



竺艳蓉 编著

海洋工程波浪力学

天津大学出版社



海洋工程波浪力学

竺艳蓉 编著

天津大学出版社

内 容 提 要

本书主要阐述波浪以及波浪对海洋工程结构物的作用力的理论分析和计算方法。全书共六章。第一、二、三章介绍海洋工程中常用的几种确定性波浪理论——线性波理论和一些非线性波理论。第四、五章介绍确定性波浪对不同尺度、不同型式海洋工程结构物的作用力的计算方法。第六章介绍随机波浪理论以及海洋工程结构物上随机波浪力的计算方法。

本书可供高等学校海洋工程专业本科生使用，也可作为港口工程、船舶工程等的专业学生的参考书，并可供从事这方面工作的工程技术人员和研究人员参考。

(津)新登字012号

海 洋 工 程 波 浪 力 学

竺艳蓉 编著

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：787×1092 毫米 1/16 印张：14 字数：346 千字

1991年12月第一版 1991年12月第一次印刷

印数：1—900

ISBN 7-5618-0296-X

TV·3

定价：3.70元

前 言

我国的海洋工程事业迅速发展，相继设计和建造了一些海洋工程结构物，例如固定桩基平台、活动式（包括自升式、坐底式、半潜式、船式）平台、重力式平台、贮油罐、人工岛、海底管道等。这些不同尺度、不同型式的海洋工程结构物，大多建造在无掩蔽的海域，经常受到较大的波浪的作用。因此确定波浪外力便成为海洋工程设计者十分关心的问题。同时，随着国内外海洋工程的实践，以及先进计算技术的广泛采用，作为研究波浪以及波浪对海工结构物的作用力为主要内容的波浪力学得到了相应的发展。

为适应我国海洋工程事业的发展，天津大学于1971年设置了海洋工程专业，按照教学要求开设了海洋工程波浪力学课程。作者先后编写了三个版本的讲义，此次在原讲义的基础上，又吸收国内外近年的研究成果，重新编写成这本书。

本书围绕海洋工程中所遇到的波浪力学问题，系统地论述海洋工程中常用的几种确定性波浪理论和随机波浪理论，以及波浪对不同尺度、不同型式的海洋工程结构物的作用力的各种理论分析和计算方法，并介绍一些新的理论研究成果。目的使读者对海洋工程中的波浪力学问题有一全面了解，以助于从事海洋工程的规划、设计、建造和研究工作。

本书在理论分析中，着重对概念的分析，对某些问题的数学处理力求简易实用，并注意理论与工程实际的密切结合。为了巩固理论，以及培养和提高解决实际工程问题的能力，在本书的第三、四、五、六章中均编排了一定数量的算例。

海洋工程波浪力学是一门综合性学科，发展历史不长，许多问题还处于探索发展过程中。由于作者从事海洋工程波浪力学的研究时间较短，水平有限，书中有不当甚至错误之处，敬请读者指正。

作 者

1991年1月

目 录

第一章 液体表面波的基本方程	(1)
1.1 流体动力学的基本方程	(1)
1.1.1 连续方程	(1)
1.1.2 理想流体的运动方程	(2)
1.1.3 运动方程的几个积分	(3)
1.2 液体表面波的基本方程	(5)
1.2.1 势波的概念	(5)
1.2.2 液体表面波的基本方程、边界条件和初始条件	(6)
第二章 小振幅波(线性波)理论	(9)
2.1 常深度小振幅简单波动	(9)
2.1.1 二维小振幅推进波的基本方程	(9)
2.1.2 二维小振幅推进波的速度势	(11)
2.1.3 二维小振幅推进波的一些特性	(13)
2.2 常深度小振幅简单波动的迭加	(20)
2.2.1 立波	(21)
2.2.2 波群	(22)
2.3 倾斜海底上波浪的传播	(24)
2.3.1 波浪的浅水效应	(25)
2.3.2 波浪的折射	(23)
第三章 有限振幅波(非线性波)理论	(31)
3.1 斯托克斯(Stokes)波理论	(31)
3.1.1 斯托克斯波理论的分析方法	(31)
3.1.2 斯托克斯二阶波	(33)
3.1.3 斯托克斯三阶波	(41)
3.1.4 斯托克斯五阶波	(42)
3.1.5 算例.....	(45)
3.2 椭圆余弦(Cnoidal)波理论	(48)
3.3 孤立(solitary)波理论	(57)
3.4 几种波浪理论适用范围的分析	(59)
第四章 小尺度结构物上的波浪力	(63)
4.1 绕流力	(64)
4.1.1 绕流拖曳力	(64)
4.1.2 绕流惯性力	(68)
4.2 作用在直立柱体上的波浪力	(69)
4.2.1 莫里森(Morison)方程	(69)
4.2.2 单柱体上的波浪力.....	(72)
4.2.3 单柱体上的横向力.....	(77)

