

电 磁 场

DIANCICHANG

新型等效源法

XINXING DENGXIAOYUANFA

阎照文 著

北京工业大学出版社

电磁场新型等效源法

阎照文 著

北京工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁场新型等效源法/阎照文著. —北京:北京工业大学出版社, 2003. 11

ISBN 7-5639-1304-1

I. 电... II. 阎... III. 电磁场—计算方法
IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 089297 号

电磁场新型等效源法

阎照文 著

*

北京工业大学出版社出版发行

邮编:100022 电话:(010)67392308

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

*

2003 年 11 月第 1 版 2003 年 11 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 16 开本 11 印张 213.2 千字

印数:1~2000 册

ISBN 7-5639-1304-1/T·217

定价:28.00 元

内 容 简 介

如何快速、高效、精确地计算电磁场问题,是从事电磁场数值分析的科技人员关注的热点之一。20世纪50年代以前,电磁场数值分析多采用解析法或近似解析法;数字计算机问世后,电磁场数值分析取得了很大的发展。有限差分法、有限元法、积分方程法、等效源法、矩量法等均已比较成熟,但各种方法都有其适用范围。电磁场新型等效源法的提出,在解析法与数值法之间建立了一个桥梁,使许多问题的求解大为简化。这种方法的特点是:将偏微分方程中的未知函数,用一系列满足该偏微分方程的本征函数特解展开,确定通解中待定系数的方法采用点匹配法或最小二乘法。在此方法中,等效源的个数和位置可以具体给定,产生的场分布表达式为级数形式,场的计算精度可由等效源的个数和级数项的项数决定,比靠经验来确定等效源个数的传统等效源法更具科学性,而且便于实际应用。

本书是国内首次全面介绍电磁场新型等效源法的科学专著。它既有严密的理论体系,又有大量的计算实例;既介绍了在静态场中的应用,又介绍了在涡流场中的应用……本书适用于电类专业的技术人员、高校教师、大学高年级学生和研究生参阅。

前 言

电磁场理论的建立到现在已经有一百多年的历史了,人们对电磁场计算方法的研究从来没有间断过。电磁场问题的解决经历了由解析法到数值法再到数值法与解析法结合的发展过程。在 20 世纪 50 年代以前,人们对电磁场的研究,只能以麦克斯韦方程为依托,采用解析法或近似解析法。电子数字计算机的出现,使电磁场理论的应用取得了巨大进展,解决了许多以往不能解决的问题,逐渐形成了一门依赖计算机和计算技术的新学科——电磁场数值分析。电磁场数值分析的主要方法有:有限差分法、有限元法、积分方程法、等效源法、矩量法等。这些方法已经比较成熟,有些方法已有优秀的软件包上市,并广泛应用于实际工程中。

然而不少数值方法的共同特点是:计算时间长,计算量大,剖分复杂,准确性得不到充分保证,其他人不易验证和重复。另一方面,随着电子计算机的飞速发展,电磁场数值计算也获得了很大发展,但这也促使人们对计算机产生了依赖性,而在理论和方法上缺少推敲。人们交给计算机的应是最简洁的表达式,即应该根据电磁场理论中的惟一性定理、互易定理、镜像原理、等效原理等降低问题的复杂性;引入适当的辅助函数,减少定解问题的求解规模;把待求量从隐式变为显式;根据场域的对称性降低离散方程组的阶数;尽可能把积分式用解析式表达;选取稳定的计算方法等。

在这种背景下,人们反过来又寻求数值法和解析法的结合——半解析法应运而生了。20 世纪 80 年代中期,有人提出了一种对计算机资源要求较少,既不需要离散场域,也不需要离散边界,且可用统一格式获得高阶可导的连续的半解析方法——多极子法(MMP)。这种方法的特点是:将偏微分方程中的未知函数,用一系列满足该偏微分方程的本征函数的特解展开,确定该通解中待定系数的方法采用点匹配法,并根据经验总结出了一些使用规则。在以后的几年里,这种方法逐渐得到发展,并被正式称为广义多极技术(GMP)。20 世纪 90 年代初,西安交通大学盛剑霓教授指导博士生在这一领域进行了深入研究,先后得到国家自然科学基金资助的两个项目,做出了许多创造性的贡献。这种方法曾经有多种名称,如,级数法、多级理论、圆(球)形等效源法、新型等效源法等,但不管名称如何,它们的本质都是一样的,只不过是不同角度解释而已。

