中学数学解题丛书

高中代数

解题错误分析

时承权
戴再平
编著

黑龙江科学技术出版社

高中代数
解题错误分析

时承权　戴再平　编著

黑龙江科学技术出版社

1987年·哈尔滨

责 任 编 辑：翟明秋
封 面 设 计：洪 冰

高中代数解题错误分析

时承权 戴再平 编著

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
木兰印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 12.5印张 255千字
1986年3月第1版·1987年9月第2次印刷
印数：11,331—20,330
书号：13217·148　　定价：2.50元

前　言

数学是一门应用广泛的基础学科，是学习和研究其他科学的有力工具。数学是中学的一门基础课，学好中学数学对于学生接受更高深的科学知识和参加生产劳动都有十分重要的作用。

解题在数学学习中有着特殊重要的意义，解题能力是掌握知识程度的主要标志。在数学里，才智就是解决问题。有些学生虽然对概念、定理背得烂熟，但是在解答非常简单的题目时却会糊涂起来。有些学生只具有一般的解题本领，一遇到形式不熟或没见过的题目，就茫然不知所措或者错误地进行解答。

在解答数学问题时，常常出现的典型性错误有：概念不清造成的概念性错误；忽视条件、错用结论造成的知识性错误；违反逻辑规律造成的逻辑性错误；以偏概全、以特殊代一般造成的方法性错误等等。

为了学会解题，除了弄清概念和做解题练习以外，一个很好的办法是分析错误的题目解答，寻求正确的解题方法和规律。哈尔滨市数学会为了帮助中学生从解答数学问题的错误中吸取经验教训，寻找解题方法和规律，提高解题能力；同时，也为了给中学数学教师提供一些在数学中分析典型错例的方法，以指导学生解答题目，提高教学质量，特组织哈尔滨市几位有丰富教学经验和长期从事教学研究的同志，编

著了这套中学数学解题错误分析丛书。

本套丛书是根据中学数学教学大纲，配合通用教材分科按章编写的。书中所列题目具有典型性，错误解法具有普遍性。这套丛书共分五册，高中代数由时承权、戴再平编著；立体几何由王万祥编著；平面解析几何由邵旭、冯建国编著；初中代数由王翠满、马明珠编著；平面几何由唐格森、王国器编著。哈尔滨市教育学院王万祥副院长和我审阅了各册原稿。

书中错误之处，敬请广大读者批评指正。

哈尔滨市数学会秘书长
黑龙江大学数学系副教授　颜秉海

1985年4月

目　录

第一章　集合、对应与函数

学习基本要求

解有关集合、对应与函数的问题要求：理解集合、有限集、无限集等概念；掌握集合元素的确定性、无序性、互异性；集合的两种表示法——列举法、描述法，一些数集的符号——N（自然数集）、Z（整数集）、Q（有理数集）、R（实数集）、Q^+（正有理数集）、Q^-（负有理数集）、R^+(正实数集）、R^-（负实数集),属于符号$\in$，不属于符号$\notin$。

掌握子集、真子集、交集、并集、全集、补集、空集等概念；有关符号：$\subseteq$、$\supseteq$、$\nsubseteq$、$\nsupseteq$、$\subset$、$\supset$、$\not\subset$、$\not\supset$、ϕ、I、$\overline{A}$。

还要掌握对应、映射、一一映射、逆映射、函数、反函数等概念，以及函数的定义域、值域的求法。

解答集合与映射的问题，容易发生下列几方面的错误：

1. 不能确切掌握集合的概念，违背对集合元素的确定性、无序性、互异性的要求的错误。

2. 关于集合运算的错误。

3. 违背映射、一一映射、逆映射等概念的错误。

4. 关于函数的定义域和值域的求法和表示方法的错误。

我们在解题时，应准确运用有关概念和公式，防止发生以上错误。

解题错误分析

例 1　试举出一些集合的例子.

【错误解法】　(1) {我班个子较高的同学},

(2) {有趣的故事},

(3) {所有的动物和植物构成的生物集合}

【错因分析】　构成一个集合的条件是：能确定哪些对象是属于这个集合的，哪些对象是不属于这个集合的.

(1)、(2)中的对象不能确定，不能作为集合的例子.(3)生物的集合由所有动物、植物和微生物构成，这里漏掉了微生物.

例 2　已知函数 $y=2x^2+1, x\in\{-2,-1,0,1,2\}$，求函数的值域.

