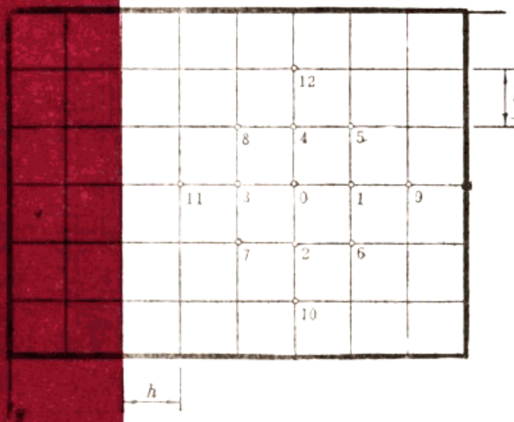


弹性力学专题教材

弹性力学中的差分方法

徐芝纶

高等教育出版社

弹性力学专题教材

弹性力学中的差分方法

徐芝纶

高等教育出版社

弹性力学专题教材

弹性力学中的差分方法

徐芝纶

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 4 字数93 000

1989 年 3 月第 1 版 1989 年 3 月第 1 次印刷

印数 0001— 1 130

ISBN7-04-000880-7/TU·30

定价 1.05 元

前　言

本书是与《弹性力学简明教程》配套使用的专题教材，供高等学校水利、土建类专业高年级课程中采用，亦可供有关专业的研究生和工程技术人员参考。

全书共分四章。第一章讲述平面问题的差分解法。由于应力边界问题的差分解法已在《弹性力学简明教程》中予以介绍，故本章中只讲述位移边界问题及混合边界问题的差分解法。第二章及第三章分别讲述等截面直杆扭转问题及薄板弯曲问题的差分解法。第四章讲述温度应力问题的差分解法。因《弹性力学简明教程》中没有涉及温度应力，故在讲述差分解法之前推导了基本微分方程。为了可以利用第一章及第三章中已有的差分图式，本章中多处引用了变温的等效荷载这一概念。

本书第一章及第四章中的内容，大部分系摘自编者近几年间所得的科研成果，不够成熟，错误难免，特别恳请读者予以审核指正。

本书承郑州工学院寿楠椿同志审阅，并提出了宝贵意见，特此表示衷心的感谢。

徐芝纶

1987年8月

目　　录

第一章　平 面 问 题

§1.1 差 分 公 式

读者在《弹性力学简明教程》中已经看到，用差分法求解弹性力学问题，就是通过差分公式，把问题的基本方程和边界条件（一般均为微分方程）化为差分方程（代数方程），把微分方程的求解化为代数方程的求解，从而得到问题的数值解答。虽然在该教程中已对差分公式进行了简单的介绍，这里仍有必要加以复习和补充。

我们在弹性体上用相隔等间距 h 而平行于坐标轴的两组平行线织成网格，图 1.1.1。设 $f=f(x,y)$ 为弹性体内的某一个连续函数（它可能是某一个位移分量或者应力分量，或者应力函数，等等）。这个函数，在平行于 x 轴的一根网线上，例如在 3-0-1 上，它

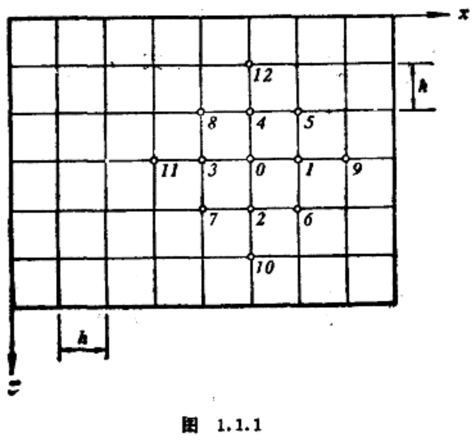


图 1.1.1

只随 x 坐标的改变而变化。在结点 0 的近处，函数 f 可以展为泰勒级数如下：

$$f=f_0+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0(x-x_0)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0(x-x_0)^4+\cdots, \tag{a}$$

在以后，我们将只考虑离结点 0 充分近的那些结点，如图 1.1.1 所示，因而所用到的 x 值都和 x_0 相差不大，也就是说，$x-x_0$ 是充分小的。于是可以不计 $x-x_0$ 的三次幂及更高次幂的各项，而将式 (a) 简写成为

$$f=f_0+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0(x-x_0)^2. \tag{b}$$