4.2.4	群柱体上的波浪力	(80)
4.2.5	算例	(83)
4.2.6	拖曳力系数 C_D 、质量系数 C_M 和横向力系数 C_L	(86)
4.3	作用在倾斜柱体上的波浪力	(90)
4.3.1	倾斜柱体上的波浪力	(90)
4.3.2	海(潮)流对波浪力的影响	(93)
4.4	作用在海底管道上的波浪力	(94)
第五章	大尺度结构物上的波浪力	(100)
5.1	线性绕射问题	(100)
5.1.1	线性绕射问题的基本方程和边界条件	(100)
5.1.2	绕射系数和质量系数	(102)
5.2	大直径直立圆柱上的波浪力	(103)
5.2.1	麦克卡姆(MacCamy)和富克斯(Fuchs)公式	(103)
5.2.2	大直径直立圆柱上的非线性波浪力	(110)
5.3	任意形状大尺度结构物上的波浪力	(112)
5.3.1	三维源分布法	(112)
5.3.2	有限单元法	(121)
5.4	大尺度潜体上的波浪力	(125)
5.4.1	弗汝德—克雷洛夫(Froude—Krylov)假定法	(125)
5.4.2	大尺度长方(正方)潜体上的波浪力	(126)
5.4.3	大尺度圆柱潜体上的波浪力	(129)
5.4.4	大尺度半球潜体上的波浪力	(132)
5.4.5	算例	(137)
第六章	随机波浪和随机波浪力	(143)
6.1	随机波浪的统计特性	(143)
6.1.1	海浪的复杂性和随机性	(143)
6.1.2	随机函数及其统计特征值	(144)
6.1.3	平稳的具有各态历经的随机过程	(151)
6.1.4	谱密度函数	(153)
6.1.5	海浪要素的统计分布	(156)
6.2	随机波浪的谱特性	(185)
6.2.1	频谱	(185)
6.2.2	方向谱	(187)
6.2.3	海浪谱的形式	(188)
6.3	海工结构物上的随机波浪力	(192)
6.3.1	特征波法(设计波法)	(192)
6.3.2	谱分析法	(193)
6.3.3	算例	(201)

第一章 液体表面波的基本方程

1.1 流体动力学的基本方程

研究流体力学一般有两种方法：一种是研究流体的质点在不同时刻所处的位置及其所具有的速度和加速度等运动要素的方法，称之为拉格朗日法 (Lagrange method)；另一种是在空间任意取一个定点，研究在不同时刻通过这个定点的不同流体质点所具有的速度和加速度的方法，称之为欧拉法 (Euler method)。

由于在实际问题中，常常只是需要求得空间各点的运动情况及其随时间而变化的规律，并不要求出某个个别流体质点的运动过程，因此欧拉法在流体力学中得到广泛的应用。同样，在研究液体表面波的运动时，大多也是用欧拉法进行分析。

在本节，不加推导地概述流体动力学的一些方程，因为在以后的讨论中，要经常地应用它们。如果想了解这些方程推导的细节，可参阅有关著作。

1.1.1 连续方程

质量守恒是任何物质运动时必须遵循的一个法则，当然，流体运动也不能例外。对于流场中任意选定的固定几何空间，单位时间内含于此空间内的流体质量的增加量必然等于同时时间内通过此空间边界净流入其内部的流体质量。今在流体内取一由封闭曲面 S 所围成的固定几何空间，其体积为 τ 。显然在单位时间内所取空间内流体质量的增加量为

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

而同一时间内通过边界净流入此空间内的流体质量为

$$-\iint_S \rho u_n dS$$

其中 ρ 表示流体的密度； u_n 表示沿边界外法线方向上的流体质点的速度分量。因此，根据质量守恒，应有

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iint_S \rho u_n dS = 0 \quad (1-1)$$