作者在攻读博士学位时,有幸成为这一课题组的一员,对这一方法进行了深入研究,而且在后来做博士后时还念念不忘对这一方法进行推敲和斟酌。作者在对这一方法的长期研究中积累了不少心得和体会,认为这一方法对规则场域的电磁场线性问题有一定的应用价值,因此产生了把这些成果写出来的想法。如果这本书能为同行所认可,对大家有所裨益的话,作者就感到莫大欣慰了。

本书共分10章。第一章介绍圆形、球形场域中的分离变量法,这是新型等效源法的数学基础。第二章介绍基于分离变量解的新型等效源法综述,详细推导一般区域中新型等效源法的解与分离变量解的关系,给出新型等效源法的通解表达式,指出新型等效源的一般设置原则。第三章介绍二维静态场新型等效源法的具体实施方法,给出含有浮动电极的处理方法。第四章介绍二维涡流场新型等效源法的具体实施方法,给出含有载流导体的处理方法。第五章介绍三维静态场,包括轴对称场新型等效源法的实施,并举例说明。第六章介绍三维涡流场,包括轴对称涡流场新型等效源法的实施,并举例说明。第七章介绍如何用新型等效源法计算二维非线性静磁场问题,并给出计算实例。第八章介绍新型等效源法与有限元法和边界元法的耦合计算方法。第九章研究新型等效源法在高频电磁波问题中的应用。第十章介绍矩阵方程的新型解法——小波法。小波法不仅能减少解方程组的计算时间,而且有时能改善方程组的性态。

需要说明的是,书中的内容并不是这一方法的全部。比如,书中并没有给出矩形等效源、六面体等效源、椭圆形等效源和椭球形等效源等其他等效源的形式,因为这些方法还处于研究之中,留待以后修订时再把这部分内容补充进去。

本书的大部分工作是在笔者的博士导师、西安交通大学盛剑霓教授的指导下完成的,因此本书参考了师兄马齐爽博士、袁斌博士和郑勤红博士提供的一些资料(大部分已公开发表),在每章后面均已一一列出。同时,本书的出版还得到了西安交通大学马西奎教授,博士后合作导师华中科技大学李朗如教授、邵可然教授和北京航空航天大学苏东林教授的关心和支持,与师兄陈德智副教授的多次讨论也使笔者受益匪浅。此外,本书的出版还得到清华大学马信山教授、中国科学院电工研究所夏平畴研究员的极力推荐,北京工业大学出版社编审张瑚女士为本书的出版付出了大量辛勤的劳动,这才使本书得以尽快出版。作者在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书承清华大学马信山教授和华中科技大学李朗如教授审阅,他们仔细审阅了初稿,并提出了不少宝贵意见,使本书增色不少。作者再次对他们表示感谢。

在本书即将出版之际,欣闻我们的研究成果获得2003年度教育部提名国家科学技术奖:自然科学一等奖,这是对我们多年辛勤劳动的认可与鼓励。它将激励我们为把这一成果尽快应用于工程实际而努力。

由于本人水平有限,而且是首次编写这类内容的专著,错误与缺点在所难免,如能得到读者的批评指正,本人将不胜感激。

阎照文

2003年11月

目 录

第一章 圆形、球形场域中的分离变量法	1
1.1 引言	1
1.2 极坐标系下圆形场域的分离变量法	1
1.2.1 圆形场域中拉普拉斯方程的通解	1
1.2.2 圆形场域中亥姆霍兹方程的通解	5
1.3 球坐标系下球形场域中的分离变量法	7
1.3.1 球形场域中拉普拉斯方程的通解	7
1.3.2 球形场域中亥姆霍兹方程的通解	10
1.4 小结	11
参考文献	14
第二章 基于分离变量解的新型等效源法综述	15
2.1 引言	15
2.2 分离变量解与问题的真解	15
2.2.1 二维拉普拉斯问题	15
2.2.2 二维亥姆霍兹问题	19
2.2.3 三维拉普拉斯问题	20
2.2.4 三维亥姆霍兹问题	20
2.3 任意边界形状下多连域问题的一般解	21
2.3.1 二维拉普拉斯问题的一般解	21
2.3.2 二维亥姆霍兹问题的一般解	24
2.3.3 三维拉普拉斯问题的一般解	25
2.3.4 三维亥姆霍兹问题的一般解	25
2.4 基于分离变量解的新型等效源法	26
2.4.1 新型等效源法的求解步骤	27
2.4.2 等效源的设置方法	27
2.4.3 新型等效源的级数表达式	27
2.4.4 级数项系数的确定方法	28
2.4.5 新型等效源法与传统等效源法的关系	29
2.5 小结	29
参考文献	29
第三章 二维静态场的新型等效源法	31
3.1 引言	31
3.2 新型等效源的计算公式和设置方法	31

