數學科技叢書 14 ㊤

微積分4500題正解 ㊤

編輯顧問：朱建正

水牛出版社

編者的話

“數學分析 4500 題”（凡異出版社印）一書，自出版以來，即受到各大專院校師生所採用。尤其以數學分析教學的師生，常以試解該書中的習題，視為掌握數學分析基本知識和基本技能的一項重要方法。

該書有 4462 道習題，內容包括：函數與極限、單變量函數的微分學、不定積分、定積分、級數、多變量函數的微分學、帶參變量積分以及重積分與曲線積分，曲面積分等等。概括了數學分析的全部主題。

習題數量繁多，內容豐富，深入淺出。其中部分習題難度極大，如果認真習作的話，可以深刻地了解基本概念，而且又可有效地提高運算能力；特別是有些難題還可以加强我們綜合分析的思維方法。正因如此，我們殷切地盼望讀者千萬不要輕易查抄本書的解答，因為任何削弱獨立思考的作法，都是違背我們出版本書的原意，更何況解答並非一定標準，只適作為參考而已。

本書承蒙台灣大學數學系朱建正教授細心指導，及楊玉鈴、葉世中、吳俐霖同學仔細校對，在此一併致謝。

編輯部

民國七十五年五月

序　言

傳統的歐洲數學及科學的教科書常常不附很多的習題。和大家的猜測相反的，是因為他們太注重演習了，因此演習常編成另一本書專門由助教上的演習課。

微積分四千五百題原是俄國的主要微積分演習課本。自從凡異出版社介紹到國內之後，頗受到老師和學生的注意。在國內頗為零亂的微積分教科書的市場裏獨樹一幟。此書的特點是

1. 搜羅詳盡。凡微積分各種習題，均依性質編成章節，按由淺而深，同類成群的方式排列。

2. 每節有要點提示。教師甚至可以要點提示來組織其教學。

其中的第六章第四節變量代換、第八章第十四節曲面積分，訓練學生練習各種變量的微分代換，更為一般教科書所無。

許多高材生自以為對微積分習題無所不通者，見到此書無不大驚失色而自愧不如。

美中不足的是，此書書後僅附計算題的答案，至於解法則一概不提，而且部分答案尚有錯誤。自出版以來，屢有學生嘗試為之作題解。其中以張建成君（現已得柏克萊數學博士）最為積極。然僅出版一冊即作罷。主要是工作繁重，稿費太少，且第一冊之銷路不暢所致。

題解好壞對一本書的影響非常大。因為當今學生往往不夠勤勉有恒，在作習題時，想不到五分鐘就想翻閱答案。因此太詳盡的題解，雖然正確無誤，但也破壞了本書的價值。至於解答錯誤，或解法不甚妥當，更影響學生的學習。從教師的觀點來說，實在不容易決定，該不該歡迎題解。

但是本書即使對教師而言，有許多題目也是相當棘手的。如果有一本正解，能夠道盡其中解答的奧妙，倒也頗能幫助繁忙的教師，以及用功的學生。蓋微積分畢竟只是數學的必經之路而已，不值得在難題上花太多的時間。

因此當幾個畢業生帶了有關這本書的解答的資料來找我時，我感到非常有興趣。因為解答的寫法雖然非常粗略，却是出於數學專家之手，決非普遍學生急就章所寫題解可比。簡直可以說，原資料的撰寫群是不計成本在寫的。可以猜想他們對此書的重視，以及對普及微積分教育所下的苦心。他們同時也訂正了原書解答的所有錯誤。

但是原來的資料篇幅太多，不適於在本地出版。因此我建議兩個原則：一是選取有代表性的題目，一是不遺漏任何難題；然後縮編成三冊出版。

我希望本正解出版後，能提高普遍學生對四千五百題的興趣。因為過去他們因本書的艱深而退避三舍，現在至少有正解可依憑。雖然因為解答粗略，他們仍需自己動手才能完全弄懂解法，但這恰好是應該的。對程度好的學生，則幾節他們從不敢接觸的章節，例如前面特點提到的，則可由閱讀正解而學習其做法，則對將來學習物理工程數學的助益甚大。

也許將來因為大家對四千五百題的興趣更加大增，此資料亦可以以原來數千頁的面目出現也未可知。但以目前而言，本正解確是一個恰當的作法。因為出版社的催促、和編輯人員能力的有限，編輯工作實在不盡理想。不過，能夠看它迅速出版，確也是一件好事，反正在台灣，事情常常是這個樣子，總是做了再說。

