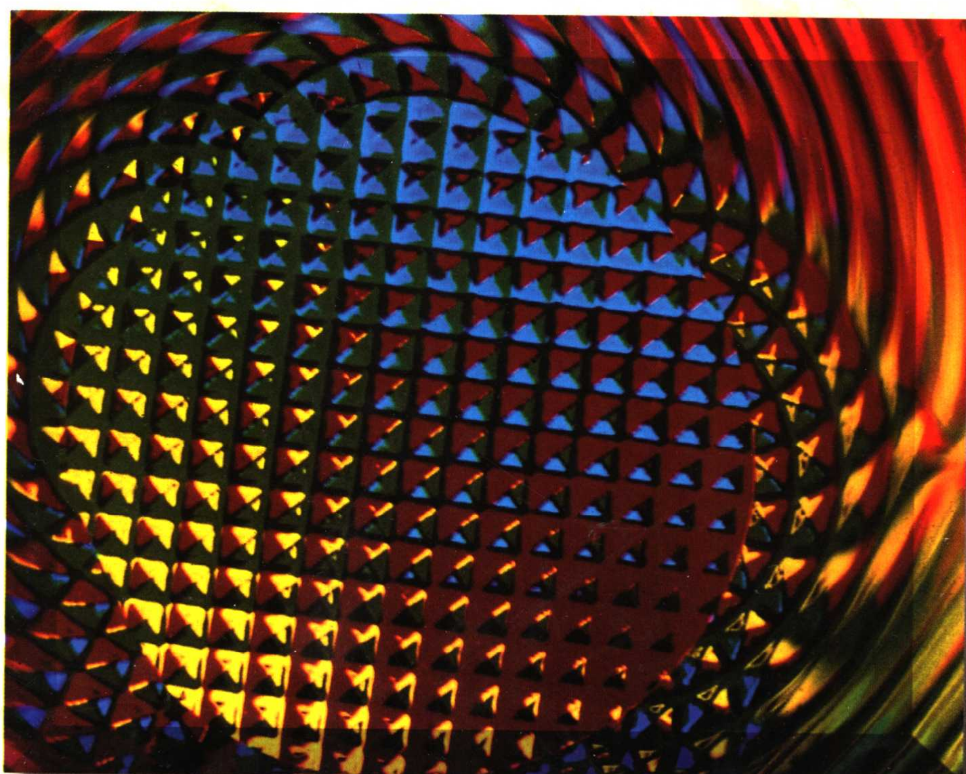
全国各类成人高等学校招生统一考试
大专起点升本科考前辅导班教材

高等数学

（文科类）

丛书主编　郭光耀
本书主编　朱光贵



科学普及出版社

全国各类成人高等学校招生统一考试
大专起点升本科考前辅导班教材丛书

高 等 数 学
（文科类）

丛书主编　郭光耀
本书主编　朱光贵

科 学 普 及 出 版 社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:文科类/朱光贵主编.-北京:科学普及出版社,1998.1

(全国各类成人高等学校招生统一考试大专起点升本科考前辅导班教材/郭光耀主编)
ISBN 7-110-04366-5

I.高… II.朱… III.高等数学-高等教育:成人教育-入学考试-教材 IV.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 25758 号

科学普及出版社出版
北京海淀区白石桥路 32 号　邮政编码:100081
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京国防印刷厂印刷

*

开本:787 毫米×1092 毫米　1/16　印张:12.25　字数:220 千字
1998 年 1 月第 1 版　　1998 年 1 月第 1 次印刷
印数:1-10000　　定价:20.00 元

内 容 提 要

本书是根据国家教委 1997 年 8 月制订的《全国各类成人高等学校专科起点本科班招生(非师范类)复习考试大纲:经济管理类》的精神编写的,主要作为考生复习《高等数学》的教材。

内容为:函数、极限和连续,一元函数微分学,一元函数积分学,多元函数微积分初步。

本书编写的基本指导思想是便于考生自学,因此在阐述每个问题时,力求条理清楚,重点突出,概念明确,深入浅出。

本书也可作为财经类成人高等学校学生学习高等数学的教材或参考书。

丛书主编 郭光耀
丛书编委 （按姓氏笔画排序）：

于　一　仁　静　方　铭　王　奇　王小平
王爱萍　牛　辉　包　海　朱光贵　纪　浩
刘　晓　刘亚玲　刘　嘉　李寿山　何虎生
陈洪育　沈俊燕　国　炜　岳秀波　周伯君
赵达夫　闻　跃　郭光耀　徐　刚　唐恒志
博建国　魏发晨