对上式的曲面积分应用高斯公式，便得

$$\iiint_{\tau} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] d\tau = 0 \quad (1-2)$$

式(1-2)中，由于 τ 是任意的，即式(1-2)对任何体积 τ 均适合，因此只能是被积函数等于零。于是便得到普遍形式的连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1-3)$$

若将式(1-3)中的 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$ 展开，则可写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

即
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0$$

其中 u_x, u_y, u_z 为速度 \mathbf{u} 在三个坐标轴方向上的分量。但知 $\rho = \rho(x, y, z, t)$, 此时有

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

而
$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

这样, 连续方程又可写为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1-4)$$

对于不可压缩流体, 应有

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1-5)$$

此时连续方程变为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1-6)$$

1.1.2 理想流体的运动方程

流体在流场中运动时, 必须遵循另一个法则, 即是熟知的动量守恒定理, 也称为牛顿第二定理。流体动力学中的运动方程就是牛顿第二定理应用于流体运动时的具体表述。研究任何形式的液体表面波的运动, 都必须应用流体的运动方程。

在研究液体波动时, 常常认为流体是无粘滞性的, 也就是说可以忽略流体的内摩擦效应, 此时只需考虑压强而不必考虑切向的应力。另外, 假定重力是唯一的外力。如果这样选取坐标系, 使得 xoy 平面与流体静止时的水面相重合, oz 轴铅直向上为正, 则理想无粘性流体运动方程的矢量形式为

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} \quad (1-7)$$

式中 $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ 表示流体质点的加速度, 其在三个坐标轴方向的分量分别为 $\frac{du_x}{dt}$ 、 $\frac{du_y}{dt}$ 、 $\frac{du_z}{dt}$; $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ 表示单位质量流体所受到的表面力合力, 即压力的合力, 或者称为单位质量流体所受到的压强梯度力; $\mathbf{F} = (0, 0, -g)$ 为单位质量流体所受到的外力, 其中 g 为重力加速度。如果把上式写为分量形式, 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{du_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{du_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

当流场用欧拉法描述时，流场中的物理量一般应为空间坐标 (x, y, z) 和时间 t 的函数。此时，流体质点的加速度

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (1-9)$$

其中 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ 称为流体质点的局部加速度； $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ 称为流体质点的位移加速度，是由于流体质点的运动和流场中流速分布的不均匀性所引起的加速度。 $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ 又称为流体质点的全加速度。把上式写为分量形式，则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{du_y}{dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{du_z}{dt} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} (1-10)$$

将式(1-10)代入式(1-8)，便得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \right\} (1-11)$$

1.1.3 运动方程的几个积分

运动方程有许多不同形式的积分，在讨论某些特定问题的时候，应用运动方程的这些积分形式常常要比直接应用运动方程本身方便得多。下面我们将概述在波动问题讨论中常用到的几个积分。

一、Helmholtz环量积分定理

于 $t = t_0$ 时刻，在流场中取一封闭空间曲线 C_0 ，那么组成 C_0 的流体质点在时刻 t 将移动到新的位置上，并构成新的封闭空间曲线 C_t ，若在此封闭空间曲线 C_t 上的速度环量记为 $\Gamma(t)$ ，则

$$\Gamma(t) = \oint_{C_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C_t} u_x dx + u_y dy + u_z dz \quad (1-12)$$

t 时刻的速度环量 $\Gamma(t)$ 依赖于封闭曲线 C_t 和 C_t 上的流体质点速度，而这两者均随流体的运动而变化，所以一般说来，速度环量 $\Gamma(t)$ 应该随着流体的运动而变化。那么此速度环量的变化率等于多少，在什么条件下其变化率为零？为此，可取上式对时间的导数，即

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \oint_{C_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \oint_{C_t} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_t} \mathbf{u} \cdot \frac{d(d\mathbf{l})}{dt} \end{aligned}$$

$$= \oint_{C_t} \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz$$

$$+ \oint_{C_t} u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z$$

因为 $u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = d \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)$

而全微分在一封闭空间曲线上积分为零, 即

$$\oint_{C_t} u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = 0$$

则

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \oint_{C_t} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-13)$$

上式表示速度环量对时间的导数等于加速度的环量。此时将式(1-7)代入上式后, 得

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C_t} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l}$$

$$= \oint_{C_t} d \left(-\frac{p}{\rho} - gz \right) = 0 \quad (1-14a)$$

或
$$\oint_{C_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \text{constant} \quad (1-14b)$$