編輯顧問

朱 建 正

目　　次

第一章　分析引論

§ 1　實數

1° 數學歸納法　爲了證明某定理對任意的自然數 n 爲眞，只須證明下面兩點就夠了：(1)這定理對 $n=1$ 爲眞，(2)設這定理對任何的一個自然數 n 爲眞，則它對其次的一自然數 $n+1$ 也爲眞．

2° 分割　假設分有理數爲 A 和 B 兩類，使其滿足於下列條件：(1)兩類均非空集，(2)每一個有理數必屬於一類，且僅屬於一類，(3)屬於 A 類（下類）的任一數小於屬於 B 類（上類）的任何數。這樣的一個分類法稱爲分割。(a)若或是下類 A 有最大的數，或是上類 B 有最小的數，則分割 A/B 確定一個有理數。(b)若 A 類無最大數，而 B 類亦無最小數，則分割 A/B 確定一個無理數．有理數和無理數統稱爲實數 * 。

3° 絕對值　假若 x 爲實數，則用下列條件所確定的非負數 $|x|$，稱爲 x 的絕對值：

$$|x|=\begin{cases} x, & 若\ x\geqslant 0, \\ -x, & 若\ x<0. \end{cases}$$

對於任何的實數 x 和 y，有以下的不等式成立:

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4° 上確界和下確界　設 $X=\{x\}$ 爲實數的有界集合，若：

*以後若沒有相反的附帶說明，數這個字我們將理解爲實數．

(1)每一個 $x \in X$*滿足不等式

$$x \geqslant m;$$

(2)對於任何的 $\varepsilon > 0$，存在有 $x' \in X$，使

$$x' < m + \varepsilon,$$

則數 $m = inf\{x\}$ 稱爲集合 X 的下確界．

同樣，若：

(1)每一個 $x \in X$ 滿足不等式

$$x \leqslant M,$$

(2)對於任何的 $\varepsilon > 0$，存在有 $x'' \in X$，使

$$x'' > M - \varepsilon,$$

則數 $M = sup\{x\}$ 稱爲集合 X 的上確界．

若集合 X 下方無界，則通常說

$$inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方無界，則認爲

$$sup\{x\} = +\infty.$$

5° 絕對誤差相對誤差　設 a（$a \neq 0$）是被測的量的准確數值，而 x 是這個量的近似值，則

$$\Delta = |x - a|$$

稱爲絕對誤差，而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

稱爲被測的量的相對誤差．

假若 x 的絕對誤差不超過它的第 n 個有效數字的單位的一半，則說 x 有 n 位準確的數字．

*符號 $x \in X$ 表示 x 屬於集合 X．

利用數學歸納法求證下列等式任何自然數 n 皆成立：

1. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

證 當 $n=1$ 時，等式成立。

設對於 $n=k$（自然數）時，等式成立，即

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

則對於 $n=k+1$ 時，有

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

即對於 $n=k+1$ 時等式也成立。

於是，由數學歸納法知，對於任何自然數 n，有

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

4. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

5. 設 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]}=1$. 求證

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 個元素中選取 m 個的組合數，由此推出牛頓的二項式公式。

證 當 $n=1$ 時，由於

$$(a+b)^{[1]}=a+b$$

及
$$\sum_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b,$$

所以等式成立。

設 $n=k$ 時，等式成立，即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}, \qquad (1)$$

則對於 $n=k+1$ 時，有

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}\cdot(a+b-kh).(2)$$

將(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned}(a+b)^{[k+1]}&=(a+b-kh)\cdot\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}\\
&=(a+b-kh)\{C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots\\
&\quad+C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\}\\
&=\{(a-kh)+b\}C_k^0a^{[k]}b^{[0]}\\
&\quad+\{[a-(k-1)h]+(b-h)\}C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}\\
&\quad+\cdots+\{a+(b-kh)\}C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\\
&=C_k^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_k^0a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1a^{[k]}b^{[1]}\\
&\quad+C_k^1a^{[k-1]}b^{[2]}+\cdots+C_k^ka^{[1]}b^{[k]}\\
&\quad+C_k^ka^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1)a^{[k]}b^{[1]}\\
&\quad+\cdots+(C_k^{k-1}+C_k^k)a^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_{k+1}^1a^{[k]}b^{[1]}\\
&\quad+\cdots+C_{k+1}^ka^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m a^{[k+1-m]}b^{[m]},\end{aligned}$$

故由 $(a+b)^{[k]}=\sum\limits_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$ 可推得下式成立：

$$(a+b)^{[k+1]}=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m a^{[k+1-m]}b^{[m]},$$

卽對於 $n=k+1$ 時，等式也成立。

於是，對於任何自然數 n，有

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}\ . \qquad (3)$$

在式子

$$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$$

中，令 $h=o$，卽得

$$a^{[n]}=a^n. \qquad (4)$$

將(4)代入(3)式，得牛頓二項式公式

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m.$$

6. 證明貝努里不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符號相同且大於 -1 的數

證 當 $n=1$ 時，此式取等號.