本书主编 朱光贵
本书编者 朱光贵　王　奇　陈洪育

责任编辑 肖　叶　胡　萍
责任校对 张林娜
封面设计 曲　文
正文设计 曲　文

前　　言

自从1994年实行专升本(非师范类)全国统一考试以来,由于没有专门的教材使广大考生在复习过程中遇到较大的困难。为了解决这个问题,我们根据国家教育委员会制订的1998年新的《高等数学(文科类)复习考试大纲》,编写了这本教材,以帮助考生复习和考试。

本教材共分四章:第一章函数、极限和连续;第二章一元函数微分学;第三章一元函数积分学;第四章多元函数微积分初步。

本教材编写的基本指导思想是便于考生自学,因此在阐述每个问题时,力求条理清楚,重点突出,概念明确,深入浅出;每一基本内容后面的例题也选得较多,同时将解题过程尽量写得易于接受。

请辅导教师和考生注意:本书已按国家标准规定,将"tg"改为"tan","ctg"改为"cot"。

由于编写时间较短,书中不当之处还请读者批评指正。

编　者

1998年1月

目　　录

第一章　函数、极限和连续

变量之间的相互依赖关系，即所谓函数关系，是微积分研究的对象．而极限的概念和函数连续性的概念是微积分的两个重要的基本概念．

§1.1　函数的概念

对于函数的概念，一般有以下的定义．

定义　设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 y 随变量 x 而变化，如果变量 x 在数轴上的某一部分 D 中取某一数值时，变量 y 依照某一规律 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为

$$y=f(x)$$

其中，x 叫自变量，y 叫因变量或函数．

有时为了表示几个不同的函数，还可以用 $\varphi(x)$，$g(x)$，$F(x)$等来表示函数．

在上述函数的定义中，很重要的一点是：自变量 x 在 D 上取每一数值时，函数 y 都有确定的数值与之对应，此时我们称函数在 D 上有定义（如果对应于 D 中的 x 的每个值，y 的值不止一个，在这样的情况下，我们称函数是多值的．一般高等数学中说到“函数”一词均指单值函数，多值函数不在我们讨论的范围内，多值函数通常都拆成几个单值函数分别研究）．

定义域　数轴上使函数 f 有定义的自变量 x 的取值范围 D，称为函数的定义域，记为 $D(f)$．

值域　函数 y 的取值范围，称为函数的值域，记为 $Z(f)$．

正确理解函数定义应当注意以下几点：

(1)　定义域和对应规律是确定两个变量是否构成函数关系的两个要素，缺一不可．所以如果两个函数的定义域和对应规则完全相同，那么它们就是相同的函数；如果定义域和对应规则有一个不同，它们就是不同的函数．

(2)　在函数的定义中，并没有要求当自变量变化时函数一定要变，而是要求 x 取一个值时，y 有一个确定的对应值．因此，例如 $f(x)=3$ 也表示一个函数，这函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，x 无论取什么实数值时，对应的函数值都等于 3．

(3)　函数 $y=f(x)$中的“f”表示函数关系中的对应规则，而 $f(x)$就是指这个规则作用在 x 上．如 $y=f(x)=2x^2+5$，这里 $f(x)$表示把 x 代入表达式 $2(\quad)^2+5$ 的括号中进行运算，变量 x 与 y 之间的对应规则就是由这些运算确定的，即“f”表示这样的对应规则，即与 x 对应的函数值，是由括号内的 x 值平方后乘以 2 再加上 5 而得到的．

当自变量 x 取某一个定值 a 时，函数 $y=f(x)$的对应值记为 $f(a)$，有时也记为 $y|_{x=a}$．

例如，对于函数 $f(x)=2x^2+5$ 来说

$$f(0)=2\cdot0^2+5=5$$
$$f(-1)=2\cdot(-1)^2+5=7$$

$$f(a)=2a^2+5$$

$$f(\frac{1}{x})=2(\frac{1}{x})^2+5=\frac{2}{x^2}+5$$

$$f(x-1)=2(x-1)^2+5=2x^2-4x+7$$

下面举例求函数的定义域.