3.3 应用边界条件确定待定系数	32
3.4 具有电位浮动电极的处理方法	32
3.5 计算实例	33
3.6 小结	40
参考文献	41
第四章 二维涡流场的新型等效源法	42
4.1 引言	42
4.2 场量计算公式和新型等效源的设置方法	42
4.3 应用边界条件确定待定系数	43
4.4 关于载流导体的处理方法	45
4.5 计算实例	47
4.6 小结	51
参考文献	52
第五章 三维静态场的新型等效源法	53
5.1 引言	53
5.2 轴对称场的新型等效源法	53
5.2.1 球形等效源在轴对称场中的表达式	53
5.2.2 环形等效源的表达式	54
5.2.3 环形电流源产生的矢量磁位表达式	55
5.2.4 标量位的选择	57
5.2.5 计算实例	58
5.3 具有旋转对称结构的三维场的新型等效源法	62
5.3.1 环形等效源的表达式	62
5.3.2 计算实例	64
5.4 一般三维场的新型等效源法	66
5.4.1 场量计算公式和新型等效源的设置方法	66
5.4.2 计算实例	67
5.5 小结	71
参考文献	72
第六章 三维涡流场的新型等效源法	73
6.1 引言	73
6.2 轴对称涡流场的新型等效源法	73
6.2.1 球形等效源的表达式	73
6.2.2 环形等效源的表达式	74
6.2.3 关于位的选择问题	75
6.2.4 计算实例	77
6.3 具有旋转对称结构的三维涡流场的新型等效源法	79
6.3.1 环形等效源的表达式	80
6.3.2 计算实例	81
6.4 一般三维涡流场的新型等效源法	83

6.5 小结	84
参考文献	85
第七章 用新型等效源法求解非线性静磁场	86
7.1 引言	86
7.2 用新型等效源法求解二维非线性静磁场	87
7.2.1 二维场方程的描述	87
7.2.2 内部节点处场量的求取	88
7.2.3 非线性方程组的形成	89
7.2.4 非线性媒质 μ 的数值逼近方法	89
7.2.5 μ 的曲面拟合	90
7.2.6 非线性迭代	92
7.2.7 计算实例	93
7.3 用新型等效源法求解轴对称非线性静磁场	95
7.3.1 轴对称场方程的描述	95
7.3.2 区域 I 和区域 II 中场量的求取	96
7.3.3 非线性方程组的形成	97
7.3.4 方程组右端 $\frac{\partial U_0}{\partial r}$ 、 $\frac{\partial U_0}{\partial \theta}$ 项的处理方法	97
7.3.5 计算实例	99
7.4 小结	100
参考文献	100
第八章 新型等效源法与其他方法的耦合问题	101
8.1 引言	101
8.2 轴对称场的新型等效源-有限元耦合法	101
8.2.1 轴对称场的有限元方程	101
8.2.2 新型等效源与有限元的耦合方法 (I)	105
8.2.3 新型等效源与有限元的耦合方法 (II)	108
8.2.4 计算实例	108
8.3 三维场的新型等效源-有限元耦合法	110
8.3.1 三维场的有限元法	110
8.3.2 三维场的新型等效源-有限元耦合法	113
8.4 新型等效源-边界元耦合法	116
8.4.1 新型等效源-边界元耦合公式	116
8.4.2 计算实例	118
8.5 小结	120
参考文献	120
第九章 新型等效源法在电磁波问题中的应用	122
9.1 引言	122
9.2 新型等效源法在 TEM 传输线特性阻抗分析中的应用	122
9.2.1 用新型等效源法求解 TEM 传输线特性阻抗的方法	122
9.2.2 计算实例	123

