教学基本要求”的内容加了*号。这次修订工作仍由同济大学骆承钦同志承担。

北京印刷学院盛祥耀教授详细审阅了本修订稿,并提出了许多改进的意见,谨在此表示衷心的感谢。此外,我们还向关心本书和对本书第一版提出宝贵意见的同志们表示深切的谢意。

编　者

1990年12月

第三版前言

本书第二版自1991年出版以来，广大读者和使用本书的同行们对本书提出了许多修改意见，我们谨在此向关心本书和对本书提出宝贵意见的同志们表示衷心的感谢。

这次修订，在第一章增加了二阶与三阶行列式，以加强与中学教学内容的衔接；第二章增加了少量关于矩阵及其运算的实际背景的内容；第三、四两章作了彻底更换理论体系的修改。新的第三章先引进矩阵的初等变换和秩的概念，证明了初等变换不改变矩阵的秩，然后藉此建立线性方程组有惟一解和有无穷多解的充分必要条件，解决了线性方程组的求解问题。新的第四章讨论向量组的线性相关性，由于有了矩阵和线性方程组的理论，致使这一讨论大为简化，从而达到化难为易的目的。

这次修订工作仍由同济大学骆承钦同志承担。

天津大学齐植兰教授和北京理工大学史荣昌教授详细审阅了本修订稿，并提出了许多改进的意见，谨在此表示衷心的感谢。此外，还要感谢教育部高教司教材处和高等教育出版社对本书的关心和扶植。

编　者

1998年8月

目　录

第四版前言 …… i

第一版前言 …… ii

第二版前言 …… iii

第三版前言 …… iv

第一章　行列式 …… 1

§1　二阶与三阶行列式 …… 1

§2　全排列及其逆序数 …… 4

§3　n 阶行列式的定义 …… 5

§4　对换 …… 8

§5　行列式的性质 …… 9

§6　行列式按行(列)展开 …… 16

§7　克拉默法则 …… 22

习题一 …… 26

第二章　矩阵及其运算 …… 29

§1　矩阵 …… 29

§2　矩阵的运算 …… 33

§3　逆矩阵 …… 42

§4　矩阵分块法 …… 46

习题二 …… 53

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组 …… 57

§1　矩阵的初等变换 …… 57

§2　初等矩阵 …… 62

§3　矩阵的秩 …… 66

§4　线性方程组的解 …… 71

习题三 …… 79

第四章　向量组的线性相关性 …… 82

§1　向量组及其线性组合 …… 82

§2　向量组的线性相关性 …… 87

§3　向量组的秩 …… 91

§4　线性方程组的解的结构 …… 95

§5　向量空间 …… 104

习题四 …………………………………………………………………………… 108
第五章 相似矩阵及二次型 ……………………………………………… 113
§1 向量的内积、长度及正交性 …………………………………………… 113
§2 方阵的特征值与特征向量………………………………………………… 119
§3 相似矩阵…………………………………………………………………… 123
§4 对称矩阵的对角化………………………………………………………… 126
§5 二次型及其标准形………………………………………………………… 129
§6 用配方法化二次型成标准形……………………………………………… 134
§7 正定二次型………………………………………………………………… 136
习题五 …………………………………………………………………………… 137
***第六章 线性空间与线性变换** ………………………………………… 141
§1 线性空间的定义与性质…………………………………………………… 141
§2 维数、基与坐标 ………………………………………………………… 144
§3 基变换与坐标变换………………………………………………………… 146
§4 线性变换…………………………………………………………………… 149
§5 线性变换的矩阵表示式…………………………………………………… 152
习题六 …………………………………………………………………………… 156
习题答案 ……………………………………………………………………… 158

第一章

行列式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法.此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1 二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

为消去未知数 x_2,以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地,消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,求得方程组(1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

(2)式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得.其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1)的四个系数确定的,把这四个数按它们在方程组(1)中的位置,排成二行二列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{3}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表(3)所确定的二阶行列式,并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(4)的元素或元.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第

j 列.位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(4)的 (i,j) 元.

上述二阶行列式的定义,可用对角线法则来记忆.参看图 1.1,把 a_{11} 到 a_{22} 的实联线称为主对角线,a_{12} 到 a_{21} 的虚联线称为副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

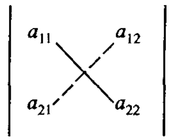

图 1.1

利用二阶行列式的概念,(2)式中 x_1、x_2 的分子也可写成二阶行列式,即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么(2)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组(1)的系数所确定的二阶行列式(称系数行列式),x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式,x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此 $$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

二、三阶行列式

定义 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$
\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{5}
$$

记

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned} \tag{6}
$$

(6)式称为数表(5)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则:图中有三条实线看作是平行于主对角线的联线,三条虚线看作是平行于副对角线的联线,实线上三元素的乘积冠正号,虚线上三元素的乘积冠负号.

