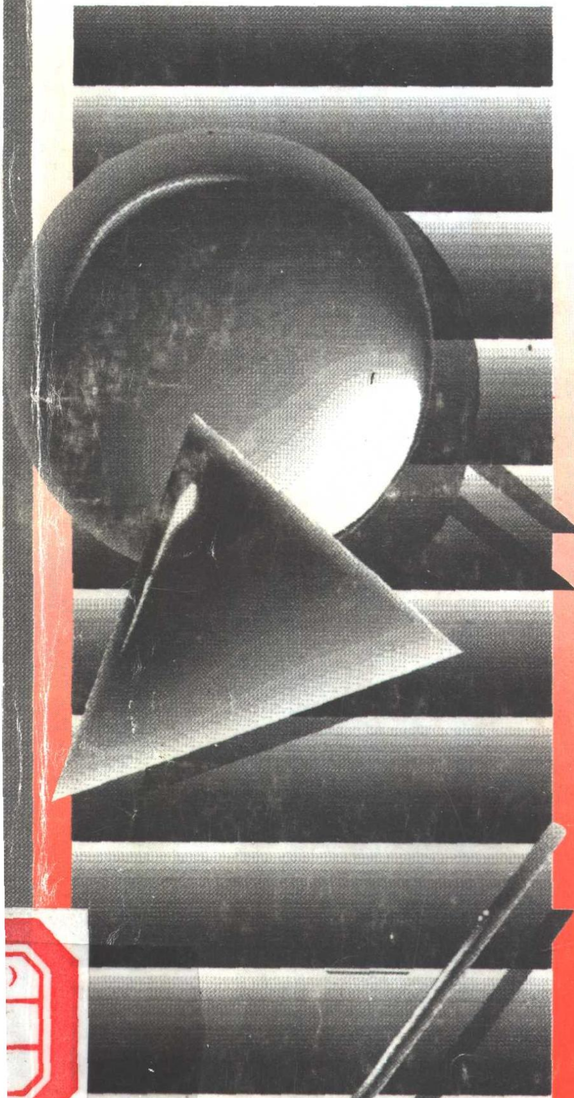
# 数学发现与成就

蒋文蔚　编著



广西师范大学出版社

# 数学的发现与成就

蒋文蔚 编著

广西师范大学出版社

# 数学的发现与成就

蒋文蔚 编著

责任编辑:余鑫晖 凌 英　　封面设计:杨 琳

广西师范大学出版社出版发行　　邮政编码:541001

(广西桂林市中华路36号)

桂林漓江印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32　印张:6.125　字数:154千字

1996年3月第一版　　1996年3月第一次印刷

印数:0001—3000册

ISBN 7—5633—2167--5/O·013

定价:5.50元

# 前　言

近十年来，我经常接触刚入学的新生和毕业班的同学，他们向我提出这样的问题：(1)数学难学，我们又不是学数学的材料，要怎样才能学好呢？(2)在高等师范院校学这么多高等数学，到中学有多大用处？

这些想法是同学们普遍存在的问题，如果不很好解决，多少会影响他们学习数学的积极性. 我认真分析了他们所提出的两个问题，关键是第(1)个问题，只有当你学好了数学才谈得上应用它. 为了使同学们学好数学，首先要克服如下思想障碍：当同学们学习数学中的概念或公式时，认为数学家是天才，似乎一夜间就获得如此精美无瑕的成果，由此对他们无限敬佩；反之，认为自己没有天才而自卑气馁。因此，在第一章“数学的发现”中，通过举世闻名的“华、王方法”和“四元数”的发现过程，使同学们从中获得启迪：如果我们想在数学研究中要有新的发现的话，首先，要像数学家那样掌握正确的思维方法；其次，更重要的是学习他们如何从失败中吸取教训，掌握成功的秘诀，鼓励自己不断学习进取，坚韧不拔地去努力攀登科学高峰. 紧接着就要解决如何学好数学的问题，即介绍“数学发现的思维方法”，它是第二章和第三章的全部内容；第四章的“数学家的足迹”中介绍华罗庚的治学经验及第五章的“数学常数 $F$ 的发现过程”等也都属于数学发现的思维方法的内容. 为什么数学发现的思维方法如此重要呢？著名前苏联生理学家巴甫洛夫曾指出：“有了良好的方法，即便是没有多大才干的人也能作出许多成就；如果方法不好，即便是天才的人也将一事无成. ”数学发现的思维方法很多，很零散，从中精选几种在科学研究和数学教学

中有广泛应用的来讲，它们又可以统一在马克思辩证唯物主义认识论的一般原理中.例如，第二章中的“联想”与“类比”、“归纳法”、“对称”、“几何直观”等数学发现的思维方法，就是马克思辩证唯物主义认识论相应的“任何事物间的相互联系、相互制约”、“由特殊到一般”、“对立统一”和“由具体到抽象”的认识规律的具体化.以此引导同学们用唯物辩证法来研究数学和指导学习数学.

