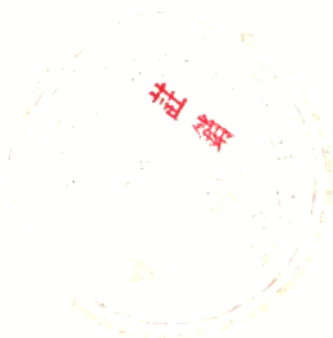


師範學院數學系

近世幾何

試行教學大綱



中華人民共和國教育部

師範學院數學系

近世幾何

試行教學大綱

中華人民共和國教育部編訂

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四號)

京華印書局印刷 新華書店總經售

書號571(教49) 開本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印張 $8 \frac{1}{16}$ 字數6,000

一九五六年三月北京第一版

一九五六年三月北京第一次印刷

印數1—3,500 定價(3) 羊0.05

師範學院數學系

近世幾何試行教學大綱

(甲)說明

(一)本學科設置目的和要求

本學科是在學生已熟習的初等幾何、解析幾何和高等代數的基礎上，系統地學習射影幾何的基本理論，使他們從變換羣的觀點上來了解射影幾何和有關係的幾種幾何學的聯繫。並熟悉幾何學中常用的兩種方法——綜合法與代數法。經過這門學科的學習，使學生一方面能從較高的觀點來處理初等幾何和解析幾何的問題，以便更深入地理解中等學校幾何教材，另一方面使學生掌握近世幾何的一些知識與方法，作為進一步研究幾何學的準備。

(二)本大綱制定原則及實施要項

本大綱是根據部頒師範學院暫行教學計劃的規定並參照蘇聯師範學院射影幾何及画法幾何教學大綱的精神制定的。由歐氏幾何開始，發展到仿射幾何的基本概念後，再到平面射影幾何，使學生熟悉幾何中變換羣的概念，並理解本學科在解析幾何與初等幾何中的應用。

本大綱規定系統地學習射影幾何的原因是由於它的範圍特別廣大，包括其他許多幾何學，例如歐氏幾何、非歐幾何、仿射幾何等。通過它，可以居高臨下地遍察有關的幾何學間的

联系，擴大學生對幾何學的認識；因此在講授過程中，应当隨時插進仿射觀點與度量觀點來作比較。此外，對於非歐幾何的概念，也當做射影幾何的特例而被引進。在這裏應着重講述羣論與幾何學分類法的關係。

本大綱規定本學科的講述方法參用綜合法與代數法。因為用綜合法對某些幾何問題的处理，比較直觀簡捷，而且這種方法對未來中等學校教師的幾何教學是有重要意義的。另一方面，藉助代數方法，幾何學與代數學可以互相結合，並可以更進一步與分析學發生联系，這樣把幾何、代數和分析統一起來，正是近代數學的一種特點。

導言部分主要是概括地提出幾何學內容的豐富性與範圍的廣大性，使學生曉得以前所學的歐氏幾何在整個幾何學裏所處的地位，並使他們知道作為本學科主要內容的射影幾何是如何符合辯證唯物主義的觀點的。這樣，一開始就啓發學生在深度與廣度方面去研究幾何學的積極性。

經過以上的啓發，學生自然會要求深入的了解具體內容，因此開始就在歐氏幾何的基礎上介紹平面仿射幾何的基本概念，作為學習射影幾何的準備，然後建立射影空間，系統地闡明射影幾何的概念，進而結合仿射與歐氏幾何。並且利用變換羣的觀點總結性地對這三種幾何學作出比較。

在學生對這些幾何學的系統與關聯有了一個概括的認識後，就具備了條件來討論圖形的射影、仿射與度量性質。因此更突出地以二次曲線為例來闡述它的三種性質去配合上述的三種幾何學。講到二次曲線的度量性質時，從度量觀念擴充的要求，引入射影測度，由此很自然地介紹非歐幾何概要，然

後再把射影、仿射、歐氏、非歐幾何作一個簡單總結性的比較，得出它們的系統。

大綱內容中各項目的次序與時數的規定不過是一種比較適當的安排，教師可按具體情況作適當的變動，例如(五)中的(1)：關於直線上的射影坐標，可提前引入，以便應用；又如(七)中的(1)——(3)：關於二次曲線的射影定義等，因為和(四)中內容有密切的聯繫，亦可斟酌情況提前緊接着講。關於引入(十)非歐幾何概要，是為了顯示歐氏幾何與非歐幾何如何從射影幾何的觀點來統一；另一方面是為了與四年級的幾何基礎取得聯繫，因此須爭取講授，如有特殊困難可暫不講。