例 1　求下列函数　$y=\frac{1}{x^2-2x}$的定义域.

解　因为分式的分母不能为零,所以当分母不为零时函数有定义,即有

$$x^2-2x=x(x-2)\neq 0$$

也就是 $x\neq 0$ 且 $x\neq 2$ 时,函数有定义,
所以函数的定义域为

$$D(f)=(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$$

用不等式表示是：$-\infty<x<0$,　$0<x<2$,　$2<x<+\infty$

例 2　求函数　$y=\lg\frac{x}{x-2}+\arcsin\frac{3x-1}{5}$的定义域.

解　设　$y_1=\lg\frac{x}{x-2}$,　$y_2=\arcsin\frac{3x-1}{5}$

对于 y_1,要求$\frac{x}{x-2}>0$,

解之得　(1)　$x>0$ 且 $x-2>0$

所以　$x>2$

或　(2)$x<0$ 且 $x-2<0$

所以　$x<0$

因此 y_1 的定义域为$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

对于 y_2,由反正弦的定义知,应有

$$\left|\frac{3x-1}{5}\right|\leqslant 1,\quad 即 -1\leqslant\frac{3x-1}{5}\leqslant 1$$

$$所以\quad -5\leqslant 3x-1\leqslant 5$$

解之得　$-\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant 2$

因此 y_2 的定义域为$[-\frac{4}{3},2]$.

由于 $y=y_1+y_2$,所以函数 y 的定义域是上述两个定义域的交集,即

$$D(f)=\{x\mid x>2 或 x<0\}\cap\left\{x\mid -\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant 2\right\}$$

$$=\left\{x\mid -\frac{4}{3}\leqslant x<0\right\}$$

求函数的定义域时,应注意以下几点:

(1)　分式的分母不能为零;

(2)　偶次方根的根底式应为非负数;

(3)　对数号下的式子应为正数;

(4)　正切、余切符号下的式子的值分别不能等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$,　$k\pi$　　$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$;

(5) 反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于1；

(6) 如果函数式由若干项组成，其定义域应是各项定义域的公共部分.

例3 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$，求函数 $f(x^2)$ 的定义域.

解 由于 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$，因此求 $f(x^2)$ 的定义域的问题就变成了求 x 的取值范围，使得 $x^2\in(0,1)$. 显然，当 $x\in(0,1)$ 时，可使 $x^2\in(0,1)$，但当 $x\in(-1,0)$ 时，也可使 $x^2\in(0,1)$. 所以 $f(x^2)$ 的定义域为

$$D(f)=(-1,0)\cup(0,1)$$

例4 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(\dfrac{1}{2})$，$f(-x)$，$f(\dfrac{1}{x})$，$f(x+1)$，$f(x^2)$.

解 由于 $f(x_0)$ 就是函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时的函数值，因此将 x_0 代入 $f(x)$ 的表达式中，即可求出 $f(x_0)$，所以有

$$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$$f(\frac{1}{2})=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}$$

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\frac{x}{2+x}$$

$$f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

分段函数

最后要指出：有时还要考察这样的函数，对于其定义域内自变量 x 的不同值，不能用一个统一的公式表示，而要用两个或两个以上的公式来表示. 这类函数称为“分段函数”.

例如 $y=|x|$，就是一个分段函数，因为它可以写成

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

当 $x<0$ 时，公式为 $y=-x$，当 $x\geqslant 0$ 时，用公式 $y=x$ 来表示(如图1-1). 这个函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

又如

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$$

也是一个分段函数(如图1-2). 这个函数的定义域也是 $(-\infty,+\infty)$.