設 $n=k$ 時，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

則對於 $n=k+1$ 時，由於 x_i ($i=1, 2, \cdots, n$) 大於 -1 .

所以 $1+x_i>0$. 因而有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\&\quad\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\&=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})\\&\quad+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

由於 $x_ix_j\geqslant 0$ ，所以

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\\&\quad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},\end{aligned}$$

即對於 $n=k+1$ 時，不等式也成立，

於是，對於任何自然 n ，有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\\&\quad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.\end{aligned}$$

7. 證明若 $x>-1$ ，則不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (n>1)$$

爲眞，且僅當 $x=0$ 時，等號成立.

8. 證明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad 當 n>1.$$

9. 證明不等式

$$2!\cdot 4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n \quad 當 n>1.$$

10. 證明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

11. 設 c 爲正整數，而不爲整數的平方，且 A/B 爲確定實數 $\sqrt{c}$ 的分割. 求證在 A 類中無最大數. 其中 B 類包含所有合於 $b^2>c$ 的正有理數 b ，而 A 類包含所有其餘的有理數 . 而 B 類中也無最小數.

12. 確定數$\sqrt[3]{2}$的分割A/B用下面的方法來作成：A類包含所有的有理數a，而$a^3>2$；B類包含所有其餘的有理數．證明在A類中無最大數，而在B類中也無最小數．

證 設$a\in A$．即$a^3<2$．下證必可取正整數n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^3<2.$$

事實上，上式相當於$\frac{3a^2}{n}+\frac{3a}{n^2}+\frac{1}{n^3}<2-a^3$．若$a\leqslant 0$，取$n=1$卽可．若$a>0$，注意到$n\geqslant 1$，卽知若取$n$充分大，使$n>\frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$，則上列各式均成立，從而$a+\frac{1}{n}\in A$．故$A$中無最大數．

下設$b\in B$，則$b^3\geqslant 2$．下證不可能有$b^3=2$．事實上，若$b^3=2$，設$b=\frac{p}{q}$，p與q爲互質的正整數，則$\frac{p^3}{q^3}=2$，$p^3=2q^3$，從而p^3爲偶數，因此p必爲偶數：$p=2r$，r爲正整數．由於q與p是互質的，故q必爲奇數，從而q^3也是奇數．但$q^3=4r^3$，故q^3又必是偶數，因此矛盾．由此可知必有$b^3>2$，仿前面之證，可取正整數n，使$\left(b-\frac{1}{n}\right)^3>2$，從而$b-\frac{1}{n}\in B$．由此可知$B$類中無最小數．實質上，此處分割$A/B$確定了一個無理數$\sqrt[3]{2}$．

13. 作出適當的分割，然後證明等式：

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$；

(b) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$．

14. 建立確定數$2^{\sqrt{2}}$的分割．

解 先作分割$A_1>B_1$，使之確定數$\sqrt{2}$．

其次，作分割A/B，其中A類包含全體負有理數、零以及滿足下述條件的正有理數a：

如果有$\frac{p}{q}$（p、q互質）屬於A_1，則有

$$a^q<2^p;$$

而其餘的正有理數歸入B類．

這樣的分割A/B就確定數$2^{\sqrt{2}}$．

15. 求證任何非空且下方有界的數集有下確界，而任何非空且上方有界的數集有上確界．

證 不失一般性，只證本題的後半部分，分兩種情形：

(1) A中有最大數$\bar{a}$．此時，設$a\in A$，則有$a\geqslant\bar{a}$，說明$\bar{a}$爲A的上界．又由於$\bar{a}\in A$，故對A的任何上界M，均有$\bar{a}\leqslant M$，故$\bar{a}$爲A上確界．

(2) A中無最大數．此時，作分割A_1/B_1：取集A的一切上界歸入B_1類，而其餘的數歸入A_1類．這樣，A中一切數全部落在A_1內，A_1及A_2均非空，且A_1中的數小於B_1中的數，這確實是一個實數分割，易知由此分割所產生的實數β是B_1類中的最小數，即β是A的最小上界，從而β是A的上確界．