在结点 3 及结点 1，x 分别等于 x_0-h 及 x_0+h，即，$x-x_0$ 分别等于 $-h$ 及 h。代入式 (b)，得

$$f_3=f_0-h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \tag{c}$$

$$f_1=f_0+h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0. \tag{d}$$

联立求解 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ 及 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$，即得差分公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=\frac{f_1-f_3}{2h}, \tag{1.1.1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0=\frac{f_1+f_3-2f_0}{h^2}. \tag{1.1.2}$$

同样，如果在网线 4-0-2 上取

$$f=f_0+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0(y-y_0)^2, \tag{e}$$

则将得到

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=\frac{f_2-f_4}{2h}, \tag{1.1.3}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0=\frac{f_2+f_4-2f_0}{h^2}. \tag{1.1.4}$$

公式(1.1.1)至(1.1.4)是基本差分公式，可以从而导出其他的差分公式。例如，利用(1.1.1)及(1.1.3)，可以导出混合二阶导数的差分公式如下：

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_0=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_3}{2h}$$

$$=\frac{\frac{f_6-f_5}{2h}-\frac{f_7-f_8}{2h}}{2h}=\frac{1}{4h^2}\Big[(f_6+f_8)-(f_5+f_7)\Big]. \tag{1.1.5}$$

基本差分公式(1.1.1)至(1.1.4)，是以相邻三结点处的函数值来表示中间结点处的导数值，可称为中点导数公式。有时也需要用到另一种形式的差分公式，它们以相邻三结点处的函数值来表示一个端点处的导数值，可称为端点导数公式，导出如下。

先把导数$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$用 f_0、f_1、f_9 来表示。为此，在式 (b) 中命 $x=x_0+2h$，即 $x-x_0=2h$，得出

$$f_9=f_0+2h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+2h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \tag{f}$$

再从式(d)及式(f)中消去$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$，即得端点导数公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=\frac{-3f_0+4f_1-f_9}{2h}. \tag{1.1.6}$$

同样也可以把导数$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$用 f_0、f_3、f_{11} 来表示。为此，在式(b)中命 $x=x_0-2h$，即 $x-x_0=-2h$，得出

$$f_{11}=f_0-2h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+2h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \tag{g}$$

再从式(c)及式(g)中消去$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$，又可得端点导数公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=\frac{3f_0-4f_3+f_{11}}{2h}. \tag{1.1.7}$$

与上相似，也可以导出端点导数公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=\frac{-3f_0+4f_2-f_{10}}{2h}, \tag{1.1.8}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=\frac{3f_0-4f_4+f_{12}}{2h}. \tag{1.1.9}$$

对于二阶导数，端点导数公式的导出是非常简单的。在结点 1 至结点 3 之间，函数 f 已被近似地作为 x 的二次函数，所以二阶导数是常量，从而由(1.1.2)有

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_3=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_1=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0=\frac{f_1+f_3-2f_0}{h^2}. \tag{1.1.10}$$

同样可由(1.1.4)有

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_4=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_2=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0=\frac{f_2+f_4-2f_0}{h^2}. \tag{1.1.11}$$

应当指出，端点导数公式与中点导数公式相比，精度较差。因此，我们总是尽可能应用中点导数公式，而只有在无法应用中点导数公式时，才不得不应用端点导数公式。

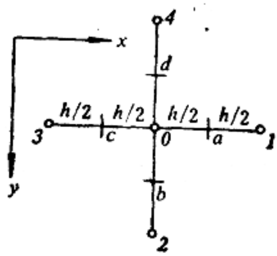


图 1.1.2

这里附带再导出后面要用到的插值公式。设 a 点是网线段 0-1 的中点，如图 1.1.2 所示，它的坐标是 $x=x_0+\frac{h}{2}$，因而有 $x-x_0=\frac{h}{2}$。代入式(b)，得

$$f_a=f_0+\frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\frac{h^2}{8}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0.$$

将(1.1.1)及(1.1.2)代入，得

$$f_a=f_0+\frac{h}{2}\left(\frac{f_1-f_3}{2h}\right)+\frac{h^2}{8}\left(\frac{f_1+f_3-2f_0}{h^2}\right),$$

简化以后得

$$f_a=\frac{1}{8}(3f_1+6f_0-f_3). \tag{1.1.12}$$

同样，对于网线段 3-0 的中点 c，可以得出

$$f_c=\frac{1}{8}(3f_3+6f_0-f_1). \tag{1.1.13}$$

对于网线段 0-2 的中点 b 和网线段 4-0 的中点 d，同样可以得出

$$f_b=\frac{1}{8}(3f_2+6f_0-f_4), \tag{1.1.14}$$

$$f_d=\frac{1}{8}(3f_4+6f_0-f_2). \tag{1.1.15}$$

§1.2 只具有位移边界条件的平面问题

在《弹性力学简明教程》中，已经讲述了平面问题的应力函数差分解。对于只具有应力边界条件的单连体的平面问题，可以通过这种差分解比较简便地求得应力分量的数值。但是，对于多连体，即使它只具有应力边界条件，求解也是相当繁难的，因为这时要用到位移单值条件。在弹性体具有位移边界条件或混合边界条件的情况下，则更难以利用应力函数的差分解。另一方面，即使已由应力函数差分解求得了应力分量的数值，再求出位移分量，也是很困难的。