关于分段函数，要注意以下几点：

(1) 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数；

(2) 因为函数式子是分段表示的，所以各段的定义域必须明确标出；

(3) 对分段函数求函数值时,不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求;

(4) 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

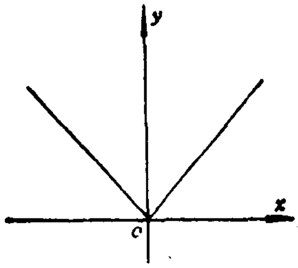


图 1-1

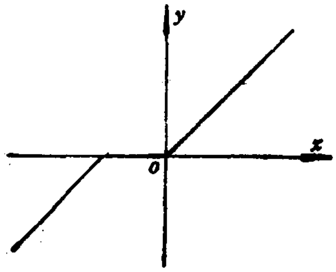


图 1-2

隐函数

前面所讲的形如 $y=f(x)$的函数,一般称为显函数.其特点是因变量 y 单独地在等号的一边(左边),而另一边(右边)则仅仅是自变量 x 的表达式$f(x)$.此外,还有一类函数,称为隐函数.

定义 凡能够由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数关系,称为隐函数.

例如 $x^2+y^2-1=0$,就是一个隐函数.因为在这个方程中,函数 y 没有用仅含自变量x 的公式$f(x)$表示出来.不过若由它解出

$$y=\sqrt{1-x^2}, \qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$

或

$$y=-\sqrt{1-x^2}, \qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$

它就变成了两个显函数(称每一个显函数为一个单值支,前一支表示上半个圆,后一支表示下半个圆),并称该隐函数为二值函数(多值函数的一种).

要注意的是:并非所有隐函数都可以解成显函数的.例如开普勒方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0 \qquad (\text{此处 } \varepsilon \text{ 为常数}, 0<\varepsilon<1)$$

是一个隐函数,但由它就解不出显函数.

§ 1.2 函数的几何特性

在分析讨论某一个函数的时候,我们往往要讨论这个函数的一些几何特性,如:奇偶性、周期性、单调增减性和有界性.

一、函数的奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$的定义域关于原点对称,如果对于定义域中的任一点 x,恒有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$为偶函数.

设函数 $y=f(x)$的定义域关于原点对称,如果对于定义域中的任一点 x,恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图形是对称于 y 轴的(如图 1-3).因为 $f(-x)=f(x)$,所以如果点 $P[x,f(x)]$是曲线 $y=f(x)$上的一个点,则与它对称于 y 轴的点$P'[-x,f(x)]$,也是曲线上的一个点.

奇函数的图形是对称于原点的(如图 1-4). 因为$f(-x)=-f(x)$, 所以如果点 $Q[x, f(x)]$是曲线 $y=f(x)$上的一个点, 则与它对称于原点的点 $Q'(-x,-f(x))$, 也是曲线上的一个点.

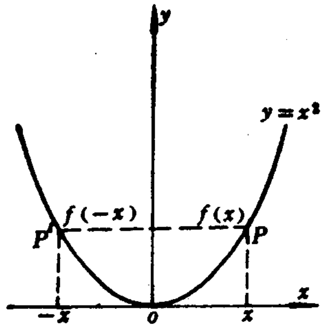


图 1-3

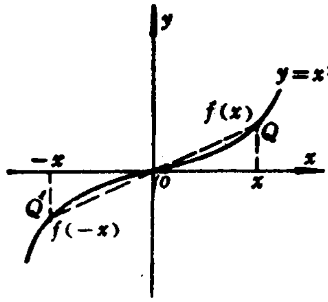


图 1-4

例 1 判定 $y=x^4-2x^2$ 的奇偶性.

解 设 $f(x)=x^4-2x^2$, 其定义域为$(-\infty,+\infty)$

因为 $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$

所以 $y=x^4-2x^2$ 是偶函数.

例 2 判定 $y=x\cos x$ 的奇偶性.

解 设 $f(x)=x\cos x$, 其定义域为$(-\infty,+\infty)$

因为 $f(-x)=(-x)\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$

所以 $y=x\cos x$ 是奇函数.

例 3 设 $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$都是偶函数, 其定义域均为 $D(f)$. 试证明 $f_1(x)\cdot f_2(x)$是偶函数.

证 设 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$, 定义域为 $D(f)$

因为 $F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)$

$=f_1(x)\cdot f_2(x)$ (因为 $f_1(x)$, $f_2(x)$均为偶函数)

$=F(x)$

所以 $f_1(x)\cdot f_2(x)$为偶函数, 即两个偶函数的乘积是偶函数.