式(1-14)表明, 对于无粘性的不可压缩均匀流体, 由相同流体质点构成的封闭曲线上的速度环量不随时间而变化, 这就是Helmholtz环量积分定理(环量守恒定律)。

如果重力场中无粘性不可压缩流体初始时刻为静止或作均匀运动, 那么初始时刻任何封闭曲线上的速度环量为零, 又由于环量的守恒性, 故任意时刻、任意封闭曲线上的速度环量也必然为零。根据斯托克斯定理, 有

$$\oint_{C_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1-15)$$

式中 S 表示以 C_t 为边界的曲面; $d\mathbf{s}$ 为曲面 S 的有向面元。上式表明, 任意时刻、任意点处的速度旋度 $\nabla \times \mathbf{u}$ 均为零, 也就是说, 可以认为流体运动是无旋的。

二、定常积分(贝努利积分)

对于重力场中的无粘性不可压缩流体, 如果流体作定常运动, 那么易于证明, 沿任何一条给定的流线, 下面的等式成立

$$\frac{u^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (1-16)$$

式中 $u = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{\frac{1}{2}}$ 为流体质点速度的量值。在应用上式时, 应特别注意, 一般说来, 式中右端的常数依流线的不同而变化, 也就是说, 在同一流线上, 左端三项之和为常数, 但在不同的流线上左端三项之和可能具有不同的值。只有在流体作定常而又作无旋运动时, 上式中的常数才处处一样。

波动的流场总是不定常的，所以式(1-16)定常流的贝努利 (Bernoulli) 方程不能直接加以应用。但是，以后我们将会看到，对于某些波动，可以通过采取平移坐标系统的办法，将流场化为定常流场，此时贝努利积分将对问题的讨论起重要的作用。

三、非定常无旋积分 (拉格朗日积分)

当流体作无旋运动时，运动方程和连续方程将具有非常简单的形式。首先，速度旋度为零 ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$) 的条件保证在任何单连通域内存在单值速度势 $\varphi(x, y, z, t)$ ，使得

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi(x, y, z, t) \quad (1-17)$$

$$\text{或} \quad u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1-18)$$

$$\text{而} \quad \varphi(x, y, z, t) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} u_x dx + u_y dy + u_z dz$$

因为 $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ，必然导致上式中的积分表达式为全微分。

如果流体又是不可压缩的，那么连续方程就变成如下形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1-19)$$

也就是说，对于不可压缩流体的无旋运动，其速度势必须满足拉普拉斯 (Laplace) 方程，它是一调和函数。

对重力场中的不可压缩流体的无旋运动，其运动方程具有如下的积分形式：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (1-20)$$

其中积分常数 $C(t)$ 是时间 t 的任意函数。一般可在不影响速度场的情况下重新定义 φ 使 $C(t)$ 为零。如果引进 $\varphi'(x, y, z, t)$ 使

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - C(t) \quad \nabla \varphi' = \nabla \varphi$$

显然 $\varphi'(x, y, z, t)$ 也可代表同一流场的速度势，此时用 $\varphi'(x, y, z, t)$ 来表示式(1-20)，便有

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi') \cdot (\nabla \varphi') + \frac{p}{\rho} + gz = 0$$

为了方便，仍将 φ' 记为 φ ，则上式可写为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (1-21)$$

式(1-21)就是非定常无旋流的贝努利方程。

1.2 液体表面波的基本方程

1.2.1 势波的概念

在重力场中处于平衡的液体的自由面是一平面。如果在某种外来扰动的作用下，液体自由表面的各个质点将离开其平衡位置，但失去平衡状态的各液体质点在重力和惯性力的作用

下，有恢复到初始平衡位置的趋势，于是形成了液体质点的振荡运动，并以波的形式沿整个表面传播，从而在液体表面出现了波浪运动，见图(1-1)。因为重力是唯一的作外力(恢复力)，所以称为重力波。重力波主要出现在液体表面上，它也影响到液体内部，但随着深度的增加，其影响便越来越小，所以又称表面重力波，简称表面波。