9.3 新型等效源法在波导分析中的应用	124
9.3.1 用新型等效源法求解截止波数的方法	124
9.3.2 计算实例	126
9.4 新型等效源法在谐振腔分析中的应用	127
9.4.1 用新型等效源法求解谐振腔中截止波数的方法	127
9.4.2 计算实例	129
9.5 小结	129
参考文献	129
第十章 新型等效源法矩阵方程的求解	130
10.1 引言	130
10.2 小波理论基础	130
10.2.1 预备知识	130
10.2.2 从傅里叶分析到小波分析	131
10.2.3 二进小波变换	133
10.2.4 多分辨分析	134
10.2.5 正交小波	136
10.2.6 二维小波分析	137
10.2.7 信号的边界延拓	140
10.3 小波分析求解矩阵方程	141
10.4 计算实例	142
10.5 小结	145
参考文献	146
附录 A 式(7-27)的展开方法	147
附录 B 本书主要符号	150
附录 C 矢量分析公式	151
附录 D 特殊函数	153
D.1 贝塞尔函数	153
D.2 勒让德函数	158
D.3 其他特殊函数	160
附录 E 外国人名中英文对照	162

第一章 圆形、球形场域中的分离变量法

1.1 引言

分离变量法是电磁场的一种解析方法,也是新型等效源法的基础。但是,能够用分离变量法进行处理的坐标系是有限的。对于三维标量亥姆霍兹(Helmholtz)方程或拉普拉斯(Laplace)方程,目前在实际应用中有13种坐标系:①直角坐标系;②圆柱坐标系;③球坐标系;④椭圆柱坐标系;⑤抛物柱坐标系;⑥抛物面坐标系;⑦旋转抛物面坐标系;⑧长旋转椭球坐标系;⑨扁旋转椭球坐标系;⑩圆锥坐标系;⑪椭球坐标系;⑫双球坐标系;⑬环坐标系。在①至⑪种坐标系中的亥姆霍兹方程或拉普拉斯方程都可以采用分离变量法来处理,而在⑫和⑬两种坐标系中,只有拉普拉斯方程经过变换后可以采用分离变量法来处理^[1]。在电磁场分析中最常用的坐标系是直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。本章只介绍本书用到的平面极坐标系和球坐标系的分离变量法。

1.2 极坐标系下圆形场域的分离变量法

1.2.1 圆形场域中拉普拉斯方程的通解

对如图1-1所示的二维圆形求解场域时,设定解问题为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x^2 + y^2 < a^2 \quad (1-1)$$

$$u|_{x^2+y^2=a^2} = f \quad (1-2)$$

式中, u 为位函数, a 为圆形区域半径, f 为圆形边界上的位函数值。方程(1-1)在直角坐标系下是可以分离变量的,但边界条件式(1-2)显然不能分离变量。由于边界形状是圆形的,因此用平面极坐标系比较方便。

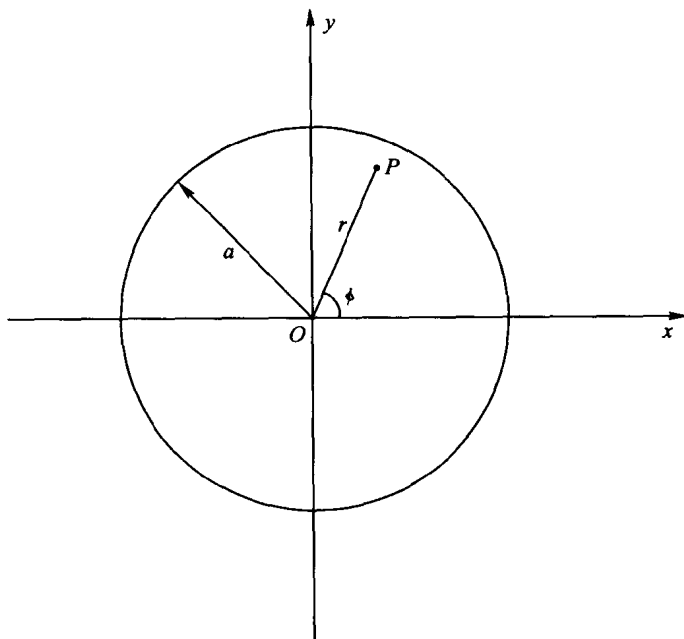


图 1-1 圆形场域

在平面极坐标系中,表示定解问题的式(1-1)应该写为^[2]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \quad 0 < \phi < 2\pi, 0 < r < a \quad (1-3)$$