(三)本學科主要內容及時數分配

按照教學計劃，本學科是三年級開設的，每週講授三學時，習作一學時，以全年 29 週計，講授總時數是 87 學時，習作 29 學時，在講授的 87 學時中，第五學期佔 54 學時，第六學期佔 33 學時。本着這樣的規定，本學科主要內容的講授時間分配如下：

第五學期 54 學時

- | | |
|-----------------|-------|
| (1) 導言 | 3 學時 |
| (2) 平面仿射幾何的基本概念 | 9 學時 |
| (3) 射影空間的構造 | 10 學時 |
| (4) 射影幾何的基本概念 | 15 學時 |
| (5) 射影坐標系 | 5 學時 |
| (6) 變換羣與幾何學 | 12 學時 |

第六學期 33 學時

(7) 二次曲線的射影性質	18 學時
(8) 二次曲線的仿射性質	4 學時
(9) 二次曲線的度量性質	6 學時
(10) 非歐幾何概要	5 學時

(乙) 大綱內容

(一) 導言 (3 學時)

这一部分是提供对幾何学全貌的概觀，以及在本学科中佔主要地位的射影幾何的歷史描述，其目的是为了啓發学生探究以後的內容。

- (1) 幾何学的对象：簡單說明幾何学的对象是变换羣下圖形的不变性質，因变换羣的不同，就得出不同的幾何学。
- (2) 幾何学所用的方法：說明幾何学裏常用的幾种方法，因方法的不同，又得出幾种不同的幾何学。
- (3) 幾何元素及其坐标：說明在近世幾何裏，幾何元素不限於點，因採用的幾何元素有所不同，於是又有不同名称的各种幾何学。然後介紹坐标的意义及作用和幾個典型幾何元素的坐标規定法。
- (4) 幾何学的維：說明維的意义，因維數的不同，幾何学又可劃分。在此要指出幾何学的維与空間的維有何區別。
- (5) 射影幾何的沿革和任务。

(二) 平面仿射幾何的基本概念 (9 學時)

这一部分的目的在於初步熟悉幾何变换和不变量的概

念，作为学习射影幾何的準備。

- (1) 一般仿射对应：从平行射影引進透視仿射对应，再由透視仿射对应鏈導出一般仿射对应。
- (2) 仿射不变量与仿射不变性：提出簡比，平行線段的比和平行性等。
- (3) 仿射对应的決定：說明三对对应點決定唯一的仿射对应。
- (4) 平面仿射坐标系。
- (5) 仿射变换的代数表示法及不变點。

(三) 射影空間的構造 (10 学時)

这一部分是从中心射影引進無限远元素，由此擴充了歐氏空間。

- (1) 中心射影。
- (2) 無限远元素及齐次坐标(點坐标与線坐标)的引入：包括無限远點、無限远線、無限远面，从而指出歐氏空間与射影空間的區別。
- (3) 虛元素的引入：藉坐标引入，但不講複射影空間。
- (4) 射影空間元素的从屬關係与順序關係。
- (5) 基本圖形。
- (6) 平面与空間的对偶原理。
- (7) 笛沙格 (*Desargues*) 定理：利用它來說明对偶原理，並举例說明它在初等幾何中的应用。

(四) 射影幾何的基本概念 (15 学時)

这一部分是介紹射影幾何的一些基本概念，作为对象的圖形是一維的。在這裏要密切地联系到初等幾何的应用。

- (1) 完全四點形、完全四線形、調和元素。

(2) 交比的定义及性質。注意調和比是它的一个重要的特例。

(3) 透視对应：中心透視与軸透視。

(4) 射影对应的定义、决定[馮斯套特(*von Staudt*)定理]作圖和代數表示。

注意它是由透視对应鏈所組成的。

(5) 具有公共底(頂)的點列(線束)的射影變換和不变元素。

(6) 对合的定义、决定、代數表示和類別。利用共軸圓的直觀表示。

(五) 射影坐标系 (5 学时)

(1) 直線上的射影坐标及其特例——笛氏坐标，注意其間的联系。

(2) 平面內的射影坐标及其特例——仿射坐标、笛氏坐标等，射影坐标下之直線方程。

(3) 坐标变换：从射影坐标与笛氏坐标間的变换式提到射影坐标与射影坐标間的变换式。

(六) 变换羣与幾何学 (12 学时)