同样我们可以证明

两个奇函数的乘积是偶函数;

奇函数与偶函数的乘积是奇函数;

两个偶函数的和是偶函数;

两个奇函数的和是奇函数.

如果我们知道了函数 $y=f(x)$的奇偶性, 则在描绘$f(x)$的图形时, 只须在$[0,+\infty)$内讨论就够了, 因为它在$(-\infty,0]$内的情况, 完全可以由对称性推出来.

不过要注意: 很多函数是没有奇偶性的, 切不可认为任何函数都具有奇偶性. 例如 $y=x^2+\sin x$就没有奇偶性, 它既不是奇函数, 也不是偶函数.

二、函数的周期性

定义 对于函数 $y=f(x)$, 如果存在不为零的常数 T, 使得关系式 $f(x+T)=f(x)$对

于$(-\infty,+\infty)$内的任何 x 都成立,则称 $f(x)$为周期函数,通常称满足这个等式的最小正数 T 为函数的周期(其实,T 的整数倍均为$f(x)$的周期).

例如 $y=\sin x$ 就是一个周期函数,周期 $T=2\pi$.

例 4 求函数 $y=\sin 3x$ 的周期.

解 因为

$$y=\sin 3x=\sin(3x+2\pi)=\sin 3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

即有 $f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=f(x)$

所以由定义知,它的周期为 $T=\frac{2\pi}{3}$.

注意 通常我们所说周期函数的周期是指最小正周期.但是并非每一个周期函数都有最小周期.例如 $f(x)=C$(C 为常数),因为任何实数 $a>0$ 都是它的周期,所以 $f(x)$没有最小周期.

三、 函数的单调增减性

定义 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内是单调增加的;如果当 $x_1<x_2$ 时,有$f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内是严格单调增加的.

如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内是单调减少的;如果当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内是严格单调减少的.

由定义可知,在(a,b)内严格单调增加的函数 $f(x)$,其图形是沿 x 轴的正向逐渐上升的(如图 1-5);严格单调减少的函数 $f(x)$,其图形是沿 x 轴的正向逐渐下降的(如图1-6).

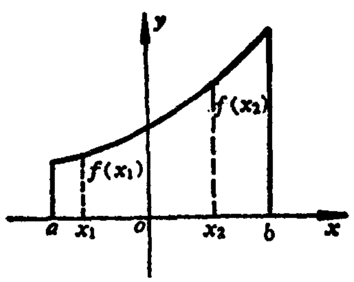


图 1-5

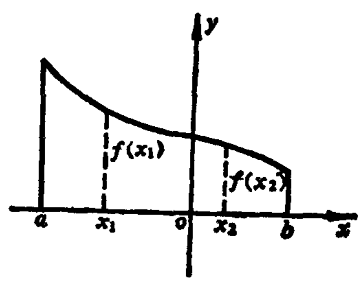


图 1-6

注意:单调性是对一个区间而不是对一个点来讲的.

例 5 求函数 $y=x^2+2$ 的单调增减区间.

解 函数在$(-\infty,+\infty)$内有定义,设 x_1 和 x_2 是$(-\infty,+\infty)$内的任意两点,则有

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2+2)-(x_2^2+2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$$

当 x_1,x_2 都是负数,且 $x_1<x_2$ 时,有

$$(x_1+x_2)<0,\quad (x_1-x_2)<0$$
$$(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0$$

所以　$f(x_1)-f(x_2)>0$

即　$f(x_1)>f(x_2)$

所以　$y=x^2+2$ 在$(-\infty,0)$内是严格单调减少的.

当 x_1,x_2 都是正数,且 $x_1<x_2$ 时,有

$$(x_1+x_2)>0,\quad (x_1-x_2)<0$$

$$(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$$

所以　$f(x_1)-f(x_2)<0$

即　$f(x_1)<f(x_2)$

所以　$y=x^2+2$ 在$(0,+\infty)$内是严格单调增加的.

注意:这个函数在定义域$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.因为当 $x_1<x_2$ 且异号时,$x_1^2-x_2^2$ 的符号可正可负.