在以下几节中可见，如果利用位移分量的差分解，则不论弹性体具有何种边界条件，也不论这弹性体是单连体还是多连体，总可以求得位移分量的数值，并可以从而求得应力分量的数值。本节中先讨论只具有位移边界条件的平面问题。

按位移求解平面应力问题时，基本未知函数是位移分量 u 和

v,而基本微分方程是(见《弹性力学简明教程》的§2-7):

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+X=0,\\ \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)+Y=0.\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

对于平面应变问题,须在式(a)中将E换为$\frac{E}{1-\mu^2}$,将μ换为$\frac{\mu}{1-\mu}$.

将微分方程(a)应用于任一典型结点0,图1.1.1,得

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0+\frac{1+\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)_0\right]+X_0=0,\\ \frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_0+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0+\frac{1+\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)_0\right]+Y_0=0.\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

应用差分公式(1.1.2)、(1.1.4)及(1.1.5),即得出与方程(b)相应的差分方程,整理如下:

$$\frac{E}{8(1-\mu^2)}[8(3-\mu)u_0-8(u_1+u_3)-4(1-\mu)(u_2+u_4)$$
$$+(1+\mu)(v_5-v_6+v_7-v_8)]=h^2X_0, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{E}{8(1-\mu^2)}[8(3-\mu)v_0-8(v_2+v_4)-4(1-\mu)(v_1+v_3)$$
$$+(1+\mu)(u_5-u_6+u_7-u_8)]=h^2Y_0. \quad (1.2.2)$$

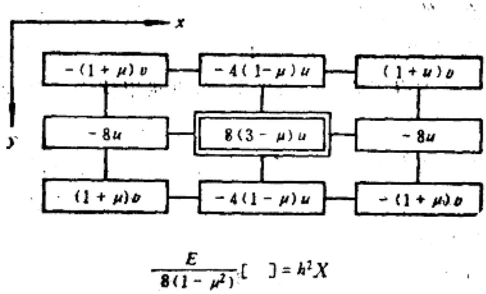
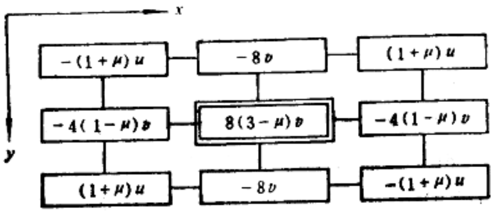


图 1.2.1



$$\frac{E}{8(1-\mu^2)}[\qquad]=h^2Y$$

图 1.2.2

为了计算时的方便，在图 1.2.1 及 1.2.2 中分别示出差分方程(1.2.1)及(1.2.2)的图式。

例题(一) 设有 $3h\times3h$ 的正方形薄板，图 1.2.3，其边界结点的位移分量为已知(图中每结点左边的数字表示 u 值，右边的数字表示 v 值，单位为 η)。不计体力，取 $\mu=0.1$。

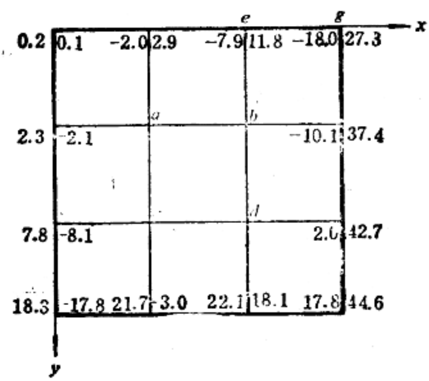


图 1.2.3

按照图 1.2.1 及图 1.2.2 所示的差分图式，注意 $X=Y=0$，可以立出相应于未知值 u_a、v_a、u_b、v_b、u_c、v_c、u_d、v_d 的 8 个差分方程