在数学基础学科的教学过程中，不仅要教给学生必要的数学知识，而且要在教学过程中讲一点数学概念、定理发现的背景、发现的过程、发现的思想方法.它有助于学生的思考能力、逻辑推理能力、分析问题和解决问题能力的提高，有助于激发同学们学习数学的兴趣与情感.

本书第一章主要通过两个具体的例子，帮助同学们克服在学习数学中所存在的模糊思想，即数学发现主要靠数学家的天才的错误想法.到第四章再用家喻户晓、自学成才的我国著名数学家华罗庚的成长过程，加深同学们对他的名言“天才在于积累，聪明在于勤奋”的深刻含义的理解；第二、三、四章介绍数学发现思维的几种方法，用于开阔同学们的思路，提高同学们学习数学的兴趣；第五、六、七、八章介绍数学家辛勤劳动所发现的某些重要成果，特别是改革开放以来我国数学家所取得的巨大成就，证明了我国人民是勤劳勇敢、聪明能干、富于创造精神的伟大人民，从而鼓舞同学们勤奋学习，奋发向上，树立为国争光、努力攀登数学高峰的信心和决心.课程内容是紧紧围绕同学们提的两个问题为中心展开的.如何引起同学们学习数学的兴趣，如何学好数学、掌握数学发现思维的方法，在写作过程中，从古到今又侧重以中国数学家所获得的成就贯穿始终，以此激发民族自豪感，培养同学们的爱国主义思想.因此，本书从体系到内容与传统书大不一样.

当前，我们即将跨入21世纪，作为师范院校数学系的学生，在辩证唯物主义和历史唯物主义指导下，深入研究数学成果的发现

背景、发现过程和发现方法，认真总结发现规律，显得特别重要.只有这样，学生毕业后才能成为具有较高数学素质的中学数学教师，为在21世纪初把我国建设成为数学大国贡献一份力量.

本书在编写和出版过程中，特别要感谢广西师范大学出版社副总编辑余鑫晖教授和数学系“数学教学论”研究生导师查鼎盛副教授所给予的全力支持与帮助！

由于水平有限，疏漏与错误之处难免，恳请读者批评指正.

作　者

1995年5月于桂林

## 内 容 提 要

本书以探索数学发现过程的规律为线索，对数学中某些重要概念、公式、定理和方法如何发现，作了一些有益的探索.重点介绍了几种常用的“数学发现的思维方法”，并用许多典型的例子加以剖析，对培养学生的学习兴趣，提高学生的数学素质很有启发.全书共八章，其内容分别是：数学的发现、数学发现的思维方法、数学猜想、数学家的足迹、数学常数 $\pi$、e、0.618 和 F、我国古代数学思想特色、我国现代数学的迅速崛起、现代数学的特点及发展趋势.

本书可作为高等师范院校、函授大学、业余大学数学专业教材，也可供中等学校数学教师、学生和数学爱好者阅读.

# 目　　录

# 第一章 数学的发现

从数学发展的历史长河中，选择一些重要的发现，青年们感兴趣的问题，用生动活泼的语言写成，对青年们很有益处．读了这些东西，不但可以丰富知识，开阔眼界，而且还可以从数学家的奋斗历程中，从他们的一些思想、见解、经验中，获得激励自己意志，启迪自己思想的成才之路．

——柯召　（《古今数学趣话》序言，尹斌庸等著）

数学的重要发现是数学家辛勤的劳动结晶．我们在学习一个公式或概念，认为它很精确完美，便感到数学家天才能干，一夜间获得这么完美无缺的成果而无限敬佩．实际上，数学上每一重大发现，都凝聚着数学家的辛勤劳动，往往经历无数次失败后才总结得到的．有的不是一朝一夕就能获得的，而是花了几年甚至一辈子才得到的．这里，通过“华、王方法”和“四元数”的发现过程这两个故事，从中获得启迪．如果我们也想在数学上有所发现的话，那么一方面我们要像数学家那样掌握正确的思维方法，另一方面更重要的是学习他们如何从失败中吸取教训获得成功的秘诀，鼓励自己不断学习进取．

## §1.1 "华、王方法"发现的前前后后

"华、王方法"指的是我国著名数学家华罗庚、王元在60年代创立的"用数论方法对多重积分进行数值计算"的方法，也是外国数学家首次用中国数学家命名的方法.由于这一方法"以最少的计算量得到最精确的结果"，因此得到国、内外数学界的推崇.在国外，1974年在温哥华召开的国际数学家大会曾邀请华罗庚去作45分钟的演讲或作专题报告，后因故而未成行；在国内，1990年陈嘉庚科学奖中的物质科学奖就由华罗庚与王元共享.这是人们对他们发现的这一方法的最高奖赏.

