刘楚炤 李永银

ZhXShX

中学数学丛书

复数与三角

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

复数与三角

刘楚炤　李永银

湖 北 教 育 出 版 社

中学数学丛书
复数与三角
刘楚炤　李永银
*
湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行
随州市国营印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本　5印张　1插页　110,000字
1983年12月第1版　1983年12月第1次印刷
印数：1—25,600
统一书号：7306·44　定价：0.46元

内　容　提　要

全书共分三章。第一章简述了复数的基础知识；第二章写了复数在三角中的应用；第三章介绍了一些简单的“三角和”。

本书叙述简明，通俗易懂，适合中学生课外阅读，亦可供中学数学教师教学时参考。

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》．根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》．我们认为，这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社已组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深．编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得．

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的．丛书中每本小册子既相对独立又互相联系．同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用．学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读．另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示．丛书对教师教学亦有一定的参考作用．

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好．同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见．

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》．本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

前　　言

复数是为高中学生所熟悉的概念．从数的发展史来看，由于研究方程的可解问题，需要对负数开平方，从而引进了平方后等于负数的“数”．当时人们否认这种“数”的存在，甚至连十七世纪的法国大数学家笛卡儿也认为负数开平方是“不可思议的”．因而把这样的“数”称为“虚数”．其实，虚数并不“虚”，随着科学的不断发展，虚数逐渐被人们所认识，由它发展起来的复数理论已在科学技术方面得到了广泛的应用．而“虚数”这一名词仍沿用到现在．复数理论还渗透到数学的其它分支之中．本书是在初等数学范围内，介绍复数在三角学及其有关分支中的一些应用．

本书第一章简述了复数的基础知识．第二章我们介绍了如何利用复数解三角学中的许多问题．如证三角恒等式和三角不等式、解三角方程、计算特殊三角函数的和式与积式等．本章着重介绍了两个利用复数解题的方法，即“代入公式法”和“中心开花法”．很多例题表明，“代入公式法”具有思路简单、便于掌握和记忆的特点；利用“中心开花法”我们可以把三角中的许多定理和公式予以推广，而一般三角方法要做到这点往往是困难的，有时甚至是徒劳的．上述两种方法的独到之处显示出了利用复数解三角问题的特殊作用．利用复数解三角问题，前景十分广阔．

我们在第三章提到一个既熟悉又陌生的名词——“三角和”．之所以说熟悉，是因为三角、三角函数以及和的概念是中学课本里常见的内容；但是，把三角与和连起来就感到陌生．同学们一定会问，三角和在数学中有什么作用呢？回答将会使

你感到吃惊，因为三角和在数论中扮演着十分重要的角色．无论是苏联数学家维诺格拉陀夫在证明充分大的奇数可以表示为三个素数之和时，或是我国数学家陈景润在证明“1”＋“2”时，都离开不了三角和的估计．在中学生看来，既然是用来解决现代数论难题的方法，那一定是高深莫测的．事实上，许多关于三角和的概念早已为中学生所了解，且能运用三角和的方法解决高中三角学课程中的不少问题．

本书承蒙武汉大学数学系张远达教授审阅，并提出宝贵意见；在写作过程中曾得到了武汉大学数学研究所陈银通老师的指导和鼓励．谨此致以深切的谢意．

限于笔者水平，错误与不妥之处，还希望读者不吝指教．

刘楚炤　李永银

1982年8月于武汉

目　　录

第一章　复　数

§1. 复数及有关概念

（一）复数的定义

我们把形如 $z=a+bi$（a，b 都是实数）的数，称为**复数**，其中 i 称为**虚数单位**，它是 -1 的一个平方根，即 $i^2=-1$；并规定 i 能和实数在一起，按照实数的运算法则进行运算．根据 i 的意义，$(-i)^2=[(-1)i]^2=(-1)^2i^2=-1$，所以 -1 的另一个平方根是 $-i$．a 与 b 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，并分别用 $R(z)$ 和 $I(z)$ 表示．复数集一般用字母 C 表示．