函数的单调增减性是函数的一个很重要的几何特性.以上讲的是直接用定义来判定函数的单调增减性,在判定时可能要用到一些初等数学的公式,有些读者对此可能会感到困难.这里我们只要求弄清楚定义即可.在下面第二章中,我们还要讲用导数来判定单调增减性的方法,它比直接用定义判定要容易一些.

四、 函数的有界性

定义　设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果存在一个正数 M,使得对于(a,b)内的任意一点 x,总有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内是有界的.否则,称 $f(x)$在(a,b)内是无界的.

如图 1-7,函数 $y=f(x)$在(a,b)内有界的几何意义是:曲线 $y=f(x)$在区间(a,b)内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条水平直线之间的范围内.

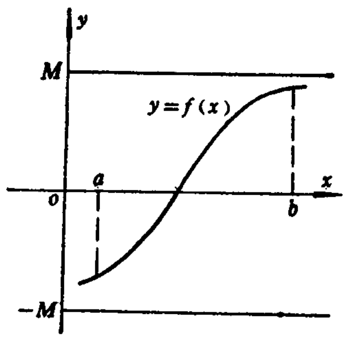


图　1-7

例如函数　$y=\sin x$,因为对任何实数 x,都有$|\sin x|\leqslant 1$,所以 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,它的图形落在两条水平直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间.

对于函数的有界性,要注意以下两点:

(1)　如果一个函数 $y=f(x)$在(a,b)内有界,它的界并不是唯一的.例如 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,有$|\sin x|\leqslant 1$,但是我们也可以取 $M=2$ 作为它的界,即$|\sin x|<2$.大于 1 的任何正数都可以作为 $y=\sin x$ 的界.

(2)　函数 $y=f(x)$有界与否,是与所在区间紧密联系在一起的.例如 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(1,2)$内是有界的,但在区间$(0,1)$内则无界;函数 $y=x^3+1$ 在$(-\infty,+\infty)$内无界,而在任何有限区间内都是有界的.

如果函数 $f(x)$在其定义域内有界,则它在定义域内的任一部分区间上必有界.

关于函数的有界性,还有一种单方向有界的概念.

设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果存在一个数 B,使得对于(a,b)内的任意一点 x,总有 $f(x)\leqslant B$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内是**有上界**的;如果存在一个数 A,使得对于(a,b)内的任意一点 x,总有 $f(x)\geqslant A$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内是**有下界**的.

如果一个函数在区间(a,b)内是有界的,则它必定既有上界也有下界,反之,如果一个函

数在区间(a,b)内仅有上界(或下界)，则它在此区间内不一定有界.

由于函数 y 也是一个变量(因变量)，因此我们也可以将函数有界说成是变量有界.这种说法在以后要多次用到.

§1.3 反函数的概念

这一节中讲述反函数的概念，主要讲反函数的定义和求法.

以前讲过函数的概念，例如一个函数 $y=f(x)$，其中 x 是自变量，y 是因变量，我们主要着眼于考察变量 y 随着变量 x 而变化的情况.但有时需要反过来考虑问题，即将变量 y 看成自变量，而将变量 x 看成因变量，从而考虑变量 x 随着变量 y 而变化的情况.

一般地说，有以下的定义

定义 设已知函数为

$$y=f(x) \tag{1}$$

如果由此解出

$$x=\varphi(y) \tag{2}$$

是一个函数，则称它为 $f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，并称 $f(x)$为直接函数.

由于习惯上往往用字母 x 表示自变量，而用字母 y 表示函数，为了与习惯一致，通常将(2)式中的自变量 y 改写成 x，而将函数 x 改写成 y，于是(1)式的反函数就变为

$$y=\varphi(x) \tag{3}$$

记为 $y=f^{-1}(x)$.

当然我们也可以说 $y=f(x)$是 $y=f^{-1}(x)$的反函数，也就是说它们互为反函数.

要注意：函数 $x=\varphi(y)$与 $y=\varphi(x)$是同一个函数，因为表示函数关系的符号 φ 是相同的，虽然表示自变量和因变量的字母变了，但这没有关系，就如同我们将圆周长与半径的函数关系写成

$$y=2\pi x$$

或写成

$$C=2\pi r$$

是一样的.所以当 $x=\varphi(y)$是 $y=f(x)$的反函数时，$y=\varphi(x)$也是 $y=f(x)$的反函数.

