怎样添置辅助线

冶金工业出版社

怎样添置辅助线

刘善贵　编

冶金工业出版社

怎样添置辅助线

刘善贵　编

责任编辑　刁传仁

●

冶金工业出版社出版

（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）

新华书店北京发行所发行

轻工业出版社印刷厂印刷

●

787×1092　1/32　印张 7　字数 154千字

1987年10月第一版　1987年10月第一次印刷

印数00,001～8,400册

统一书号：7062·4461　定价1.45元

前　言

平面几何证题中的添置辅助线，历来被认为是几何学中的难点。目前尚没有专门的著作讲述这方面的技巧，更无固定的方法可循，致使初学者在证题过程中往往盲目添线。碰得巧，顺利获证；碰不巧，搜尽枯肠亦无一得，甚至产生了怕几何证题的畏难情绪。对职工教育中数学教学来说，尤为困难。

根据本人几十年的教学经验，力求详细总结常见的添置辅助线的方法，结合解题时在添线过程中如何联系基本概念、主观意图、窥测方向、逆向推理等思维方法，作了较为详细的叙述，使读者体会其意，从中得到启迪，以便提高分析问题的能力。

为了训练思维和提高证题的基本技能，书中还配备了适当的思考题，作了"思路提示"和"解答"。读者务必在充分思考仍不得其解时，才去看"提示"或"解答"，而不应一看到题目，就不加思索地去翻看、照抄，这样对自己的证题能力的提高没有好处。

由于添置辅助线的方法散见于一些课外数学读物及各种小报中，没有专著可据，编者加以搜集整理，编写成本书。诚盼广大读者，特别是同行们提出宝贵的意见，以便集思广益，使本书内容更加完善。愿本书能起到抛砖引玉的作用，对读者有所帮助。

编　者

一九八六年九月

目　　录

一、什么是辅助线

让我们先看下面的例子：

已知：如图1，D是$\triangle ABC$内的任意一点。

求证：$\angle BDC>\angle A$。

证明一：$\because D$在$\triangle ABC$内，$\therefore DB$、DC必在$\angle ABC$、$\angle ACB$的内部。

$$\therefore \angle DBC<\angle ABC,\ \angle DCB<\angle ACB$$

于是$\angle DBC+\angle DCB<\angle ABC+\angle ACB$　　（1）

另一方面，$\angle BDC+\angle DBC+\angle DCB=180^\circ=\angle A+\angle ABC+\angle ACB$　　（2）

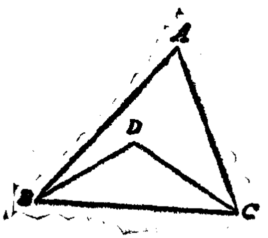

图1

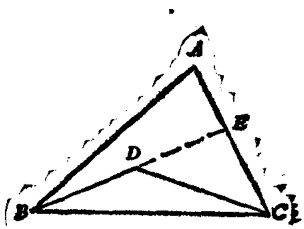

图2

（2）－（1）得　$\angle BDC>\angle A$。

证明二：如图2，延长BD与AC相交于E，则得$\angle BDC>\angle DEC$，

而　$\angle DEC>\angle A$

因此可得　$\angle BDC>\angle A$

从以上两个证法，很明显看到"证明二"比"证明一"简单明了，表达过程也较简易。这种为了证明的需要，在原

来图形上添画的线就叫做辅助线 辅助线有时不止一条，也不一定是线段或直线，它可能是弧或圆，这就要看证明时的需要而定了。

对一个已知图形来说，可画出的辅助图形是很多的，比如上例中对$\triangle ABC$、$\triangle DBC$都可以画出它们的各角平分线、各边上的高或中线及三角形的外接圆、内切圆等，但用不着它们就不必画。画多了，图形显得复杂、混乱，反而难证，或虽获证，但走了弯路。所以一定要考虑成熟后再画辅助线，不能随意添加。