【错误解法】　函数 $y=2x^2+1, x\in\{-2,-1,0,1,2\}$的值域是 $\{7,1,-1,1,7\}$.

【错因分析】　上述的解答违背了"一个元素在一个集合里不能重复出现"的规定，所以是错误的. 正确的值域是$\{7,1,-1\}$.

例 3　写出集合$\{a,b,c\}$的所有子集.

【错误解法】　集合$\{a,b,c\}$的所有子集是：$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{a,b\}$、$\{b,a\}$，$\{a,c\}$、$\{c,a\}$、$\{b,c\}$、$\{c,b\}$.

【错因分析】　上述解答有两处错误：(1) 疏忽了"空集是任何集合的子集"及"任何集合是它本身的子集"，因而遗漏了两个子集；(2)$\{a,b\}$与$\{b,a\}$，$\{a,c\}$与$\{c,a\}$，$\{b,c\}$与

$\{c,b\}$ 分别是同一集合，因而多写了三个子集。

【正确解法】 集合$\{a,b,c\}$的所有子集是：ϕ、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{a,b\}$、$\{b,c\}$、$\{a,c\}$、$\{a,b,c\}$。

例 4 写出方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=1, \\ 3x-2y=3 \end{cases}$$

的解的集合。

【错误解法】（1） $\left\{x=\dfrac{11}{13},\ y=-\dfrac{3}{13}\right\}$。

（2） $\left\{\begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix} \middle| \begin{cases} x=\dfrac{11}{13}, \\ y=-\dfrac{3}{13} \end{cases}\right\}$。

（3） $\left\{\dfrac{11}{13},\ -\dfrac{3}{13}\right\}$。

（4） $\left\{\left(x=\dfrac{11}{13},\quad y=-\dfrac{3}{13}\right)\right\}$。

【错因分析】 上述解法产生错误的原因是没弄清方程组解集的元素是什么。把$\dfrac{11}{13}$和$-\dfrac{3}{13}$看成解集的元素，便产生(3)的错误.(1)除了犯有(3)的错误之外，写法也是不当的。(2)、(4)虽然注意到有序实数对$\left(\dfrac{11}{13},\ -\dfrac{3}{13}\right)$是解集的一个元素，但是写法上又画蛇添足。正确答案是：

$$\left\{\left(\frac{11}{13},\ -\frac{3}{13}\right)\right\}。$$

例 5 设 A 为有理数集合，B 为无理数集合，求 $A\cup B$

及 $A\cap B$.

【错误解法】 $A\cup B=\{R\}$, $A\cap B=\{\phi\}$.

【错因分析】 ϕ 表示空集，$\{\phi\}$则表示以 ϕ 为元素的非空集合. 所以把空集写成$\{\phi\}$是错误的.同样,把实数集写成$\{R\}$也是错误的. 正确的答案是：$A\cup B=R, A\cap B=\phi$.

例 6 设 $A=$ {锐角三角形}，$B=$ {钝角三角形}，求 $A\cap B$.

【错误解法】 因为锐角三角形、钝角三角形都可以是等腰三角形，即等腰三角形属于集合 A 又属于集合 B，所以 $A\cap B=$ {等腰三角形}.

【错因分析】 上述解答错误的原因是对交集这个概念理解不清，以及不懂三角形的分类原则.

集合 A 和集合 B 的交集 $A\cap B$ 的定义为 $\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$，它作为集合 A 与 B 进行交运算的结果，其元素不仅同时属于集合 A 与 B，而且还应同时保持集合 A 与 B 的元素的特性.

我们知道，把一个概念划分为若干个属概念，只能依据一个标准进行. 对三角形来说，以其最大内角的大小为标准，可以将三角形分类为：

三角形
- 直角三角形
- 斜三角形
  - 锐角三角形
  - 钝角三角形

若以三角形相等的边数为标准，又可以把三角形分类为：

三角形
- 不等边三角形
- 等腰三角形
  - 底和腰不相等的等腰三角形
  - 等边三角形

可见划分的标准不同，分类也就不相同．尽管锐角三角形和钝角三角形都可以是等腰三角形，但等腰三角形不会同时具有锐角三角形和钝角三角形的特性，因此不可能属于它们的交集．

如果锐角三角形和钝角三角形的交集是非空集合，那么必有一个以内角的大小为特性的三角形同时属于锐角三角形和钝角三角形，这与由一个标准划分出来的两个属概念互相排斥是矛盾的．因此$A\cap B=\phi$．