這裏首先介紹二維空間的射影变换。然後从羣的觀點，引出幾何学的系統，最後在这个基礎上來比較歐氏、仿射、射影三種幾何学。

(1) 射影变换的定义、决定和代數表示。

(2) 射影变换的不变元素的存在和决定。

(3) 射影变换的特例：說明由於条件的限制，如何由射影变换推得仿射变换，如何由仿射变换推得运动变换。

(4) 变换羣的定义和例証：說明射影变换羣、仿射变换羣、运

動變換羣以及其間的關係。

- (5) 變換羣與幾何學：說明變換的全体為什麼必須成羣，才有相應的幾何學。簡單介紹克萊因(Klein)的觀點及影響。
- (6) 歐氏、仿射、射影三種幾何學的比較：從基本不變量、基本不變圖形、基本不變性質、變換式、參數數目等各方面來比較三種幾何學。

(七) 二次曲線的射影性質 (18 學時)

- (1) 二次曲線的射影定義：二階(порядок) 曲線和二級(класс) 曲線的射影定義。常態二階曲線與常態二級曲線的統一性。
- (2) 巴斯卡(Pascal)定理與布利安雄(Brianchon)定理及其各種特例，並講述有關的二次作圖問題。舉例指出它們在初等幾何中的應用。
- (3) 二次曲線上的射影對應與對合：包括定義、射影軸與對合軸，不變點。並注意與同一直線上的射影點列和對合點列的類比。
- (4) 配極對應：從調和分割的性質引出極點與極線的定義，注意它們和切點切線間的關係，並且從它們的對應關係引出配極對應的代數表示，然後再推廣到一般的異素對應。
- (5) 射影分類。
- (6) 笛沙格關於對合的定理。

(八) 二次曲線的仿射性質 (4 學時)

- (1) 中心、共軛直徑。
- (2) 漸近線。
- (3) 仿射分類。

(九) 二次曲線的度量性質 (6 學時)

(1) 圓點, 迷向直線, 拉格爾 (Laguerre) 公式。

(2) 主軸, 焦點與準線。

(十) 非歐幾何概要 (5 學時)

在這裏介紹非歐幾何的特徵時, 只要求根據射影測度的觀念來說明。

(1) 射影測度: 從拉格爾定理的擴充, 導出交角的射影測度, 然後根據對偶方法引出距離的測度。

(2) 羅巴切夫斯基幾何: 規定射影測度的絕對圖形如果是常態實二次曲線, 就得出羅氏幾何。由此扼要地敘述羅氏幾何的二個基本特徵, 即過一點有二條直線與已知直線平行, 三角形內角之和小於 π (舉例說明)。

(3) 黎曼幾何: 規定射影測度的絕對圖形如果是常態虛二次曲線, 就得出黎氏幾何, 由此扼要地敘述黎氏幾何的二個基本特徵, 即過一點根本沒有直線與已知直線平行, 三角形內角之和大於 π (舉例說明)。

(4) 幾何學的系統: 從射影幾何的觀點統一地討論歐氏、羅氏、黎氏幾何學。

(丙) 參考資料

(一) 主要參考資料:

(1) 蘇聯師範學院射影幾何及画法幾何教學大綱 (1955 年)。

(2) Н. Ф. Четверухин, Проективная геометрия.

東北師大幾何教研室譯, 射影幾何學。

(3) Н. В. Ефимов, Высшая геометрия.

裘光明譯, 高等幾何学。

(4) С. П. Флиппков, Аналитическая геометрия.

葉述武譯, 解析幾何学。

(5) 孫澤瀛編, 近世幾何学(華東師大講義)。

(二) 其他參考資料:

(6) Н. И. Мухелишвили, Курс аналитической геометрии.

中山大學幾何教學小組譯, 解析幾何学教程。

(7) О. А. Вольберг, Основные идеи проективной геометрии.

(8) D. J. STRUIK, LECTURES ON ANALYTIC AND
PROJECTIVE GEOMETRY. (1953 年)

(9) F. KLEIN, HÖHERE GEOMETRIE.

(10) W. C. GRAUSTEIN, HIGHER GEOMETRY.

(11) F. C. WOODS, HIGHER GEOMETRY.

(12) F. T. HOLGATE, PROJECTIVE PURE GEOMETRY.
黃新鐸譯, 射影純正幾何学。

(13) CREMONA, PROJECTIVE GEOMETRY.

(14) O. VEBLEN AND YOUNG, PROJECTIVE GEOMETRY.