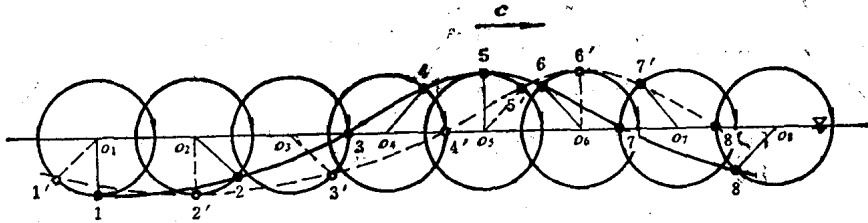


图 1-1 深水中的波浪运动

人们在研究波浪问题过程中曾经发现，海洋中的波浪可以传播到很远的地方；在实验室中也可以观察到，水槽中的波浪也可以长距离的传播而不变形。这就说明，液体阻尼作用即粘滞性的影响在波浪传播过程中是比较小的，因而研究大多数波浪问题时，可以假定流体是无粘性不可压缩的均匀流体。如果在重力场中无粘性不可压缩的均匀流体在初始时刻处于静止状态，此时在流体中任何封闭曲线上的速度环量必然为零。根据环量守恒定律，就能断言，这种情形在以后的任何时刻将保持不变。这就是说，这种流体在初始时刻作无旋运动，那么在以后任何时刻也必作无旋的运动。由此可知，在液体表面所形成的波浪运动将是一种存在有速度势 $\varphi(x, y, z, t)$ 的无旋(有势)运动，因而这种液体表面波称为势波。

1.2.2 液体表面波的基本方程、边界条件和初始条件

对于势波，只要寻求到波动海域 R 中的速度势 $\varphi(x, y, z, t)$ ，便可由式(1-17)或式(1-18)求得波动场中各点的速度 \mathbf{u} ，然后再由式(1-21)求各点的波压强 p ，这样质点的运动轨迹、波浪表面的形状、波能量等也就可以计算出来。因此，研究势波的问题归结为寻求波动海域 R 中的速度势 $\varphi(x, y, z, t)$ 。

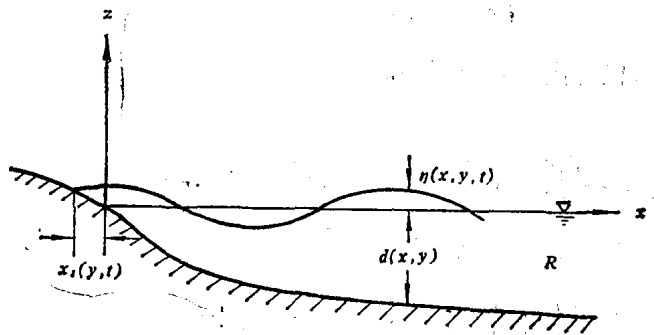


图 1-2 波动海域R示意图

显然， φ 应满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad R: \begin{cases} x_s(y, t) \leq x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ -d(x, y) \leq z \leq \eta(x, y, t) \end{cases} \quad (1-22)$$

这里应特别注意， $x_s(y, t)$ 表示 t 时刻海域和陆域交界线上的 x 坐标，而 $\eta(x, y, t, z)$ 表示自由水面的铅直位移，即波浪表面相对于静水面的高度。这两者都是未知函数，因此拉普拉

斯方程的求解区域不仅随时间而变,而且本身也是要求解的一部分。这使式(1-22)表示的问题仍为非线性问题。

为了能唯一地确定速度势 $\varphi(x, y, z, t)$,所需的边界条件有:

1. 海域底部的运动边界条件

在海底上的流体质点不能穿过固体边界,只能沿着边界的切线方向运动,即在 $z=-d$ 处垂直于固体边界的法向速度为零,即

$$u_n \Big|_{z=-d} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{z=-d} = 0 \quad (1-23a)$$

当海底面为水平面时,法向即为垂向 z ,此时

$$u_z \Big|_{z=-d} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-d} = 0 \quad (1-23b)$$

2. 自由表面的运动边界条件

自由表面上流体质点必须始终留在自由表面上,而不能离开这自由表面,或者说自由表面上流体质点的法向速度应与自由表面本身移动的法向速度相同。

在波浪运动中,自由表面运动边界常表示为

$$z = \eta(x, y, t)$$

此时,自由表面的运动边界条件具有如下的形式:

$$u_z \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} u_x \Big|_{z=\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y} u_y \Big|_{z=\eta}$$

或

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z=\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{z=\eta} \quad (1-24)$$

