数学命题和证明

江苏省数学学会科普委员会主编

范惠民　编写

中数学辅助读物

SHUXUE

江苏教育出版社

数 学 命 题 和 证 明

江苏省数学学会科普委员会主编

范 惠 民 编 写

江 苏 教 育 出 版 社

数学命题和证明

江苏省数学学会科普委员会主编

范惠民　编写

江苏教育出版社出版

江苏省新华书店发行　淮海印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 2.5 字数 50,000

1984 年 3 月第 1 版 1984 年 3 月第 1 次印刷

印数 1－78,500 册

书号：7351·006　定价：0.25 元

责任编辑　何震邦

编 者 的 话

数学在实际生活中的应用是很广泛的。对于一个中学生或任何一个青少年来讲，不管你将来是在哪一个部门里工作，还是进哪一个学校，都必须要有最基本的数学知识，才能作出某些成绩。因此，每一个同学和青少年都应该努力打好数学基础。

学习数学，首先应该掌握一定的数学概念和数学规律，这是学好数学的基础。同时，也要学会把学到的知识用之于实践。如果掌握了知识不会灵活运用，那么，这些知识便只是一堆废物。因此，我们在学习数学时，必须注意理论和实践两个方面，注意领会有关的数学思想，掌握数学思维的方法，从根本上提高分析问题、解决问题的能力。为了达到这样的目的，在正课学习的基础上，适当看一点课外数学读物，以开拓知识领域，扩大视野，启迪智慧，是十分必要的。

基于这样的指导思想，我们组织部分长期从事中学数学教学和研究的专家、教授、中学教师编写了这套初中数学辅助读物。

这套丛书的内容密切结合现行初中课本，注意数学教材中各个方面的联系及应用，采用以点带面、纵横贯通的方法，阐述初中数学里的重要概念、定理和法则，疏通学习中的难点，剖析教材中的重点。书中涉及的数学知识一般不超越初中数学的范围，某些地方虽稍有拓宽加深，但以初中学生能

看懂为原则．文字上力求适合初中学生的年龄特点，做到生动活泼，浅显通俗。

这套丛书第一批编辑出版的有五种:《怎样列方程解应用题》（沈超编写），《三角形的巧合点》（涂世泽编写），《距离与角度》（王永建编写），《怎样解初中数学题》（赵振威编写），《数学命题和证明》（范惠民编写）。以后将根据初中学生和广大青少年学习初中数学知识需要，继续出版。

由于当前初中学生的程度不一，这套书在选题与编写方面都可能存在一些缺点，欢迎各地教学研究部门、中学教师以及广大青少年读者多多提出意见，帮助我们编好这套丛书。

江苏省数学学会科普委员会

一九八四年二月

目　录

一、数 学 命 题

§ 1 数学命题的意义

人们研究数和图形总是去认识它们具有哪些性质或者不具有哪些性质的．比如，研究实数 a，就可知道它的绝对值具有大于或者等于零的性质；考察自然数 127，就可认识到它不具有能被 3 整除的性质．这种对事物的肯定或否定的认识就是判断．

语言、文字是人们交流思想的工具．人们在得到某种判断以后，便要用语言或文字来表达它．凡是用来表达事物具有某种性质或者不具有某种性质的句子，都是判断语句，即判断一件事情的句子．比如，"$|a| \geqslant 0$"表明了 a 的绝对值具有大于或者等于零的性质；"127 不能被 3 整除"表达了自然数 127 不具有能被 3 整除的性质．它们都是判断一件事情的句子．