16. 證明一切有理真分式$\frac{m}{n}$(式中m及n爲自然數，且$0<m<n$)的集合無最小及最大的元素．并求集合的上確界及下確界．

17. 有理數r滿足不等式

$$r^2<2.$$

求這些有理數r所成集合的下確界和上確界．

18. 設$\{-x\}$爲數的集合，這些數是與$x\in\{x\}$符號相反的數．證明等式：

(a) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$; (b) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

19. 設$\{x+y\}$爲所有$x+y$這些和的集合，其中$x\in\{x\}$及$y\in\{y\}$．證明等式：

(a) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$;

(b) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

20. 設$\{xy\}$爲所有xy乘積的集合，其中$x\in\{x\}$及$y\in\{y\}$，且$x\geqslant 0$及$y\geqslant 0$．證明等式：

(a) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$;

(b) $\sup\{x\}\sup\{y\}=\sup\{xy\}$.

證 (a) $\inf\{x\}=m_1$，$\inf\{y\}=m_2$，由於恒有$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$．故必m_1 $m_1\geqslant 0$，$m_2\geqslant 0$．於是

(1)當$x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$時，$x\geqslant m_1\geqslant 0$，$y\geqslant m_2\geqslant 0$;

(2)對任何的正數ε，存在有數$x'\in\{x\}$，$y'\in\{y\}$，使

$$0\leqslant x'<m_1+\varepsilon,\quad 0\leqslant y'<m_2+\varepsilon.$$

由(1)及(2)推得：

(3)當 $xy\in\{xy\}$，其中 $x\in\{x\}$，$y\in\{x\}$，$xy\geqslant m_1m_2$；

(4)對於任何的正數 ε，存在有 $x'y'\in\{xy\}$（其中 $x'\in\{x\}$，$y'\in\{y\}$，使

$$0\leqslant x'y'<(m_1+\varepsilon)(m_2+\varepsilon)=m_1m_2+\varepsilon',$$

其中 $\varepsilon'=(m_1+m_2)\varepsilon+\varepsilon^2$.

由(3)及(4)知數 $m_1m_2=\inf\{xy\}$，即

$$\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}.$$

(b)同法可證

$$\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}.$$

21. 求證不等式：

(a) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$；

(b) $|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

22. $|x+1|<0.01$.

解 由 $|x+1|<0.01$ 推得

$$-0.01<x+1<0.01,$$

所以，

$$-1.01<x<-0.99.$$

23. $|x-2|\geqslant10$.

24. $|x|>|x+1|$.

25. $|2x-1|<|x-1|$.

26. $|x+2|+|x-2|\leqslant12$.

27. $|x+2|-|x|>1$.

28. $\big||x+1|-|x-1|\big|<1$.

29. $|x(1-x)|<0.05$.

30. 證明恆等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

31. 當測量長度10厘米時，絕對誤差爲 0.5 毫米；當測量距離 500 千米時，，絕對誤差等於 200 米．哪種測量較爲精確？

解 用相對誤差

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

進行比較，其中 a 爲被測量的精確值，而 Δ 是絕對誤差.

對於前者， $\delta=\dfrac{0.5\times 0.1}{10}=0.5\%$,

對於後者， $\delta=\dfrac{200}{500\times 1000}=0.04\%$,

所以，後者測量較爲精確.

32. 設數

$$x=2.3752$$

的相對誤差爲 1 %，試求此數包含若干位准確數字？

解 因爲 $\dfrac{\Delta}{2.3752}=0.01$,所以 $\Delta=0.023752$.

因而，此數包含兩位准確數字.

33. 數

$$x=12.125$$

包含三位准確數字. 試求此數的相對誤差？

34. 矩形的邊等於：

$$x=2.50\text{ 厘米}\pm 0.01\text{ 厘米},$$

$$y=4.00\text{ 厘米}\pm 0.02\text{ 厘米}.$$

這個矩形的面積 S 界於甚麼範圍入？設其邊長取平均值時，矩形面積的絕對誤差 Δ 和相對誤差 δ 爲何？

35. 物體的重量 $P=12.59$ 克 ± 0.01 克，其體積 $V=3.2$ 厘米^3 ± 0.2 厘米^3 . 若對物體的重量和體積都其平均值，試求物體的比重，并估計比重的絕對誤差和相對誤差.