（二）复数的分类

已知复数 $z=a+bi$，当 $b=0$ 时，z 就是实数；当 $b\neq 0$ 时，z 称为**虚数**；当 $b\neq 0$，$a=0$ 时，z 称为**纯虚数**．即

$$\text{复数}\ (a+bi)\begin{cases}\text{实数}\ (b=0)\\ \text{虚数}\ (b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}\ (a=0)\\ \text{非纯虚数}\ (a\neq 0).\end{cases}\end{cases}$$

（三）i 的性质

虚数单位 i 有如下性质：若 n 是整数，则

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(四) 复数相等的定义

我们规定，两个复数相等，当且仅当它们的实部与虚部分别相等．因此，根据复数相等的定义，有 $a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c$，$b=d$．特别地，$a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0$，$b=0$．

(五) 共轭复数

当两个复数实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数称为共轭复数（当虚部不为零时，又称共轭虚数）．实数的共轭复数就是它本身．复数 $z=a+bi$ 的共轭复数用 $\bar{z}=a-bi$ 来表示．

共轭复数有如下性质：

1. $z+\bar{z}=2a$，$z-\bar{z}=2bi$；
2. $\overline{\bar{z}}=z$；
3. $z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$；
4. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$；
5. $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$；
6. $\overline{z_1 \cdot z_2}=\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$；
7. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ (z_2 \neq 0)$．

以上诸性质的证明很容易，留给读者作为练习．

练　习　1.1

1．求下列各式的 x 与 y（x，y 都是实数）：

(1)　$(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$；

(2)　$(x+y)^2 i-\dfrac{6}{i}-x=-y+5(x+y)i-1$．

2. 计算：

(1) $i^{97}+i^{102}+i^{303}-i^{27}$；

(2) $i^{k}\cdot i^{k+1}\cdot i^{k+2}\cdot i^{k+3}$（$k$ 为整数）；

(3) $i\cdot i^{3}\cdot i^{5}\cdots\cdots i^{(2k-1)}$（$k$ 为整数）.

3. 设 z_1 和 z_2 是任意二个复数，求证：

(1) $\overline{\bar{z}_1+\bar{z}_2}=z_1+z_2$；

(2) $\overline{a+bi}=a+\overline{bi}$.

§2. 复数的几何表示

（一）复数集与复平面

根据复数相等的定义知，任何一个复数 $z=a+bi$ 对应于唯一的有序实数对 (a, b)；反之，任何一个有序实数对 (a, b) 对应于唯一的复数 $z=a+bi$. 而平面直角坐标系里的点和有序实数对有一一对应的关系，因此，我们可以用直角坐标平面内的点 $Z(a, b)$ 来表示复数 $z=a+bi$（如图1.1）. 这个坐标平面叫做**复平面**，x 轴叫做**实轴**，y 轴叫做**虚轴**. 复平面（也叫高斯平面）与一般直角坐标平面（也叫笛卡儿平面）的唯一区别是虚轴不包括原点，而一般直角坐标平面的原点是两坐标轴的公共点.

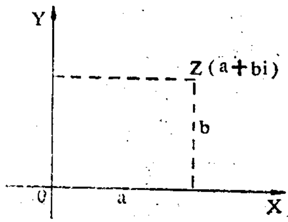

图 1.1

因此，复数集 C 与复平面内的所有点的集合是一一对应的.