在数学中，象这样判断一件事情的句子，叫做数学命题，简称为命题．"$|a| \geqslant 0$"、"127 不能被 3 整除"都是命题．又如，

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$；

(2) $a - 1 > a + 2$；

(3) 无论 n 为怎样的自然数，代数式 $n^2 - n + 11$ 的值总

是质数；

(4) 经过直线外的一点，有且只有一条直线和这条直线平行；

(5) 三角形的三个内角之和等于 180°；

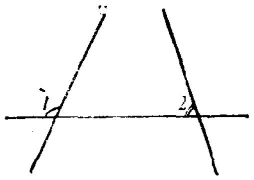


图 1

(6) 图 1 中∠1 和∠2 不是同位角。

这些语句都显示了人们对有关数或图形的某种认识，即表达了所研究的对象具有某种性质或者不具有某种性质。它们都是命题。

人们对数或图形的认识可能正确，也可能错误．因此，用来反映这种认识的命题就有真假之分。凡是正确的命题，叫做**真命题**；凡是错误的命题，叫做**假命题**。显然，命题(1)、(4)、(5)都是真命题；而命题(2)、(3)和(6)都是假命题。

必须指出，说一个命题是真命题，就是说这个命题对它反映的所有情况均正确．比如，命题(1)这个真命题所表达的意思是，对于**任何**两个数 a 与 b，等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 都成立；我们说命题(5)是真命题，就是说对于**所有**的(毫无一个例外)三角形，它的内角和都等于 180°。

然而对于命题(3)，取 $n=1$, 2, 3, ……, 10 等自然数，来计算 n^2-n+11 的值，得

当 $n=1$ 时，原式 $=1^2-1+11=11$；

当 $n=2$ 时，原式 $=2^2-2+11=13$；

当 $n=3$ 时，原式 $=3^2-3+11=17$；

当 $n=4$ 时，原式 $=4^2-4+11=23$；

当 $n=5$ 时，原式 $=5^2-5+11=31$；

当 $n=6$ 时，原式 $=6^2-6+11=41$；

当 $n=7$ 时，原式 $=7^2-7+11=53$；

当 $n=8$ 时，原式 $=8^2-8+11=67$；

当 $n=9$ 时，原式 $=9^2-9+11=83$；

当 $n=10$ 时，原式 $=10^2-10+11=101$。

可以看出，上面所算出的这些值都是质数，也就是说，对于 $n=1,2,3,\cdots\cdots,10$ 等自然数，命题（3）都正确。这时，我们能不能就说命题（3）是真命题呢？不能！这是因为命题（3）所论及的情况是所有的自然数，而不只是 $n=1,2,\cdots\cdots,10$ 这几种情况。尽管它在这几种情况下是正确的，但不等于 n 为其他自然数时也正确。事实上，

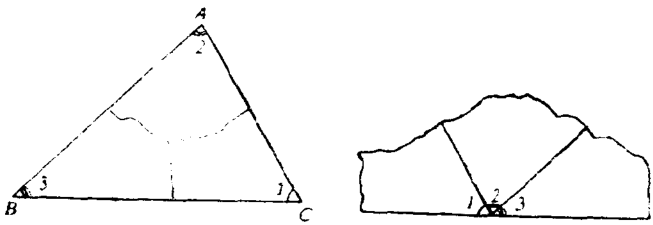
当 $n=11$ 时，原式 $=11^2-11+11=11^2$，

它就不是一个质数，此时命题（3）就不成立。因此，它只是一个假命题。当然，如果把命题（3）改述为“对于不大于10的自然数 n，代数式 n^2-n+11 的值总是质数”，那么，根据上面的计算，我们可以知道，这个新命题对于所论及的所有情况无一不正确，因而可以确认它是真命题。

这就是说，一个命题，只要它对所反映的**某一个**情况不正确，就可以说它是假命题；只有它在所反映的**所有**情况下都正确时，才能肯定它是真命题。真命题是不能仅就几个个别情况作为成立的依据。这一点对于确认一个命题是真是假有着重要意义。比如，命题（2），只要取 $a=0$，得到 $-1>2$，此时它不成立，就可以断定它是假命题。

命题（5），如果用一个纸制的三角形，将它的三个内角按图2（1）的方式剪下，并且把它们按图2（2）的方式拼拢，然后用量角器量得它们的和等于180°，就不能说明它是真命