36.* 圓半徑

$$r=7.2\text{ 米}\pm 0.1\text{ 米}.$$

若取 $\pi=3.14$ ，則求出的圓面積的最小相對誤差爲何？

解 圓面積 $A=\pi\times 7.2^2=51.84\,\pi$ (米^2)

$$\Delta_1=\pi(7.2+0.1)^2-\pi\cdot 7.2^2=1.45\pi.$$

$$\Delta_2=|\pi(7.2-0.1)^2-\pi\cdot 7.2^2|=1.43\pi.$$

$$\Delta\leqslant\max(\Delta_1,\Delta_2)=1.45\pi(\text{米}^2)$$

即一般的圓面積 A 爲 (51.84 ± 1.45) π (米^2) , 故

$$\delta\leqslant\frac{1.45\pi}{51.84\pi}<2.80\%.$$

37. 對直角平行六面體測得

$x=24.7$ 米± 0.2 米;

$y=6.5$ 米± 0.1 米;

$z=1.2$ 米± 0.1 米.

這個平行六面體的體積 V 界於甚麼範圍內？若測量的各結果都取其平均值，則求出的平行六面體的體積可能有的絕對誤差和相對誤差爲何？

38. 測量正方形的邊 x，此處 2 米$< x <$ 3米，應有多小的絕對誤差，才能使此正方形面積有可能精確到 0.001 米^2？

39. 假定矩形每邊的長皆不超過 10 米，爲了使根據測量所計算出來的面積與原面積之差不超過 0.01 平方米，問測量矩形的邊 x 與 y 時，許可的絕對誤差 Δ 的值多大 *)?

40. 設 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 爲數 x 和 y 的相對誤差，$\delta(xy)$ 爲數 xy 的相對誤差，求證：

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

證 設 $x=a+\Delta_x$，$y=b+\Delta_y$，

其中 a 及 b 分別是 x 及 y 的精確值，Δ_x 及 Δ_y 是絕對誤差，則有

$$xy-ab=b\Delta_x+a\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y.$$

於是，

$$\begin{aligned}\Delta&=|xy-ab|\\&\leqslant|b|\cdot\Delta_x+|a|\cdot\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y.\end{aligned}$$

最後卽得

$$\delta(xy)=\frac{\Delta}{|ab|}\leqslant\frac{\Delta_x}{|a|}+\frac{\Delta_y}{|b|}+\frac{\Delta_x}{|a|}\cdot\frac{\Delta_y}{|b|}.$$

此卽

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

※ 36 題號右上角帶" + "號表示題解答案與原習題集所附答案不一致，以後不再說明.

§ 2. 敍列的理論

1° 敍列的極根的概念　假設對於任何的 $\varepsilon>0$，有數 $N=N(\varepsilon)$，使

當 $n>N$ 時，$|x_n-a|<\varepsilon$,

則稱敍列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 有極限 a（或者說，收歛於 a），亦即

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a,$$

其中，若

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0,$$

則稱 x_n 爲無窮小．

没有極限的敍列．稱爲發散的．

2° 極限存在的准則

(1)設

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$$

及

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty} z_n=c,$$

則

$$\lim_{n\to\infty} x_n=c.$$

(2)单調而且有界的敍列有極限．

(3)哥西判别法　敍列 $\{x_n\}$ 的極限存在的必要而且充分的條件是：對於任何的 $\varepsilon>0$，有數 $N=N(\varepsilon)$，使當 $n>N$ 和 $p>0$ 時，$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$．

3° 關於敍列的極根的基本定理　設

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} y_n$$

存在，則有：

(1)若 $x_n\leqslant y_n$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

(4)若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

4° 數 e 敍列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

有確定的極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284\cdots$$

5° 無窮極限　符號

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

表示對於任何的 $E>0$，有數 $N=N(E)$，使

當 $n>N$ 時，$|x_n|>E$.

6° 聚點　設已知敍列 $x_n (n=1,2,\cdots)$ 有子敍列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \cdots, x_{p_n}\cdots$$

適合

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi,$$

則稱數 ξ (或符號 ∞) 爲已知數列 $a_n (n=1,2,\cdots)$ 的聚點．

一切有界的敍列至少有一個有窮的聚點 (波爾查諾一外爾斯特拉斯原理)．若這個聚點是唯一的，則它卽爲已知敍列的有窮極限．

敍列 x_n 的最小聚點 (有窮的或無窮的)

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

稱爲下極限，而它的最大聚點

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

稱爲此敍列的上極限．

等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

爲敍列 x_n 的 (有窮或無窮) 極限存在的必要而且充分的條件．

41. 設

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

證明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

卽：對於任一個給定的 $\varepsilon>0$，求數 $N=N(\varepsilon)$

使得

在 $n>N$ 時，$|x_n-1|<\varepsilon$.

塡下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
N					