二、作辅助线的目的

上一节的例子的求证式中的两个角$\angle BDC$、$\angle A$是互相“孤立”没有什么联系的，但辅助线DE一经作出，面目就一新了。这时$\angle BDC$就成了$\triangle CDE$的外角，而$\angle DEC$也成了$\triangle ABE$的外角，于是题中没有写出的“三角形的外角”这一隐蔽的已知，忽然显现了。可见作辅助线可以扩大原题的“已知”，从而使原来不大明显的各个几何量之间的关系明朗起来，从而协助我们推导出结论。

让我们再来看一个例子。

例1. 如图3，两个同心圆中，A、B为大圆上的任意两点，过A、B作小圆的割线AXY和BPQ。

求证： $AX \cdot AY = BP \cdot BQ$

分析：这个例子的“已知”很简单，“结论”倒复杂。条件和结论的因果关系不甚明显。从已知条件中的割线联系到“切割线定理”就可作出小圆的切线AM、BN，这样，结论就变成去证$AM^2 = BN^2$了，也就去证$AM = BN$就行。这两条切线分别延长就成为大圆中的两条弦，因此又联系到同圆中有关弦相等的问题上来了。利用弦、弧、弦心距之间关系的定理再连成线段OM、ON，就不难导出了（证明见附录，下同）。

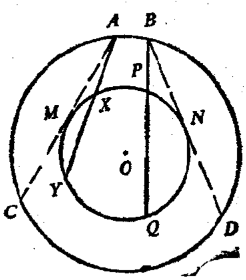

图 3

这个例子告诉我们，用作辅助线的办法来建立几何量之

间的联系，要紧紧抓住已知条件，联系所学过的定理、公理。定理、公理是证题时不可缺的依据，忘了定理或没有充分理解定理的实质，就很难有目的地添设辅助线。

让我们再看一个例子。

例2. 如图4，已知四边形$ABCD$的$AB=DC$，E、F分别是BC、AD的中点，延长BA、EF、CD得两个交角$\angle 1$，$\angle 2$。

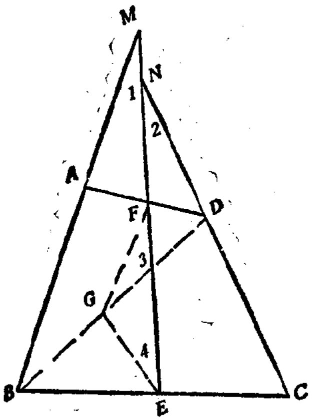

图 4

求证：$\angle 1=\angle 2$。

分析：这个题目的特点是，条件和结论比较分散，交角的两个顶点又不一定正好交于一点，这更增加了证题的困难。如果我们设法把这两个角集中在一块，就比较容易考虑了。由于F是AD的中点，再找到BD的中点G，连成FG，则$FG \parallel BM$，得$\angle 1=\angle 3$，这就把$\angle 1$“搬”到了$\angle 3$。同样连成GE，则$CE \parallel CN$而得$\angle 2=\angle 4$，把$\angle 2$搬到了$\angle 4$。于是只需在$\triangle GFE$中考虑$\angle 3$能否等于$\angle 4$就行了。事实上由于$AB=CD$，利用三角形中位线定理易得$\angle 3=\angle 4$。

这个例子告诉我们，添设辅助线可以把分散的几何量适当集中，以便于思考。

三、辅助线的寻找方法

寻找辅助线是比较棘手的问题。它的规律性并不是一成不变的。有的甚至是好几种方法联合并用，所以，比较困难，但一个最根本的规律是从分析问题入手，紧紧联系已学过的有关几何知识，比如定义、公理、定理、推论、公式等。试添辅助线以后，看看有没有扩大已知，能不能得出一些过渡性结论，而从这些过渡性结论出发，能不能再进一步推导出下一个过渡结论。如果添置辅助线后，左右逢源，路路皆通，那很可能是添得对头，成功的把握性就大；如果添置辅助线后，思路反而更闭塞了，那一定是错了。关于这一点，我们将在下一节详谈。

用运动的观点来观察图形，在许多场合下是添置辅助线的一种行之有效的方法。它是设想把某一有关部分的图形进行对折、旋转、平移或放缩(位似)，从而巧妙地添出辅助线，有效地解决问题。下面我们分别介绍这几种方法。