题．因为这只是对那个纸制三角形所进行的一个实验，顶多只能说命题(5)对于图 2 (1)的这个三角形是正确的，并不能说明其他三角形也具有同样的性质．再说，实验结果往往受测量工具精密程度的影响，它并不一定准确．因此，这种做法只能说明命题(5)**有时**（或**大概**）是正确的，并不能说明它**始终**（或**一定**）是正确的．



（1）　　　　图 2　　　　（2）

如果用下面的方法来说明命题（5）是真命题，那就无暇可击了．

对于任意一个$\triangle ABC$（图3），延长BC至D，作$CE \parallel BA$，那么

$\angle A = \angle 2$(两直线平行，则内错角相等)，

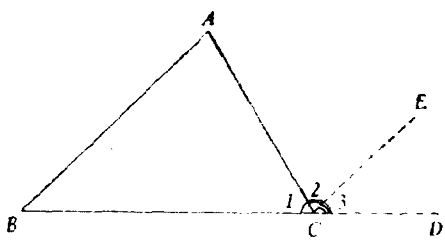


图 3

$\angle B=\angle 3$(两直线平行，则同位角相等)．

$\because\quad \angle 2+\angle 3+\angle 1=180^\circ$(平角的定义)，

$\therefore\quad \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$(等量代换)．

这个结论是利用平行线性质等已确认为正确的数学命题，经过上述推理* 得到的．它说明无论怎样一个三角形，它的内角和都等于 180°．这具有普遍性、严密性，因而由此能确定命题(5)为真．

象这种根据一些真实的命题，用推理的方法，来说明某一命题真假，就叫做**证明**．数学命题除少数不加证明而被采用的公理(如命题(4)，是平行公理)以外，其他任何命题都是需要经过证明才能确定它的真实性的．数学中的定理、公式、法则都是经过证明才确认为是真命题的，因而，它们不仅正确地反映了数与图形的性质，而且和公理一样，可作为说理的依据，来识别其他命题的真假．

任何一个命题不是真的就是假的，但是，它们究竟是真是假，并不是都能立即识别出来的．历史上，著名数学家不能确定其真假的数学命题还多着呢！比如，在 1742 年，德国数学家哥德巴赫提出了这样一个命题："任何一个大于 2 的偶数都是两个质数的和．"他对许多偶数进行了检验，都说明确实如此．例如，$6=3+3$，$24=7+17$，$48=17+31$，$100=41+59$．但是，对所有大于 2 的偶数是否仍然如此，他却无法证实．后来，哥德巴赫就写信请教赫赫有名的俄国数学家欧拉，可是欧拉也证明不了它．从此这成了一道数学难题，吸引了成千

---

* 推理就是根据一个或几个已有的命题导出一个新的命题的过程。有关推理问题将在第二章 § 2 里讨论．

上万数学家的注意．两百多年来，多少数学家企图判断这个命题的真假，但谁都没有完全成功．象这种尚未经过证明的命题，只能称之为猜想．哥德巴赫提出的这个命题称为“哥德巴赫猜想”．

值得自豪的是，当今世界上研究哥德巴赫猜想取得最好成果的就是我国数学家陈景润．他在 1973 年证明了：每一个充分大的偶数都可以表示为一个质数与一个不超过两个质数乘积之和．由于这个命题已被确认是真命题，所以它就不是什么“猜想”，而被人们誉称为“陈氏定理”了．

综上所述，数学命题是用来表达数或图形性质的语句．它有真有假．证明是确定真假的重要方法．公理、定理、公式和法则等等，不仅都是真命题，而且可作为证明其他命题的依据．至于那些尚未证实的数学命题，只是一种猜想，不能用它来证明其他命题．