**1. 背景**

要了解"华、王方法"，首先要从60年代谈起.1958年，那是"大跃进"的年代，我国老一辈数学家像华罗庚、秦元勋等，他们纷纷走出深院，到工厂、农村联系生产实际，开展数学方法的研究.那时，华罗庚与王元又调到中国科学技术大学上基础课，他们在数学教学内容与方法上不断进行改革.例如在内容上增添一些联系实际的内容，特别注意数论与其他学科内容的内在联系.在教"数值积分"这一内容时，他提出这部分知识可用到哪里去？作为一个学者、教授，往往会到文献或书本中去寻找有关资料来充实自己.但他带着"如何计算山区坡地的表面积？"这一问题向地理、矿业地质工作者请教他们常用的计算方法.回来后对这些方法作了数学加工与鉴定，判定其优劣，并把这些联系实际的内容充实教材内容.在学习和通过理论上的分析过程中去粗存精，就有可能由此创造出更好的方法来.

### 2. “华罗庚说，被王元拉上了一条路”

那是在1958年，当年轻的王元从苏联一份数学杂志上高兴地看到数学家卡拉波夫(Korobov)的文章，其内容是论述积分近似计算与蒙特—卡罗(Monte－Carlo)方法的关系，还讲到伪随机数是服从一致分布的，并且还获得了一个计算公式：用一个单和去逼近二重积分，而这个和是用一致分布点列构造出来的．当他看完这篇文章后，浮想联翩，夜不能寐．他认为：这一新的思路与方向正符合我们的要求，而且这方向正是我们的长处，看来这一方向又与苏联展开另一场激烈的竞争(注：在哥德巴赫(Goldbach)猜想证明中，实际上也是我们与苏联学者在竞争)．“一万年太久，只争朝夕”，他马上去找他的导师华罗庚，那天刚好华老很累，不想看，但王元再三要求：“请你看一看最关键的一行公式！”华老不好推托，认真看下去，也使华罗庚兴奋不已，用他那深邃锐利的眼光，透过现象看本质，一眼看出蒙特—卡罗方法的实质就是数论方法．这正是他们的优势，从此以后，华罗庚对这个问题也就很有兴趣．此后，他们两人共同走上了用数论方法对多重积分进行数值计算的艰苦探索道路．所以“华罗庚说，被王元拉上了一条路”．

### 3. “华罗庚在数学上最强的是直觉…”从而牢牢地掌握研究的大方向

目标已经确定，就是计算多重积分．下一步怎么走？按照认识论的规律：由简单到复杂，由特殊到一般．最简单的情形则是一维——单重积分．牛顿(Newton)、车比雪夫(chebycev)以及高斯(Gauss)等数学大师，他们对数值积分都作出了杰出贡献．若将他们的公式推广到高维情形，则误差将随维数增加而迅速增加，这些方法失效．那么就从二维即二重积分入手吧，想从这里找到突破口．

这时华罗庚与王元认真分析了卡拉波夫方法的特点：理论较复杂，适应范围小．对此，他们提出找一种直接的方法，并要快速找

出一组点，适应范围要尽可能大. 根据华罗庚的直觉，他认为确定计算二重积分的点即平面上的点，要用费波那契(Fibonacci)序列和黄金分割就可以找到. 王元根据华老的想法，只用两页纸就证出来了. 第一个成果出来了，对二重积分的近似计算获得了一个完美的逼近公式，发表在 1960 年《科学记录》上，至今还在实际中应用. 这个公式表示为：

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \sim \frac{1}{F_{n+1}}\sum_{t=1}^{F_{n+1}} f\left(\left\{\frac{t}{F_{n+1}}\right\},\left\{\frac{tF_n}{F_{n+1}}\right\}\right)$$

刚才提到的数学直觉这个概念，有人说，它是赖以对无穷无尽的组合(或观念原子的结合方式)中作出有用选择的一种鉴别能力. 通俗地说，它是对数学中的内在联系的洞察力的能力. 大数学家庞卡莱(Poincare)认为，有的人虽有极好的记忆力，但数学直觉力不强，所以，他虽然能够学会和掌握数学，但却无力创造；相反，另外有的人虽然记忆力不强，但却有很强的数学直觉力，所以这些人能有所发明与创造. 总之，一个人数学直觉的强弱将决定他创造成绩的大小. 这里我们必须强调一点，数学直觉不是什么神秘的东西，这种能力不是先天的，而是后天的，也就是通过后天刻苦学习、勤于思考所获得的. 前面提到华罗庚的数学直觉很强，这是他长期自学、勤于思考、考虑问题比较深透的结果. 他一眼看出并猜想到用费波那契序列. 为什么他一眼看得出来呢？当时，他把所要解决问题的思路简单地归结为：如何找一个多变数线性齐次同余式，使它在尽可能大的区域内没有非零解. 这样，他就猜想用费波那契序列.