（一）对折法

“对折法”就是“轴对称变换法”。这是利用“成轴对称的两个图形是全等形”这一原理，把图中的一部分或整个图形，以某一直线为折痕（即对称轴）翻折过来，就得到它的全等形。通过这种变换把较分散的线段、角等集中起来，或者原有的已知扩大，或者各个几何量之间的关系明朗化，所以这是一个通用的好方法。

许多已知的图形都有对称轴，有的较明显，如圆的直径、等边三角形的高、等腰三角形底边上的中线、图形中某角的平分线或某边的垂直平分线、等腰梯形、矩形的平行对

边的中垂线、菱形、正方形的对角线等。如没有现成的对称轴，也可以设想以某直线或线段作对称轴，向它的另一边翻折180°即对称轴的另一边，想象一下翻折过去以后，各个对称点、对称线段或对称的角或其他有关的点、线的分布情况如何？想妥当了，再试添辅助线，而后考虑要证的几何元素与题设的元素之间的几何关系。这样，就会较合理地作出所需要的辅助线来帮助我们进行论证。

例3. 如图5，在直线MN的同旁有两点P、Q，试在MN上求一点R，使$PR+RQ$最短。

分析：设R已经求出，那末PRQ是折线。折线是不是最短，就要看它“拉直”以后是不是最短。因为“两点间的距离以连结这两点所成的线段最短”。把PRQ“拉直”就是线段PQ'。很明显Q'是Q关于直线MN为轴的轴对称点。所以点Q'的得到是运用线段最短定理和轴对称移动而悟出的。

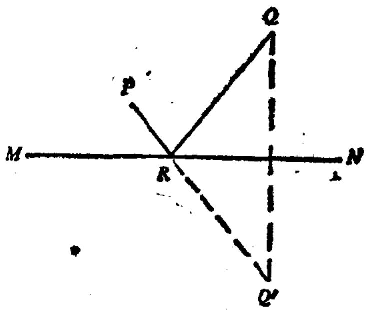

图5

例4. 如图6，在$\triangle ABC$中，AE是$\angle A$的平分线，$\angle BAC=2\angle B$，$AB=2AC$。

求证：$\angle C$是直角。

分析：由于$\angle 1=\angle 2$，若以角平分线AE为对称轴把$\triangle AEC$对折，那么AC必落在AB上，C点落在C'上。$\triangle AEC\cong\triangle AEC'$，从而$\angle AC'E=\angle C$，所以去证$\angle AC'E=90°$即可。而由题设易导出此题的结论。

这题的辅助线添置就运用了轴对称移动的设想而顺利想出的 三角形中遇有已知角平分线，常常运用此法。

上面两个例子是利用“对折法”（轴对称法）去寻找适当的辅助线，由于添置辅助线后可得到全等形，所以能得到的过渡性结论是很多的。比如例4中的$CE=CE$，$\angle AEC'=\angle AEC$等。不过这里用不着它们，故不予列出。

下边我们再看一个例子。

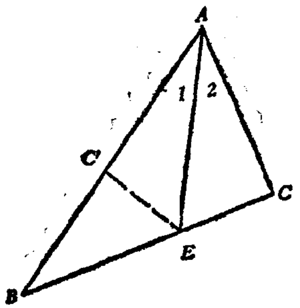

图 6

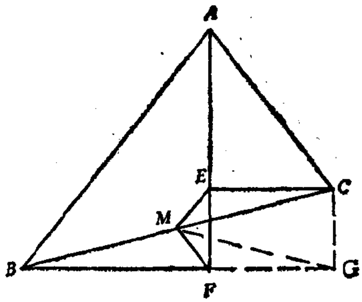

图 7

例5. 如图7，过三角形ABC的顶点A任意作一直线AF，过B、C点分别作AF的垂线BF、CE，垂足分别为F、E，M为BC的中点。

求证： $ME=MF$。

分析：企图证$\angle MFE=\angle MEF$会碰钉子的。碰钉子以后，无妨想象把三角形MEC依EE的垂直平分线对折过来，因为ME要等于MF，所以形成三角形MFG，连成线段CG后，利用直角三角形斜边上的中线定理就易证这两个三角形全等。