如下：

$$-1.1(0.1)-4(0.9)(-2.0)+1.1(11.8)-8(2.3)$$
$$+8(2.9)u_a-8u_b+1.1(-8.1)-4(0.9)u_c-1.1v_d=0, \quad (u_a)$$
$$-1.1(0.2)-8(2.9)+1.1(-7.9)-4(0.9)(-2.1)$$
$$+8(2.9)v_a-4(0.9)v_b+1.1(7.8)-8v_c-1.1u_d=0, \quad (v_a)$$
$$-1.1(2.9)-4(0.9)(-7.9)+1.1(27.3)-8u_a+8(2.9)u_b$$
$$-8(-10.1)+1.1v_c-4(0.9)u_d-1.1(42.7)=0, \quad (u_b)$$

……………………………………………………………

简化以后，得到

$$23.2u_a-8u_b-3.6u_c-1.1v_d=7.24,$$
$$23.2v_a-3.6v_b-8v_c-1.1u_d=15.97,$$
$$-8u_a+23.2u_b+1.1v_c-3.6u_d=-89.11,$$

……………………………………………

联立求解，得到（单位为 η）：

$$u_a=2.09, v_a=4.81, u_b=-2.03, v_b=17.85,$$
$$u_c=9.87, v_c=2.83, u_d=7.92, v_d=19.86.$$

通过物理方程和几何方程，可以求得应力分量。例如，对于内结点 b，我们有

$$(\sigma_x)_b=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_b+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b\right].$$

应用中点导数公式(1. 1. 1)及(1. 1. 3)，得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_b=\frac{-10.1\eta-u_a}{2h}, \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b=\frac{v_d-11.8\eta}{2h}.$$

代入上式，并将 u_a 及 v_d 的数值代入，得

$$(\sigma_x)_b=\frac{E}{1-0.1^2}\left(\frac{-10.1\eta-2.09\eta}{2h}+0.1\ \frac{19.86\eta-11.8\eta}{2h}\right)$$
$$=-5.75E\eta/h.$$

同样可得

$$(\tau_{xy})_b=\frac{E}{2(1+\mu)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_b+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_b\right]=\frac{E}{2(1+0.1)}$$

$$\cdot\left[\frac{7.92\eta-(-7.9\eta)}{2h}+\frac{37.4\eta-4.81\eta}{2h}\right]=11.00E\eta/h.$$

计算边界结点及角隅结点处的应力分量时，就必须应用端点导数公式。例如，对于$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_e$，应用公式(1. 1. 8)，可以求得

$$(\sigma_y)_e=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_e+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e\right]$$

$$=\frac{E}{1-0.1^2}\left[\frac{-3(11.8\eta)+4(17.85\eta)-19.86\eta}{2h}\right.$$

$$\left.+0.1\,\frac{-18.0\eta-(-2.0\eta)}{2h}\right]=7.34E\eta/h;$$

应用公式(1. 1. 8)及(1. 1. 7)，可以求得

$$(\tau_{xy})_g=\frac{E}{2(1+\mu)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_g+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_g\right]$$

$$=\frac{E}{2(1+0.1)}\left[\frac{-3(-18.0\eta)+4(-10.1\eta)-2.0\eta}{2h}\right.$$

$$\left.+\frac{3(27.3\eta)-4(11.8\eta)+2.9\eta}{2h}\right]=12.42E\eta/h.$$

例题(二) 设有四边固定的 $2h\times 4h$ 的薄板，图 1. 2. 4，其密度为 ρ，泊松比为 $\mu=0.2$。试求自重引起的位移。

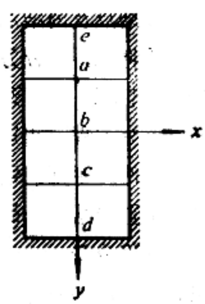


图 1.2.4

由于对称，$u_a=u_b=u_c=0$，而未知值仅为 v_a、v_b 及 v_c。注意 $Y=\rho g$，利用图 1. 2. 2 所示的差分图式，立出相应于 v_a、v_b、v_c 的差分方程如下：

$$\frac{E}{8(1-0.2^2)}[8(2.8)v_a-8v_b]=h^2\rho g, \tag{v_a}$$

$$\frac{E}{8(1-0.2^2)}[-8v_a+8(2.8)v_b-8v_c]=h^2\rho g, \tag{v_b}$$

$$\frac{E}{8(1-0.2^2)}[-8v_b+8(2.8)v_c]=h^2\rho g. \tag{v_c}$$

注意由反对称性有 $v_c=v_a$，联立求解前两个方程，得

$$v_a=v_c=0.625\rho gh^2/E,$$

$$v_b=0.789\rho gh^2/E.$$

由此可以求得应力分量

$$(\sigma_y)_a=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_a+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_a\right]$$