§ 2 命题的结构

“如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线平行．”这个命题的意思是：对于两条直线，只要它们同时平行于第三条直线，它们就必然也相互平行．这就是说，“两条直线都和第三条直线平行”是“这两条直线平行”的原因；“这两条直线平行”是“这两条直线都和第三条直线平行”的必然结果．因此，这个命题表达了“两条直线都和第三条直线平行”与“这两条直线平行”这两件事情之间的因果关系．

我们经常使用“如果……，那么……”这样形式的命题，来显示一些事情之间的因果联系．例如，

如果两个数都是奇数，那么它们的和必为偶数；

如果 $a<0$，那么 $a=-|a|$。

这种"如果 A，那么 B"形式的命题，是由前半部分 A 和后半部分 B 组成的。前半部分 A 称为命题的**题设**(或**条件**)；后半部分 B 称为命题的**结论**。如

如果 $\underbrace{\text{两个数都是奇数}}_{\text{题设}}$，那么 $\underbrace{\text{它们的和必为偶数}}_{\text{结论}}$；

如果 $\underbrace{a<0}_{\text{题设}}$，那么 $\underbrace{|a|=-a}_{\text{结论}}$。

命题"如果 A，那么 B"反映了根据题设 A 必然推出结论 B 的事实，用记号来表示这种形式的命题就是

$$A \Longrightarrow B,$$

它的读法是"由 A 推出 B"。如上述两命题可表示为：

两个数都是奇数 $\Longrightarrow$ 它们的和必为偶数；

$a<0 \Longrightarrow |a|=-a$。

命题的表达形式可以多种多样，并非总是采用"如果……，那么……"这种形式。例如，三角形的内角和定理："三角形的三个内角之和等于180°"，就没有采用"如果……，那么……"的形式来叙述。此时，要区分出这个定理的题设和结论，就不是一件很容易的事，这需要对这个定理进行一些剖析。

这个定理所研究的对象是三角形的三个内角，更细致一点说，对象是三个角，条件是这三个角均为三角形的内角；它所肯定的性质是这三个角的和等于180°，即

$\underbrace{\text{三角形的}}_{\text{条件}}\underbrace{\text{三个内角}}_{\text{对象}}\underbrace{\text{之和等于180°}}_{\text{性质}}$。

于是，把"三角形的三个内角"改用判断语句"三个角都是三角形的内角"来表述，就可将这个定理写成"如果……，那

么……”的形式：

如果三个角都是三角形的内角，那么这三个角的和等于180°。

这样一来，我们很容易地分别出这个定理的题设和结论。

由此可见，为了能很清楚地看出命题的题设和结论，往往把命题写成“如果……，那么……”的形式；要做到这一点，就必须对命题进行剖析。由于数学命题是用来显示数和图形的性质的，所以剖析时，应当考虑这样两个问题：

第一，命题所讨论的对象是什么？它是在什么条件下讨论的？

第二，命题肯定了这个对象具有哪些性质？即这个对象只要满足已知条件，必导致怎样的结论？

把考虑的结果，分别表叙成判断语句，前者就是命题的题设，后者即为命题的结论。

例 1 把下面各命题写成“如果……，那么……”的形式：

(1) 各位数字之和是 3 的倍数的自然数必能被 3 整除；

(2) 直角都相等；

(3) 等腰三角形中，顶角的平分线就是底边上的垂直平分线。

解 对命题(1)进行剖析：

$\underbrace{\text{各位数字之和是 3 的倍数的}}_{\text{条件}}\underbrace{\text{自然数}}_{\text{对象}}\underbrace{\text{必能被 3 整除}}_{\text{性质}}$。

于是，可把命题(1)改写成：如果自然数的各位数字的和是 3 的倍数，那么这个数必能被 3 整除；

剖析命题(2)：

直　角都相等.

条件 对象 性质

这样，命题(2)即为“如果两个角都是直角，那么这两个角相等”；

命题(3)：

等腰三角形中，顶角的平分线就是底边上的垂直平分线.