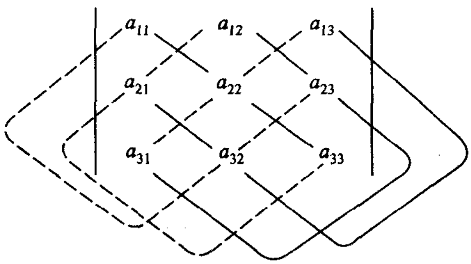

图 1.2

例 2 计算三阶行列式

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.
$$

解 按对角线法则,有

$$
\begin{aligned} D &= 1\times2\times(-2) + 2\times1\times(-3) + (-4)\times(-2)\times4 \\ &\quad - 1\times1\times4 - 2\times(-2)\times(-2) - (-4)\times2\times(-3) \\ &= -4-6+32-4-8-24 = -14. \end{aligned}
$$

例 3 求解方程

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.
$$

解 方程左端的三阶行列式

$$D=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12$$
$$=x^2-5x+6,$$

由 $x^2-5x+6=0$ 解得 $x=2$ 或 $x=3$.

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式,为研究四阶及更高阶行列式,下面先介绍有关全排列的知识,然后引出 n 阶行列式的概念.

§2 全排列及其逆序数

先看一个例子.

引例 用1、2、3三个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解 这个问题相当于说,把三个数字分别放在百位、十位与个位上,有几种不同的放法?

显然,百位上可以从1、2、3三个数字中任选一个,所以有3种放法;十位上只能从剩下的两个数字中选一个,所以有2种放法;而个位上只能放最后剩下的一个数字,所以只有1种放法.因此,共有 $3\times2\times1=6$ 种放法.

这六个不同的三位数是:

$$123,231,312,132,213,321.$$

在数学中,把考察的对象,例如上例中的数字1、2、3叫做元素.上述问题就是:把3个不同的元素排成一列,共有几种不同的排法?

对于 n 个不同的元素,也可以提出类似的问题:把 n 个不同的元素排成一列,共有几种不同的排法?

把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(也简称排列).

n 个不同元素的所有排列的种数,通常用 P_n 表示.由引例的结果可知 $P_3=3\cdot2\cdot1=6$.

为了得出计算 P_n 的公式,可以仿照引例进行讨论:

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上,有 n 种取法;

又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上,有 $n-1$ 种取法;

这样继续下去,直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上,只有1种取法.于是

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!.$$

对于 n 个不同的元素,先规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数,可规定由小到大为标准次序),于是在这 n 个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说有1个逆序.一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列,逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

下面来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性,不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数,并规定由小到大为标准次序.设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列,考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i.全体元素的逆序数之总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i,$$

即是这个排列的逆序数.

例 4 求排列 32514 的逆序数.

解 在排列 32514 中,

3 排在首位,逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数有一个(3),故逆序数为 1;

5 是最大数,逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有三个(3、2、5),故逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有一个(5),故逆序数为 1,于是这个排列的逆序数为

$$t = 0+1+0+3+1 = 5.$$

§3 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义,先来研究三阶行列式的结构.三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad (6)$$

容易看出:

(i) (6)式右边的每一项都恰是三个元素的乘积,这三个元素位于不同的行、不同的列.因此,(6)式右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$.这里第一个下标(行标)排成标准次序 123,而第二个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$,它是 1、2、3 三个数的某个排列.这样的排列共有 6 种,对应(6)式右端共含 6 项.

(ii) 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是:123,231,312;

带负号的三项列标排列是:132,213,321.

经计算可知前三个排列都是偶排列,而后三个排列都是奇排列.因此各项所带的正负号可以表示为$(-1)^t$,其中 t 为列标排列的逆序数.

总之,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1 p_2 p_3$ 的逆序数,$\sum$表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $p_1 p_2 p_3$ 取和.

仿此,可以把行列式推广到一般情形.

定义 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号$(-1)^t$,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{7}$$

的项,其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数.由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如(7)式的项共有 $n!$ 项.所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为n 阶行列式,记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\det(a_{ij})$,其中数 a_{ij}为行列式D 的(i,j)元.

按此定义的二阶、三阶行列式,与§1 中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式,显然是一致的.当 $n=1$ 时,一阶行列式$|a|=a$,注意不要与绝对值记号相混淆.

例 5 证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

其中未写出的元素都是 0.

证 第一式左端称为对角行列式,其结果是显然的,下面只证第二式.

若记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$,则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^t a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^t \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots 2\ 1$ 的逆序数,故

$$t = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$ 证毕

主对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做上(下)三角形行列式,它的值与对角行列式一样.

例 6 证明下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证 由于当 $j > i$ 时,$a_{ij} = 0$,故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i},其下标应有 $p_i \leqslant i$,即 $p_1 \leqslant 1, p_2 \leqslant 2, \cdots, p_n \leqslant n$.

在所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中,能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$,所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$. 此项的符号 $(-1)^t = (-1)^0 = 1$,所以

$$D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

§4 对 换

为了研究 n 阶行列式的性质，先来讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系.

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换.将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然，$a_1$，$\cdots$，$a_l$；$b_1$，$\cdots$，$b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a，b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此知推论成立. 证毕

利用定理 1，下面来讨论行列式定义的另一种表示法.

对于行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

这时，这一项的值不变，而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换. 设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 r，则 r 为奇数；设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则

$$(-1)^{t_1}=-(-1)^t. \text{故} (-1)^t=(-1)^{r+t_1}, \text{于是}$$