（二）平移法

“平移法”即平移变换法。顾名思义，其具体做法就是过某点作某线段或直线的平行线，利用平行线性质——同位角相等、内错角相等，或利用平行四边形诸性质，把有关元素集中起来。

例6． 如图8，已知三角形ABC的两边AB、AC上的中线分别为BD、CE，若$BD=CE$。

求证：$AB=AC$。

分析：已知的两条相等的中线在图中交叉摆着，我们试把它安排在一个三角形中就比较好考虑，于是设想把其中的一条中线CE平行移动到DF位置，这样就成了一个等腰三角形DBF，立即得到$\angle 1=\angle F=\angle 2$，从而得到$GB=GC$，$GD=GE$。要证$BE=CD$就简单了。

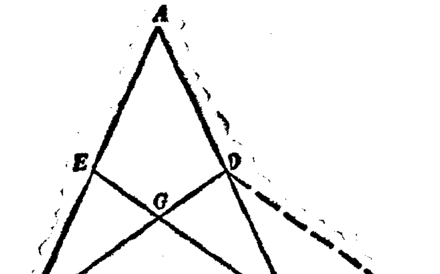

图8

例7． 如图9，已知等腰梯形 $ABCD$ 的中位线为EF，对角线AC、BD互相垂直，高为CG。

求证：$EF=CG$。

分析：这题涉及到的两对互相垂直的线段“互不相关”，

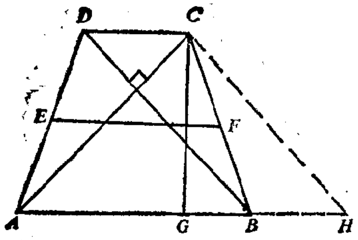

图 9

怎样让它们"集中"一些呢？因为梯形的中位线等于两底和的一半，所以可把小底CD沿DB平行移动到大底上，让"和"体现出来，这样$\triangle CAH$就成了等腰直角三角形，而高CG就成了斜边AH上的中线，由$EF=\frac{1}{2}(AB+CD)=\frac{1}{2}(AB+BH)=\frac{1}{2}AH$及$CG=\frac{1}{2}AH$就可推出结论了。

这两个例子说明利用平行移动方法是集中有关几何量的一个便当、直观的好方法。运用平行移动原理寻找辅助线是常用的重要的方法。

（三）旋转法

旋转变换法比对折法、平行移动法难一些。这里介绍一种简单的、极易做到的实验方法。用一块能看见底图的薄纸盖在底图上，把想要旋转的那部分图形的各顶点用大头针刺个小孔（这时小孔被刺在用来盖住的清洁小块纸上），然后用笔把各小孔连成图形。现在就选好一个旋转中心，用大头针将小纸块钉在这点上，按顺时针或反时针方向试旋转小纸片，让它上面的图形重合于原图形的某一部份上，这样就可以看出辅助线应如何去作了。

很明显，这种方法是把某一图形（经常遇到的是三角形）围绕某定点（三角形的顶点、平行四边形所属的对角线交点及正多边形的中心等）作顺时针或反时针旋转而得一新的图形，用这种想象来启示我们去作辅助线的一种方法，这

种方法能够集中条件，扩大已知，图形之间易于联络、呼应，达到较顺利论证的目的。

旋转变换要利用角或边的相等，因此在正三角形、正方形、正多边形时应用较常见。

例8. 如图10，已知D是等腰三角形ABC内一点，$AB=AC$，$\angle ADB>\angle ADC$。

求证：$DC>DB$。

分析：如果想从$\angle ABC=\angle ACB$分别减去不等的$\angle ABD$、$\angle ACD$而达到$\angle DBC>\angle DCB$的过渡性结论是不易的。因为$\angle ABD$、$\angle ACD$的不等，不能从已知的两个不等的角导出，因此设想把$\triangle ADB$绕着A点旋转到$\triangle AEC$的位置，这样$\angle ADB$就移到了$\angle AEC$位置而变成了$\angle AEC>\angle ADC$了。再连D、E，就得$\angle 1=\angle 2$，从而$\angle 3>\angle 4$，$DC>EC$了。