他们首战告捷，继续向高维的情形进军. 如何把费波那契序列推广到高维？华罗庚又凭他的数学直觉，猜想到应该是分圆域. 他认为从分圆域的单位出发，就可以找出均匀分布的点列. 后来也证明他的猜测是正确的. 读者一定会进一步提出疑问：为什么推广到高维会想到用分圆域呢？按照认识论的观点，要由特殊推广到一

般，必须先从特殊情形找出规律，然后考虑能否把此规律推广到一般. 华罗庚认真分析了在解决问题时特殊的二维情形，曾用到了一个重要的数学常数——黄金数，即 $\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 这个数是怎样产生的？原来，它是把圆五等分而产生的. 也就是在

$$x^5=1$$

即

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

中，令 $y=\frac{1}{x}+x$，上式变为 $y^2+y-1=0$，解之得 $y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 也就是 $y=2\cos\frac{2\pi}{5}$. 这是分圆数. 既然分圆为 5 份的 $2\cos\frac{2\pi}{5}$ 对二维有用处，那么，分圆为 $p$ 份的 $2\cos\frac{2\pi l}{p}\left(1\leqslant l\leqslant\frac{p-1}{2}=s\right)$，$p$ 为奇素数，也可能会对计算高维的数值积分有用处.

**4. 创新——用模拟方法解决问题**

对于二维情形，用逻辑推导很容易证明，但到了高维则困难了. 因此，华罗庚、王元证了半年多证不出来，把这个问题搁下来了. 但王元觉得这问题很有意义，丢下来太可惜了. 科学研究贵在坚持与创新，科学研究也不是一帆风顺的，遇到困难，停顿一下，再思考一下，此路不通，是否还有别路？对于长期从事纯粹数学理论研究的人，往往把逻辑推导当做唯一的研究手段. 但对于应用数学家来说，在研究问题时则重在试验和模拟的方法，好与不好看结果. 这是两种思考的方法. 王元大胆采用后一种方法，就是利用分圆域搞出一个高维的计算程序，没有证明，对不对不知道，只要在高维空间中找出一组点列满足分布得很均匀这一条件就行. 然后上计算机去算，即使得不到理论上的结论，我们也可能给出一种算法. 实践的检验可以比较不同算法的优劣，从中筛选出最简单而又在精度范围内正确反映研究对象性质的那种算法来.

又经过差不多四年的艰苦努力，到 1963 年终于把这个程序搞

了出来. 在中国科学院计算所的帮助下,算到 11 重积分,使用的点数百万计,其精度也用计算机硬估出来,由华罗庚审定. 1964～1965 年分别刊登在《科学通报》和《中国科学》杂志上. 这一方法的形成基本上告一段落.

**5. 尾声——完满的成果**

文化大革命来临,这一工作还留下一个尾巴,即理论上还不够完整,没阐述这一方法的精度. 但要达到理论上的完整,还需要一条大定理——Roth 定理.

Roth 本人在 1958 年获得菲尔兹(Fields)奖,获奖工作就是代数数的有理逼近并给出了最好的下界是什么数. 如果能把这条定理推广到高维空间,其理论问题就完满解决,因为分圆域的基就是一大堆代数数. Roth 在获奖时说,他对二维的情形就毫无办法,对高维情形几乎无法想象它是对的. 一个好的兆头来临了,那是 1970 年施密特(Schmidt)居然证得 Roth 定理可推广到高维空间,这样理论完整了,这一方法才趋于完善.

## §1.2 "四元数"的发现

许多数学家认为"四元数"的发现是 19 世纪纯粹数学方面一个很重要的发现. 许多科学工作者经常引用发现者的成果. 他是一位怎么样的数学家? 他是怎样发现"四元数"的? "四元数"的发现有什么重要意义? 下面将作详细介绍.

**1. 早慧勤思的哈密顿(Hamilton)**

哈密顿 1805 年 8 月 3 日生于爱尔兰的都柏林. 很小的时候就显得比一般孩子聪明. 三岁识字,五岁到十四岁学会拉丁、希腊等