$$u(r, \phi)|_{\phi=0} = u(r, \phi)|_{\phi=2\pi}, \quad 0 < r < a \quad (1-4)$$

$$\left. \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = \left. \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi=2\pi}, \quad 0 < r < a \quad (1-5)$$

$$u(r, \phi)|_{r=0} \text{ 有界}, \quad 0 < \phi < 2\pi \quad (1-6)$$

$$u(r, \phi)|_{r=a} = f(\phi), \quad 0 < \phi < 2\pi \quad (1-7)$$

下面用分离变量法求解。

1. 分离变量

令 $u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$, 将此代入式(1-3), 得到:

$$\Phi \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) \right] + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0^{\text{①}}$$

上式两端乘以 $r^2/[R(r)\Phi(\phi)]$, 并移项, 就可以得到:

① 为了表达的简便, 有时 $R(r)$ 简化为 R , $\Phi(\phi)$ 简化为 Φ , 下同。

$$\frac{r^2}{R} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) \right] = - \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$$

等式的左端只是 r 的函数,与 ϕ 无关;右端只是 ϕ 的函数,与 r 无关。所以它们必须等于既与 r 无关又与 ϕ 无关的常数。把这个常数记为 λ ,就得到:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\lambda}{r^2} R = 0 \quad (1-8)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \lambda \Phi = 0 \quad (1-9)$$

这就完成了拉普拉斯方程在极坐标系中的分离变量。

2. 求解本征值问题

由表示周期条件的式(1-4)和式(1-5)可以得到:

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \quad (1-10)$$

$$\Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \quad (1-11)$$

这样,由带有待定参数的齐次常微分方程式(1-9)和齐次的周期边界条件式(1-10)、式(1-11)又构成了一个本征值问题。很容易证明,如果表示本征值问题的式(1-9)至式(1-11)有解的话,一定满足

$$\lambda \geq 0 \quad (1-12)$$

之所以允许 $\lambda = 0$,是因为 $\Phi(\phi) = \text{常数}$ (不妨取为 1)也是本征值问题的解。换句话说,本征值问题式(1-9)至式(1-11)有一组解,即:

$$\text{本征值: } \lambda_0 = 0 \quad (1-13)$$

$$\text{本征函数: } \Phi_0(\phi) = 1 \quad (1-14)$$

当 $\lambda > 0$ 时,式(1-9)的通解为:

$$\Phi(\phi) = A \sin \sqrt{\lambda} \phi + B \cos \sqrt{\lambda} \phi$$

将此代入周期边界条件式(1-10)和式(1-11),就得到:

$$B = A \sin \sqrt{\lambda} 2\pi + B \cos \sqrt{\lambda} 2\pi$$

$$A = A \cos \sqrt{\lambda} 2\pi - B \sin \sqrt{\lambda} 2\pi$$

这是关于系数 A 和 B 的线性齐次代数方程组,其有非零解的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} \sin \sqrt{\lambda} 2\pi & \cos \sqrt{\lambda} 2\pi - 1 \\ \cos \sqrt{\lambda} 2\pi - 1 & -\sin \sqrt{\lambda} 2\pi \end{vmatrix} = 0$$

即 $2(\cos \sqrt{\lambda} 2\pi - 1) = 0$ 。这样又可以求得本征值:

$$\lambda_m = m^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1-15)$$

相应的非零解是: A 任意, B 任意。

也就是说, 对应于一个本征值 λ_m , 有两个本征函数:

$$\Phi_{m1}(\phi) = \sin m\phi \quad (1-16)$$

$$\Phi_{m2}(\phi) = \cos m\phi \quad (1-17)$$

3. 求特解并叠加出一般解

现在求常微分方程式(1-8)的解。

令 $t = \ln r$, 代入式(1-8), 有:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - \lambda R = 0$$