条　　件　　　对象　　　性　质

改写后的形式是“如果一条射线是等腰三角形的顶角平分线，那么这条射线垂直平分底边”.

我们再来进一步地研究命题“如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线平行”的结构. 由于“平行线”中最简单的情况是两条直线相互平行. 对于若干条相互平行的直线需要通过“两条直线相互平行”来表达它们之间的平行关系. 例如图4中，AB、CD都和EF平行，用符号来表示就是$AB\parallel EF$，以及$CD\parallel EF$. 因此，为了更明确起见，需要把命题的题设再细分为两个部分：第一条直线和第三条直线平行；第二条直线和第三条直线也平行. 这样一来，用记号来表示所给出的命题，就是

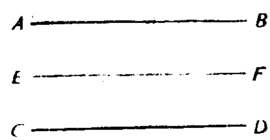


图 4

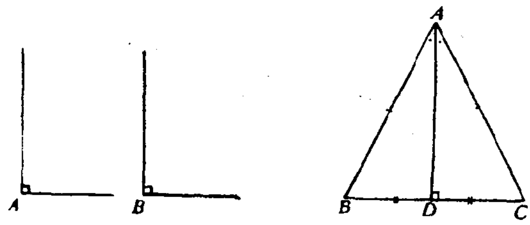
$$\left.\begin{array}{l}AB\parallel EF\\CD\parallel EF\end{array}\right\}\Longrightarrow AB\parallel CD.$$

这就是说，为了更清楚地了解命题的结构，时常还需要把命题的题设(或结论)再细分为若干部分.

例 2 结合图 5 (1)(2)，用记号来表示下列命题：

(1) 如果两个角都是直角，那么这两个角相等；

(2) 等腰三角形中，顶角的平分线就是底边的垂直平分线。



(1) (2)

图 5

由于命题(1)的题设包括两个部分：一个角是直角，另一个角也是直角，所以用记号来表示这个命题，就是

$$\left.\begin{array}{l}\angle A=Rt\angle\\ \angle B=Rt\angle\end{array}\right\}\Rightarrow\angle A=\angle B;$$

命题(2)，它的题设可分为这样两个部分：

① 三角形是等腰的，

② 一条射线平分顶角；

结论也可分为两个部分：

① 这条射线平分底边，

② 这条射线垂直于底边。

因此，这个命题可叙述为：

在△ABC 中(图 5(2))，

$$\left.\begin{array}{l}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAD,\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}BD=CD,\\ AD\perp BC.\end{array}\right.$$

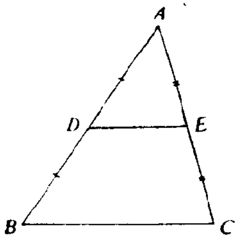


图 6

我们还须注意，命题的题设部分有的还表示在研究对象的含意之中。如三角形的中位线定理："三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半"，讨论的对象是中位线。它有着确定的含意：连结三角形两边中点的线段。这个含意也是题设部分。用记号表示（图 6），就是

$$\left.\begin{array}{l}AD=DB,\\ AE=EC,\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}DE\parallel BC,\\ DE=\frac{1}{2}BC.\end{array}\right.$$

又如命题："如果三角形有两边相等，那么这两边上的高也相等"，讨论的对象是"三角形的高"。我们知道：

从三角形一个顶点到它的对边所在的直线作垂线，顶点和垂足之间的线段叫做三角形的高。

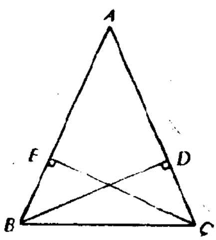


图 7

在剖析命题时，必须把高的意义反映到题设当中：

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC\text{ 中（图 7），}\\ AB=AC,\\ BD\perp AC,\text{ 垂足为}D,\\ CE\perp AB,\text{ 垂足为}E,\end{array}\right\}\Longrightarrow BD=CE.$$

由此可见，在这个命题中，置于"那么"之后的"这两