例 7 设$A=\{$参加百米赛跑的同学$\}$，$B=\{$参加跳高的同学$\}$，求$A\cap B$．

【错误解法】 $A\cap B=\{$参加百米赛跑的同学和参加跳高的同学$\}$．

【错因分析】 汉语中的“和”字的意义比较广泛，在集合的交并运算中使用它可能含混，所以应尽量避免使用它．

【正确解法】 $A\cap B=\{$参加百米赛跑并且参加跳高的同学．

例 8 下列各题中的两个集合之间是否可以建立一一映射？若能，则给出一个对应法则．

(1) $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$B=\{2,4,6,8\}$；

(2) $A=\{x|x\in N\}$，$B=\{y|y=2n,\ n\in N\}$．

【错误解法】 (1) 由于$B\subset A$，集合A的元素的个数多于集合B的元素的个数，故不可能满足集合A中的每一个元素在集合B中都有唯一的元素与之对应，且集合A的不同元素在集合B中也不能有不同的象．故集合A与B之间不能建立一一映射．

（2）因为 A 是自然数集，B 是正偶数集，$B\subset A$，故集合 A 的元素比集合 B 的元素多，根据(1)中同样的道理，A 与 B 之间不可能建立一一映射。

【错因分析】 （1）中的集合 A 与 B 都是有限集合，如果 $A\supset B$，那么集合 A 与 B 之间不可能建立一一映射，这是正确的。但是(2)中的集合 A、B 都是无限集合，套用有限集合的上述结论就引起了错误。

事实上，我们按照对应法则 f：$x\to y=2x$，$x\in N$，就可以建立由集合 A 到集合 B 的一一映射。

例 9 按照对应法则 f：$x\to y=\dfrac{1+x}{1-x}$ 建立集合 $A=\{x|x\in R\}$ 到集合 $B=\{y|y\in R\}$ 的对应关系，问这个映射是否是一一映射？

【错误解法】 因为集合 A、B 都是实数集，两个实数集合之间是可以建立一一映射的，所以按照对应法则 f，可以建立 A 到 B 的一一映射。

【错因分析】 两个实数集合之间可以建立一一映射是一回事，两个实数集合之间按照某种确定的对应法则 f 建立的对应是否为一一映射则是另一回事。前者是指可以存在一种对应法则使两个实数集之间建立一一映射；后者由于对应法则已经确定，就需要具体研究，才能判断所建立的对应是否是一一映射。本题中的对应法则 f，使集合 A 中的元素 1，在集合 B 中没有象，不是映射，更不是一一映射（在集合 A 到 B 之间）。

例 10 下列各题中的两个函数是同一函数吗？

(1) $f_1(x)=\lg x^2$, $\varphi_1(x)=2\lg x$;

(2) $f_2(x)=\lg x^3$, $\varphi_2(x)=3\lg x$。

【错误解法】 由于 $\lg N^n=n\lg N$，所以（1）、（2）中的两个函数都是同一函数。

【错因分析】 两个函数的对应关系相同，并且定义域也相同时，才能说它们是同一函数。

本题中的函数表达式恒等，只能说明两个函数的对应关系相同，并不能说明两个函数的定义域相同。所以仅根据函数表达式恒等就说它们是同一函数是欠周严的。

【正确解法】 （1）虽然 $\lg x^2\equiv 2\lg x$，但是函数 $f_1(x)$ 的定义域是 $\{x|x\in R,\ x\neq 0\}$，和 $\varphi_1(x)$ 的定义域 $\{x|x>0\}$ 不同，所以它们不是同一函数。

（2）由于 $\lg x^3\equiv 3\lg x$，且函数 $f_2(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的定义域都是 $\{x|x>0\}$，故它们是同一函数。

例 11 求函数 $f(x)=\sqrt{\log_{0.1}\dfrac{3x-2}{2x+1}}$ 的定义域。

【错误解法】 $\log_{0.1}\dfrac{3x-2}{2x+1}>0$,

$$\therefore\ \frac{3x-2}{2x+1}\leqslant 1,\quad 3x-2\leqslant 2x+1,\quad x\leqslant 3.$$