等式的左端表示自由表面上的流体质点的垂直速度,而右端则表示自由表面本身移动的垂直速度。

3. 自由表面的动力边界条件

若不计表面张力,则自由表面上的压强 p 必定等于大气压强 p_a (通常取相对压强 $p_a=0$)。把贝努利方程式(1-21)应用到自由表面处,得到自由表面的动力边界条件为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + g\eta + \frac{1}{2}(\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi) \Big|_{z=\eta} = 0$$

或

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + g\eta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \Big|_{z=\eta} = 0 \quad (1-25)$$

4. 无穷远处的条件

当 $x \rightarrow \infty$,或 $y \rightarrow \pm \infty$,或 $z \rightarrow -\infty$ 时, $\varphi(x, y, z, t)$ 和 $\eta(x, y, t)$ 保持有界,有时甚至要求 φ 和 η 以及它们的导数趋于零。

除了这些边界条件之外,还要给出波动场的初始条件,具体有

$$\eta(x, y, t) \Big|_{t=0} = \eta(x, y) \quad (1-26)$$

$$\nabla \varphi(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = \nabla g(x, y, z) \quad (1-27)$$

其中 $\eta(x, y)$ 表明水面起伏的初始情况,而 $\nabla g(x, y, z)$ 表明波动场中的初始速度分布。

式(1-22)~式(1-27)就是研究势波问题所需的基本方程、边界条件和初始条件,其中自

由表面的运动边界条件式(1-24)和自由表面的动力边界条件式(1-25)都是非线性的边界条件。从数学上说, 尽管拉普拉斯方程是线性的, 但是求解区域的可变性以及边界条件的非线性, 要想从式(1-22)中精确求解出速度势 $\varphi(x, y, z, t)$ 是非常困难的。这就是至今还不能建立起一种波浪理论可普遍适用于任意水深、波高和波长的海况条件的原因。

鉴于对上述各种非线性关系式求解的困难, 必须进一步作出一些假定来简化这些关系式, 从而建立起几种确定性的波浪理论以适用于各自特定的海况条件。下面介绍小振幅波理论和几种有限振幅波理论。

第二章 小振幅波（线性波）理论

2.1 常深度小振幅简单波动

小振幅波是一种简化了的最简单的波动，其水面呈现简谐形式的起伏，水质点以固定的圆频率 ω 作简谐振动，同时波形以一定的速度 c （称为波速）向前传播，波浪中线（平分波高的中线）与静水面相重合，见图2-1。一般说来，海洋中实际发生的波动都不能用简单的波动描述，但分析这种最简单的波动，对解决较复杂的波动问题乃是十分必要的。它是研究较复杂的有限振幅波和随机波的基础。本节将讨论简单波动的各种特性。

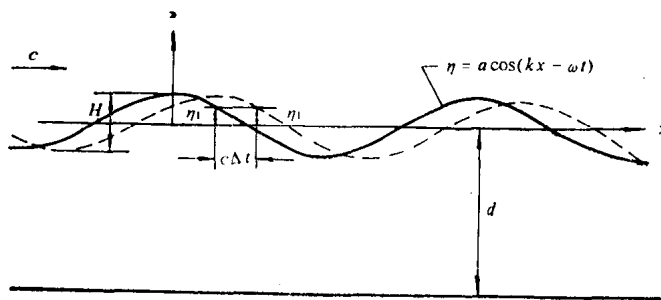


图 2-1 小振幅波的波剖面

2.1.1 二维小振幅推进波的基本方程

除了前面1.2节所作的四点假定：①流体是无粘性不可压缩的均匀流体；②流体作有势的运动；③重力是唯一的外力；④流体自由表面上的压强 P 等于大气压强 P_0 以外，还再作二点假定：⑤海底为水平的固体边界；⑥波幅或波高相对于波长是无限小，流体质点的运动速度是缓慢的。小振幅波理论是根据以上假定而得到的。此理论首先由爱利（Airy）提出，故又称爱利波理论。按⑥假定，波动的自由表面所引起的非线性影响可以忽略，即非线性的自由表面运动边界条件和动力边界条件可以简化为线性的自由表面边界条件。

对于二维波动，非线性的自由表面运动边界条件为

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{z=\eta} \quad (2-1)$$

但在小振幅假定以下，式(2-1)中的 $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ 、 $u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 均为小量，它们的乘积为高一阶小量，相对于其它两项可以忽略不计，于是便得到线性化的自由表面运动边界条件