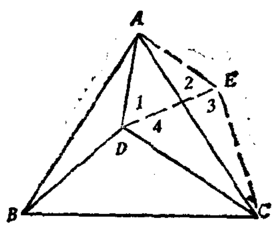

图 10

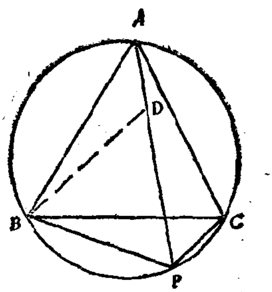

图 11

例9. 如图11，已知正三角形ABC的外接圆的劣弧BC上任意一点P。

求证：$PA=PB+PC$

分析：从图形特点可以看出，PA是最长的线段，当然

可以取出一段AD使之等于PC。得到D点后，跟点B连结好呢，还是跟点C连结？可以这样来设想：把三角形BPC绕着点B向左后方旋转，使BC合于BA，那么BP就合于BD，可见下一步的工作就去证$\triangle BPC\cong\triangle BDA$了。

上面两个例子添置的辅助线是设想把图形的某一部分旋转而获得启发的。在证明中借助这种想象常常可获得满意的结果。下面再研究一个比较难一些的例子。

例10. 如图12，从等腰直角三角形ABC的直角顶点C向中线BD引垂线CE，其垂足为E。延长CE交AB于F。

求证：$\angle BDC=\angle ADF$。

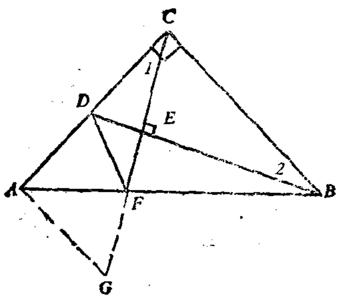

图12

分析：在图中找不出全等的三角形以证明$\angle BDC=\angle ADF$。利用别的等角作媒介也不可能。考虑到有$\angle 1=\angle 2$（同角的余角相等）及$BC=CA$，于是设想把直角$\triangle BCD$围绕AB中点转到图中$\triangle CAG$的位置上，这样实际上$\triangle BCD\cong\triangle CAG$。于是$\angle BDC$也就随之"搬"到了$\angle AGF$的位置。现在证$\angle AGF$等于$\angle ADF$就容易了。

（四）位似法（放缩法）

这种名称的变换方法对同学们比较生疏，但实际上却是很常用的。比方说三角形中位线定理（如图13），我们可以把中位线$A'B'$看成是由线段AB位似变换而得。很明显，$A'B'$被缩小了一半；当然也可以把AB看成由$A'B'$位似变换

而得，这时AB是由$A'B'$扩大2倍而得.线段AB、$A'B'$的对应点A、A'；B、B'的连线都通过点O，点O叫位似中心。它到两个图形上的对应点距离之比称位似比，可用k表示。

位似变换的设想，是把其中的一个图形（它经常是某一线段）看成是由另一个图形按位似比k放大或缩小而得的。把欲证的线段变为易证的线段，或者通过扩大或缩小，让有关线段组成一个新的图形。比较多的是遇到“中点”、“三等分点”、“内、外分线段成某比”等题设时，用位似扩大或缩小法集中条件，而后加以论证。如思考题三第1题，思考题四第1题等。

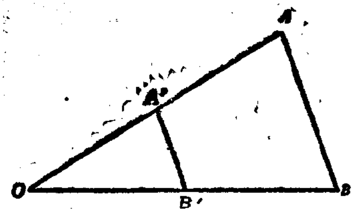

图 13

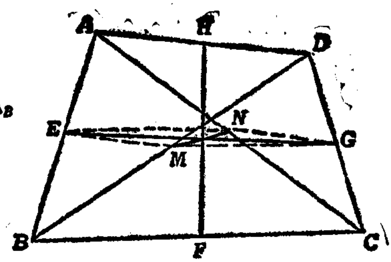

图 14

例11　如图14，$ABCD$为任意四边形，E、F、G、H分别为AB、BC、CD、DA的中点，M、N分别为对角线BD、AC的中点。

求证：EG、HF同过MN的中点。

分析：欲证的三条线段在图中关系不甚“密切”，我们试图把它们安排得较易联系一些，由于题中很多中点，随便