函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\leqslant 3\}$。

【错因分析】 上述解法中有两处错误：（1）忽视了对数的真数应大于零；（2）解分式不等式时有错误。不应该用 $2x+1$ 乘以不等式两边。

【正确解法】 为使函数 $f(x)$ 有意义，需要

$$\begin{cases}\dfrac{3x-2}{2x+1}>0, \\ \log_{0.1}\dfrac{3x-2}{2x+1}\geqslant 0;\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}(3x-2)(2x+1)>0, \\ \dfrac{3x-2}{2x+1}\leqslant 1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x<-\dfrac{1}{2} \text{ 或 } x>\dfrac{2}{3}, \\ -\dfrac{1}{2}<x\leqslant 3.\end{cases} \quad \therefore \quad \frac{2}{3}<x\leqslant 3.$$

函数的定义域为 $\{x|\frac{2}{3}<x\leqslant 3\}$.

例 12 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ 的定义域和值域.

【错误解法】 由 $x+1\geqslant 0$，得定义域 $[-1,+\infty]$.

设 $t=\sqrt{x+1}$， 则 $y=\dfrac{t}{t^2+1}$. 得

$$yt^2-t+y=0.$$

$\because$ t 是实数， $\therefore$ $\Delta=1-4y^2\geqslant 0$.

$$\therefore \quad -\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}.$$

函数的值域是 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

【错因分析】 上述解法未考虑在定义域$[-1,+\infty)$上，$\sqrt{x+1}\geqslant 0$，$x+2\geqslant 1$，故 $y\geqslant 0$. 转化为 t 的一元二次方程之后，扩大了 y 的取值集合.

【正确解法】 由 $x+1\geqslant 0$，求得定义域为 $[-1,+\infty)$. 在定义域上有 $y\geqslant 0$.

设 $t=\sqrt{x+1}$，　则　$y=\dfrac{t}{t^2+1}$，即

$$yt^2-t+y=0.$$

(1) 当 $y\neq 0$ 时，上面方程有两个非负实数根（$\because t\geqslant 0$），所以有

$$\begin{cases}\Delta=1-4y^2\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{y}\geqslant 0,\\ \dfrac{y}{y}\geqslant 0.\end{cases}\qquad \text{解之得}\quad 0<y\leqslant\frac{1}{2}.$$

(2) 当 $y=0$ 时，$t=0$，合乎要求。

考虑 (1)、(2) 得函数的值域 $[0,\frac{1}{2}]$。

例 13　求函数 $y=\dfrac{1}{x-3}$ 的定义域。

【错误解法】　$\because\ x-3\neq 0$，　$\therefore\ x\neq 3$。

【错因分析】　这个解答所答非所问，因为原题并没有问 x 等于什么。答案写法不当。正确答案应为 $\{x|x\in R, x\neq 3\}$ 或 $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$。

例 14　李明买每支 2 元钱的钢笔，他共有 12 元钱，试将他所买钢笔的总价 y 表示为钢笔的只数 x 的函数。

【错误解法】　$y=2x$。

【错因分析】　上述函数没有指明定义域，因此 x 可以取任意实数，这不符合题意。正确的答案是：$y=2x, x\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$。

例 15　判断函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性。

【错误解法】 $f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{1+x^2})$,

$\because$ $f(x)\neq f(-x)$, $f(-x)\neq -f(x)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$既非偶函数也非奇函数。

【错因分析】 实际上

$$
\begin{aligned}
f(-x)&=\log_a(-x+\sqrt{1+x^2})\\
&=\log_a\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\\
&=\log_a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}\\
&=-\log_a(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).
\end{aligned}
$$

所以函数 $f(x)$是奇函数。上述解法忽视了

$\log_a(-x+\sqrt{1+x^2})=-\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$,仅根据左边的表面形式不同于 $-f(x)$, 就下断言，故得出错误的结论。

【注】 如果 $f(x)$与 $f(-x)$的形式不同，我们难以判断函数的奇偶性时，可以作运算：$f(x)\pm f(-x)$，如果 $f(x)+f(-x)=0$, 则 $f(x)$ 是奇函数；如果 $f(x)-f(-x)=0$, 则 $f(x)$ 为偶函数。如本题，就可以由 $f(x)+f(-x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})+\log_a(-x+\sqrt{1+x^2})=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})(-x+\sqrt{1+x^2})=\log_a 1=0$, 判断出 $f(x)$ 为奇函数。

例 16 求函数的值域：$y=\dfrac{3x^2-6x-15}{x^2-2x-5}$.

【错误解法】 将原式变形为

$$(y-3)x^2+(-2y+6)x+(-5y+15)=0.$$