（二）复数与平面向量

我们把既有大小又有方向的量叫做**向量**．向量可以用有向线段来表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．长度相等、方向相同的向量，不管它的起点在什么位置，都认为是**相等**的．我们还把起点在坐标原点的向量称为**定位向量**；起点不在原点的向量称为**自由向量**．因此，自由向量总可以通过平移使它成为定位向量．长度为零的向量（它的方向不确定）叫做**零向量**．规定所有的零向量都相等．

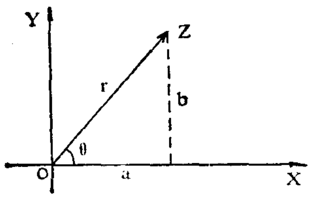

图 1.2

如图 1.2 所示，设 Z 表示复数 $z=a+bi$． 连结 OZ，得到起点为 O，终点为 Z 的定位向量，我们记作 $\overrightarrow{OZ}$．显然，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是由点 Z 唯一确定；反之，点 Z 也可由向量 $\overrightarrow{OZ}$ 唯一确定．因此，复平面内所有点的集合与所有定位向量的集合是一一对应的．而复数集 C 与复平面内所有点的集合是一一对应的，所以复数集 C 与复平面内所有定位向量的集合是一一对应的．于是复数可以用定位向量来表示．根据向量相等的定义，相等的向量表示同一个复数．

综上所述，复数 $z=a+bi$，复平面的点 $Z(a, b)$ 与定位向量 $\overrightarrow{OZ}$ 有如下关系：

复数 $z=a+bi \Longleftrightarrow$ 点 $Z(a, b) \Longleftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OZ}$．

练 习 1.2

1．在复平面内，作出表示下列复数的点：

(1) 2;　　(2) -2;　　(3) i;　　(4) $-i$;

(5) 0;　　(6) $2+3i$;　　(7) $-2+3i$;

(8) $2-3i$;　　(9) $-2-3i$.

2．作出下列复数所对应的定位向量，以及它们的共轭复数所对应的定位向量：

(1) $-1+\sqrt{3}i$;　　(2) $2i$;

(3) $-2i$;　　(4) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

3．设复平面内有一向量 $\overrightarrow{MN}$，始点 M 的坐标为 $(1,\ 0)$；终点 N 的坐标为 $(3,\ 2)$．求向量 $\overrightarrow{MN}$ 对应的复数．

§3．复数的模和幅角

因为复数 $z=a+bi$ 和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是一一对应的关系，而向量有长度和方向两要素，那么，这两个要素和向量对应的复数又有何关系呢？为此，我们引入了复数的模和幅角的概念．

（一）复数的模

我们把向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度 r 叫做向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所对应的复数的模（或绝对值），记作 $|z|=|a+bi|$．如果 $b=0$，那么 $z=a+bi$ 是一个实数 a，它的模就等于 $|a|$（即 a 的绝对值）．显见（如图1.2）

$$|z|=|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

（二）复数的幅角

我们把 X 轴的正方向与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所成的角 θ（如图 1.2），叫做向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所对应的复数 $z=a+bi$ 的**幅角**．

显然，不等于零的复数Z的幅角有无数个值，这些值相差2π的整数倍，其中适合于

$$0\leqslant\theta<2\pi$$

的幅角θ叫做幅角的**主值**．记作$\theta=\arg z$．

要确定一个复数$z=a+bi\ (z\neq0)$的幅角θ，只需利用公式

$$\cos\theta=\frac{a}{r},\ \sin\theta=\frac{b}{r},$$

其中$r=\sqrt{a^2+b^2}$．

如果复数Z等于零，它所对应的向量是一个点(零向量)，这样的向量没有确定的方向，所以复数零没有确定的幅角．

练　习　1.3

1．求下列复数的模及幅角的主值，并求它们在复平面的对应点与原点的距离：

(1) $\sqrt{2}$；　(2) $1+i$；　(3) $\sqrt{2}i$；　(4) $-1+i$；

(5) $-\sqrt{2}$；　(6) $-1-i$；　(7) $-\sqrt{2}i$；　(8) $1-i$．

2．求满足下面条件的复数z，在复平面内的对应点的轨迹：

(1) $|z|=2$；　(2) $2\leqslant|z|<3$；　(3) $\arg z=\frac{\pi}{6}$．

§4．复数的表示形式

(一) 复数的代数形式

$z=a+bi$叫做复数的**代数形式**．

(二) 复数的三角形式

从图1.2可以看出，