$$=\frac{E}{1-0.2^2}\,\frac{-4v_c+v_b}{2h}=-0.891\rho gh.$$

这是最大压应力。应力分量$(\sigma_y)_e=0.891\rho gh$，是最大拉应力。

§1.3 平面问题差分方程的另一推导方法

对于具有应力边界条件的平面问题，如果沿用前一节中所述的方法求解，则须在边界之外布置虚结点，而将虚结点处的位移分量表以边界结点及内结点处的位移分量。这样就要进行较多的运算工作，并将使得差分方程的形式复杂化，使用时易出差错。因此，作者导出了另一些形式的差分公式，再根据"结点领域"的平衡条件导出差分方程。用这种差分方程来求解具有应力边界条件及混合边界条件的平面问题，包括多连体的平面问题在内，都无须在边界之外布置虚结点，而差分方程中的未知值只是边界结点及内结点处的位移分量。

在导出上述差分方程时，需要用到函数 f（代表位移分量 u 或 v）在非结点处的导数值。首先来说明如何求得 f 在网线上一点处

的导数值。为此，设网线段 *0-1* 上有一点 a，图 1.3.1，它距结点 0 的距离为 ξh。我们规定：

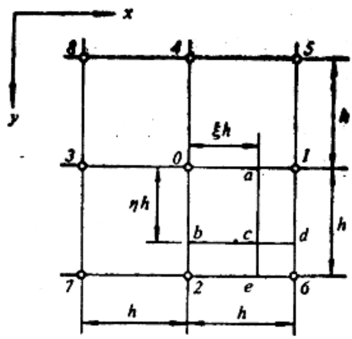


图 1.3.1

（一）函数 f 沿网线方向的导数，它在该网线段上各点（不包括结点）处的数值取为常量，据此有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a=\frac{f_1-f_0}{h}, \ (0<\xi<1) \tag{1.3.1}$$

（二）函数 f 在垂直于网线方向的导数，它在该网线段上各点（不包括结点）处的数值取为按线性变化，据此有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_a=(1-\xi)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0+\xi\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1, \ (0<\xi<1) \tag{1.3.2}$$

其中，f 在结点处的导数值仍按差分公式(1.1.3)取为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=\frac{f_2-f_4}{2h}, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1=\frac{f_6-f_5}{2h}.$$

对于网线段 *0-2* 上距结点 0 为 ηh 的一点 b，图 1.3.1，按照与上相同的规定和处理，也可以得出

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_b&=\frac{f_2-f_0}{h}, \ (0<\eta<1)\\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_b&=(1-\eta)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\eta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_2, \ (0<\eta<1)\end{aligned}\right\} \tag{1.3.3}$$

其中

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=\frac{f_1-f_3}{2h},\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_2=\frac{f_6-f_7}{2h}.$$

这样就把 f 在网线上各点(非结点)处的导数值表以 f 在结点处的数值。此外再规定:

(三) 对于不在网线上的任一点 c,图 1.3.1, 则仿照(1.3.3)中的第二式及(1.3.2)式取为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_c&=(1-\eta)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a+\eta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_e,\ (0<\eta<1)\\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_c&=(1-\xi)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_b+\xi\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_d.\ (0<\xi<1)\end{aligned}\right\}\qquad(1.3.4)$$

这样就把 f 在 c 点处的导数值表以 f 在网线上四点处的导数值,从而表以 f 在结点处的数值。

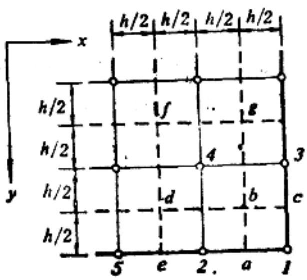


图 1.3.2

某一个结点的所谓“领域”,是指通过该结点的那两段、三段或四段网线的垂直平分线所围成的区域。例如,在图1.3.2中,ab及bc是通过角隅结点 1 的两段网线 1-2 及 1-3 的垂直平分线,因而角隅结点 1 的领域就是$\frac{h}{2}\times\frac{h}{2}$的正方形 $1abc$。又例如,ab、bd、de 是通过边界结点 2 的三段网线 2-1、2-4、2-5 的垂直平分线,因而边界结点 2 的领域就是$\frac{h}{2}\times h$ 的矩形 $abde$。再例如,bd、df、fg、gb 是通过内结点 4 的四段网线的垂直平分线,因而内结点 4 的领域就是 $h\times h$ 的正方形 $bdfg$。

现在试用上列差分公式,再次导出应用于内结点的差分方程(1.2.1)和(1.2.2),以资校核。图 1.3.3 中粗虚线所示的 $h\times h$ 的