例如，设直接函数为

$$y=\lg(x+1) \qquad \text{定义域为}(-1,+\infty)$$
$$\text{值域为}(-\infty,+\infty)$$

由此可解出

$$x=10^{y}-1$$

显然，当 y 在$(-\infty,+\infty)$内取任一值时，x 在$(-1,+\infty)$内有唯一确定的值与之对应，因此它是一个函数，就称它是函数 $y=\lg(x+1)$的反函数，并改写成

$$y=10^{x}-1 \qquad \text{定义域为}(-\infty,+\infty)$$
$$\text{值域为}(-1,+\infty)$$

由这个例子亦知：如果直接函数 $y=f(x)$的定义域$D(f)=X$，值域为 $Z(f)=Y$，则其反函数 $x=\varphi(y)$的定义域为 $D(\varphi)=Y$，值域为 $Z(\varphi)=X$.

又例如，设直接函数为

$$y=x^2 \qquad \text{定义域为}(-\infty,+\infty)$$
$$\text{值域为}[0,+\infty)$$

由此可解出

$$x=\pm\sqrt{y}$$

但当给定一个 y 的值时，有两个 x 的值($\sqrt{y}$和 $-\sqrt{y}$)与之对应，即 x 不是唯一的. 因此由函数定义(对于自变量的每个取值，函数有唯一确定的值与之对应)此函数不存在反函数.

如果把直接函数的定义域改成$[0,+\infty)$，则只能解出(因 x 不能为负值)

$$x=\sqrt{y}$$

这时当给定一个 y 的值时，x 就有唯一确定的值与之对应，因此它是一个函数，即为 $y=x^2$ 的反函数，改写成 $y=\sqrt{x}$. 如果把直接函数的定义域改成$(-\infty,0]$，这时它也存在反函数

$$y=-\sqrt{x}.$$

于是自然产生这样的问题：在什么条件下直接函数 $y=f(x)$有反函数存在?

以下的反函数存在定理可以回答这个问题.

定理 如果函数

$$y=f(x), \qquad D(f)=X,$$
$$Z(f)=Y$$

是严格单调增加(或减少)的，则它必定存在反函数.

$$x=\varphi(y), \qquad D(\varphi)=Y,$$
$$Z(\varphi)=X$$

并且也是严格单调增加(或减少)的.

这个定理我们不给出证明. 它很容易从图 1-8 上来理解. 图中直接函数为 $y=f(x)$，当在定义域$[a,b]$上任给一个值 x 时，由曲线 $y=f(x)$上可以找到唯一确定的值 y 与之对应，且 $y\in[c,d]$，这就是说直接函数 $y=f(x)$的定义域为$[a,b]$，值域为$[c,d]$. 由于 $y=f(x)$是严格单调增加的，所以当 $x_1<x_2$ 时就有 $y_1<y_2$.

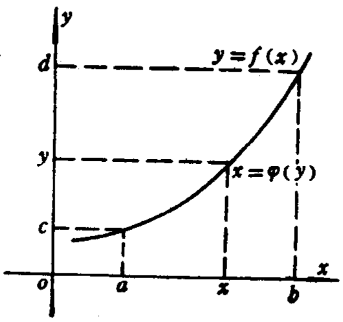


图 1-8

反之，对于$[c,d]$上的任何值 y，在曲线 $x=\varphi(y)$上可以找到唯一确定的值 x 与之对应(此处 $x=\varphi(y)$与 $y=f(x)$是同一条曲线)，且 $x\in[a,b]$；即对任意的 $y\in[c,d]$，曲线 $x=\varphi(y)$上有唯一确定的 $x\in[a,b]$与之对应，即 x 是y 的函数. 显然当 $y_1<y_2$ 时有$x_1<x_2$，即 $x=\varphi(y)$也是严格单调增加的.

这就是上述定理的全部含意.

求反函数的步骤

第一步：从直接函数 $y=f(x)$中解出

$$x=\varphi(y)$$

看它是否能成为函数；

第二步：如果 $x=\varphi(y)$是函数，将字母 x 换成y，将字母 y 换成x，得

$$y=\varphi(x)$$

这就是 $y=f(x)$的反函数.

例 1 求 $y=2x-1$ 的反函数，并画出其图形.