或

$$\left. \begin{aligned} u_x \Big|_{z=\eta} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

对于二维波动, 非线性的自由表面动力边界条件为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + g\eta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \Big|_{z=\eta} = 0 \quad (2-3)$$

考虑小振幅假定, 式(2-3)中的非线性项 $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$ 相对于其他两项可以忽略不计, 于是便得到线性化的自由表面动力边界条件为

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} \quad (2-4)$$

由于自由表面总是在静水面 $z=0$ 的邻近, 自由表面 $z=\eta$ 处的 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\eta}$ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\eta}$ 可用马克劳林 (Maclaurin) 级数来表示, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} + \frac{\eta^2}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \Big|_{z=0} + \dots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \Big|_{z=0} + \frac{\eta^2}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right] \Big|_{z=0} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

略去零阶以上的高阶项, 得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

所以按小振幅波的条件, 可取 $z=0$ 处的 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}$ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}$ 近似地代替 $z=\eta$ 处的 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\eta}$ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\eta}$, 故有

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (2-6)$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (2-7)$$

将式(2-7)对时间取导数, 得

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \Big|_{z=0} \quad (2-8)$$

因此, 线性化的自由表面运动边界条件式(2-6)和动力边界条件式(2-7)可以合并为

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \Big|_{z=0} = 0 \quad (2-9)$$

由此可见, 常深度二维小振幅推进波的速度势 $\varphi(x, z, t)$ 由下列基本方程和边界条件

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 & \quad R: \left\{ \begin{array}{l} -d \leq z \leq 0 \\ -\infty < x < \infty \end{array} \right\} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-d} = 0 & \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \Big|_{z=0} = 0 & \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

所确定。因为研究的是随时间作简谐振动的周期解，显然可以不考虑初始条件，可从设定一个反映随时间周期性变化的流速势来着手分析。

2.1.2 二维小振幅推进波的速度势

一、波面方程的假定

常深度二维小振幅推进波其波面高度 $\eta(x, t)$ 相对于 x 或相对于 t 作周期性的变化，并且波形以一定速度 c 沿 x 向传播。这种特性不限于水面，水体内部的质点运动也具有这种特性，只不过随着深度的增加迅速地减少而已。

今设常深度二维小振幅推进波的波面方程为

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) \quad (2-11)$$

式中 a 为振幅，两倍的振幅就是波高 H ； $kx - \omega t = \theta$ 为波浪的位相。其中常数 k 和 ω 的确定如下所述：

(1) 当 x 增减一个波长 L 时，波面高度 η 应该不变，如图 2-1 所示，这就必使

$$kL = 2\pi$$

故

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (2-12)$$

称为波数。

(2) 当时间每增减一个周期 T 时，同一点的波面高度 η 应该不变，即

$$\omega T = 2\pi$$

故

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2-13)$$

称为波浪的圆频率。

显然，波形的传播速度 c 与波数 k 及波浪圆频率 ω 之间有如下的关系，

$$c = \frac{L}{T} = \frac{\omega}{k} \quad (2-14)$$

式(2-11)中 ωt 前面采用正号或负号分别表示波浪沿正方向或负方向的传播；式(2-11)的右侧采用正弦函数，也能体现上述的波动特性，只是将波形移动一个相角 $\pi/2$ 而已。

因此，常深度二维小振幅推进波的波面方程中，采用余弦函数或正弦函数， ωt 前面采用正号或负号，对所得的波形并不影响，只是波动的起始位置和传播方向不同而已。

二、推进波的速度势

因为所假定的波面方程

$$\eta = a \cos(kx - \omega t)$$

应满足自由表面动力边界条件式(2-7)，因而得

$$\varphi \Big|_{z=\eta=0} = \frac{ga}{\omega} \sin(kx - \omega t) \quad (2-15)$$

此式为 $z = \eta = 0$ 处以及波动振幅为 a 的特定情况下速度势 φ 的表达式。一般情况下，波动的振幅随深度而衰减，因此，速度势 $\varphi(x, z, t)$ 的一般形式为

$$\varphi = A(z) \sin(kx - \omega t) \quad (2-16)$$

式中的 $A(z)$ 为纵坐标 z 的函数。将式(2-16)对 x 和 z 分别取二次导数，有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -k^2 A(z) \sin(kx - \omega t)$$