所以, 当 $\lambda_0 = 0$ 时, 通解为:

$$R_0(r) = C_0 + D_0 t = C_0 + D_0 \ln r \quad (1-18)$$

当 $\lambda_m = m^2, m \neq 0$ 时, 通解为:

$$R_m(r) = C_m e^{mt} + D_m e^{-mt} = C_m r^m + D_m r^{-m} \quad (1-19)$$

现在, 已经求得了满足齐次方程式(1-3)、齐次边界条件式(1-4)和式(1-5)的全部特解:

$$u_0(r, \phi) = C_0 + D_0 \ln r \quad (1-20)$$

$$u_{m1}(r, \phi) = (C_{m1} r^m + D_{m1} r^{-m}) \sin m\phi \quad (1-21)$$

$$u_{m2}(r, \phi) = (C_{m2} r^m + D_{m2} r^{-m}) \cos m\phi \quad (1-22)$$

把它们叠加起来, 就得到表示定解问题的式(1-3)的一般解:

$$u(r, \phi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (C_{m1} r^m + D_{m1} r^{-m}) \sin m\phi + \sum_{m=1}^{\infty} (C_{m2} r^m + D_{m2} r^{-m}) \cos m\phi \quad (1-23)$$

考虑到表示有界条件的式(1-6), 由于 $\ln r$ 和 r^{-m} 在 $r=0$ 的点都是无界的, 所以它们的系数都必须为 0, 即:

$$D_0 = 0, \quad D_{m1} = 0, \quad D_{m2} = 0 \quad (1-24)$$

因此式(1-23)的通解表达式为:

$$u(r, \phi) = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (C_{m1} \sin m\phi + C_{m2} \cos m\phi) \quad (1-25)$$

再代入表示边界条件的式(1-7), 就得到:

$$u(r, \phi)|_{r=a} = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m (C_{m1} \sin m\phi + C_{m2} \cos m\phi) = f(\phi)$$

4. 利用本征函数的正交性确定叠加系数

下面的问题是如何定出叠加系数 C_0, C_{m1} 和 C_{m2} 。求解过程忽略, 这里只给出结果:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \quad (1-26)$$

$$C_{m1} = \frac{1}{a^m \pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin m\phi d\phi \quad (1-27)$$

$$C_{m2} = \frac{1}{a^m \pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos m\phi d\phi \quad (1-28)$$

这样, 就完全给出了表示定解问题的式(1-3)的解。

同理, 如果定解问题的有效区域在圆域外, 则式(1-6)变为:

$$u(r, \phi)|_{r=\infty} \text{有界}, \quad 0 < \phi < 2\pi$$

这样, 问题的通解形式为:

$$u(r, \phi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} r^{-m} (D_{m1} \sin m\phi + D_{m2} \cos m\phi) \quad (1-29)$$

1.2.2 圆形场域中亥姆霍兹方程的通解

1. 分离变量

在平面极坐标系中, 二维亥姆霍兹方程的具体形式是:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = 0 \quad (1-30)$$

令 $u(r, \phi) = R(r) \Phi(\phi)$, 代入上式, 得:

$$\Phi(\phi) \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R \right] + \frac{R(r)}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

两端再乘以 $r^2/[R(r)\Phi(\phi)]$, 并移项, 就可以得到:

$$\frac{r^2}{R(r)} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R \right] = - \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$$

等式左端只是 r 的函数, 与 ϕ 无关; 等式右端只是 ϕ 的函数, 与 r 无关。所以它们必须等于既与 r 无关又与 ϕ 无关的常数。把这个常数记为 λ , 则得到:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) R = 0 \quad (1-31)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \lambda \Phi(\phi) = 0 \quad (1-32)$$

这样就完成了亥姆霍兹方程在极坐标系中的分离变量。

2. 本征值问题

方程式(1-32)和周期条件可以构成本征值问题, 即:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \lambda \Phi(\phi) = 0 \quad (1-33)$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \quad (1-34)$$

其本征值为:

$$\lambda_m = m^2, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

对应于一个本征值 λ_m , 有两个本征函数:

$$\Phi_{m1}(\phi) = \sin m\phi$$

$$\Phi_{m2}(\phi) = \cos m\phi$$

方程式(1-31)称为柱贝塞尔(Bessel)方程, 假设与边界条件构成的本征值问题为:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) R = 0 \quad (1-35)$$

$$R(0) \text{ 有界}, \quad \alpha R(a) + \beta R'(a) = f \quad (1-36)$$

求得它的通解为:

$$R(r) = CJ_m(kr) + DN_m(kr)$$

式中, J_m 为第一类柱贝塞尔函数, N_m 为第二类柱贝塞尔函数。

考虑到边界条件“ $R(0)$ 有界”的要求, 故 $D=0$; 本征函数为: