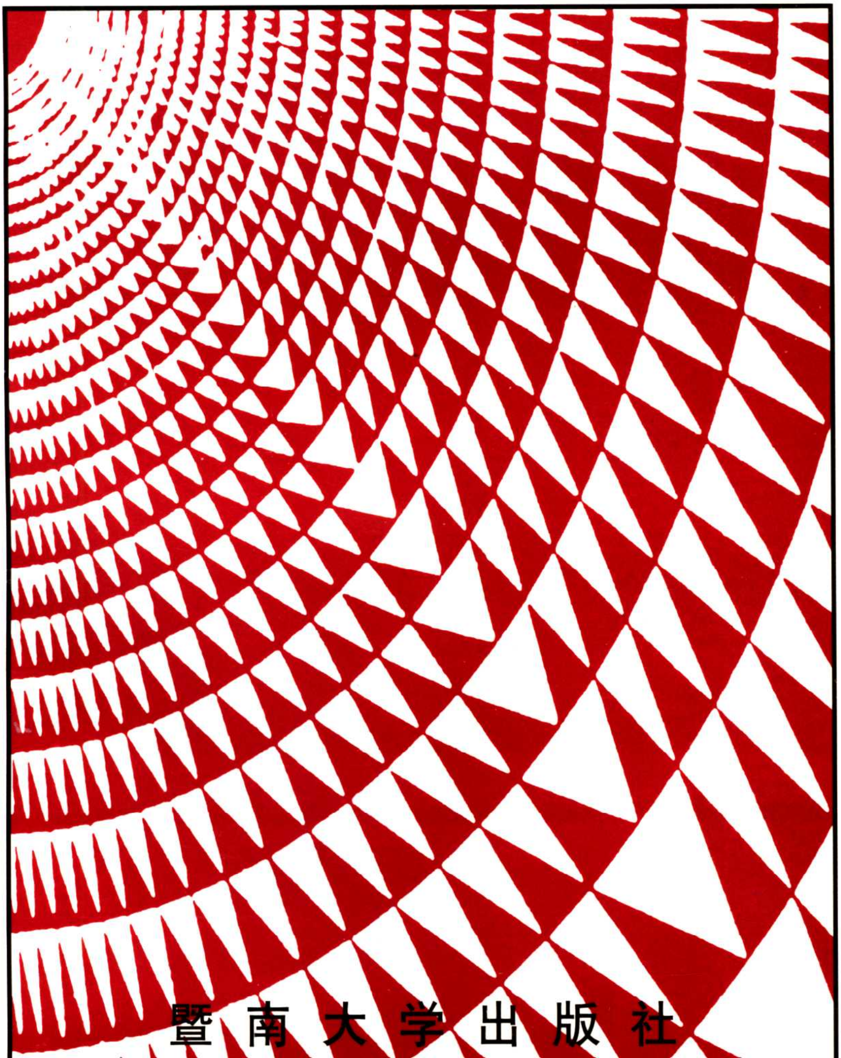
传热学的有限元方法

翁荣周 编著



暨南大学出版社

传热学的有限元方法

翁荣周　编著

暨南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

传热学的有限元方法/翁荣周编著
—广州:暨南大学出版社,2000.10.
ISBN 7—81029—776—7

Ⅰ.传…
Ⅱ.翁…
Ⅲ.传热学—有限元法
Ⅳ.TK124

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 75952 号

暨南大学出版社出版
新华书店经销
华侨大学印刷厂印刷
*
开本:850×1168 1/32 印张:4.375 字数:125 千
2000 年 10 月第 1 版 2000 年 10 月第 1 次印刷
印数:1—1500 册
定价:25.00 元

作者的话

有限元方法是六十年代发展起来的求解数学物理问题的一种计算方法，有限元方法在传热学中的应用则是近年来的事，如同结构力学、流体力学一样，由于有限元方法的应用，传热学得到了新的发展。

作者从八十年代开始在华侨大学为研究生开设《数值传热学》课程，该课程主要包括传热学中的差分法和有限元方法两部分内容。在几十年的教学过程中，著者感到关于传热学中的有限元方法目前还没有比较合适的教材，这方面的专著也相对较少，这就促使著者编写该书的想法。

本书在编著的过程中本着少而精的原则，除对有限元的数学基础作了必要的阐述外，把重点放在有限元的求解方法上。该书尽量作到自成体系，以期读者阅读之后，基本上可以掌握有限元的一般原理，具备应用它去求解工程技术问题的能力。

本书的出版，得到华侨大学研究生处和化工学院的赞助，在此表示感谢，另外，我还要提到的是我的妻子苏悦英在本书的整个编写过程中给予的支持和理解，在此也表示深深的谢意。

由于有限元方法在传热学中的应用尚在发展之中，也由于著者的水平所限，在编著过程中恐有不妥之处，谨请读者批评指正。

翁荣周

1999 年 9 月于华侨大学

作者简介

翁荣周，1937年生于福建龙岩，1961年毕业于哈尔滨工业大学，后于哈工大分校东北重型机械学院任教，1979年到华侨大学任教至今，1988.2-1989.8国家公派高级访问学者在英国斯特拉斯克莱德大学作研究工作。1993年晋升教授，曾任华侨大学化工系主任。三十多年来一直从事工程热物理学科的教学和研究工作，在“应用数学和力学”等刊物及国内外学术会议上发表论文近30篇，1993年获国务院颁发的有突出贡献人员的政府特殊津贴，1996年度被英国剑桥国际名人传略收录。

目　　录

绪　言

传热过程是工程技术中的一个重要过程，它在动力、化工、冶金、航天技术和原子能利用等方面都经常会遇到。在一般情况下，描写传热过程是一组非线性偏微分方程组，解析求解十分困难，因此传热过程的数值方法一直受到重视。特别是近年来，由于计算机的发展和计算方法的不断完善，传热学的数值方法更得到迅速的发展，到了 20 世纪 70 年代，它已形成了传热学的一个新的分支——数值传热学。

差分法和有限元方法是传热学数值方法中的两种基本方法，差分法发展较早，比较成熟，易于编制计算机程序，但对于边界复杂的问题较难处理。而有限元方法，由于区域的剖分的灵活性，因此，对于复杂的边界问题就更显得方便有效，所以近年来，在数值传热学中有限元方法颇受人们重视。

有限元方法求解过程大致如下：首先是借助变分原理或加权余量法将控制方程转变成有限元的出发方程，再将区域剖分成若干单元，即有限元，经单元分析，得到单元的特征方程，再经总体合成，得到总体有限元特征方程，它是一个代数方程组，最后在一定的边界条件下求解这个代数方程组，就得到问题的最终解。

事实上有限元方法的基本思想早就有了，但是有限元方法本身是在高速计算机出现以后才有的，它首先是在结构力学中提出，20 世纪 70 年代开始应用于流体力学中，传热学中有限元的应用则是较近的事。

有限元方法的数学基础是变分原理和加权余量法，根据所依据的数学基础不同，有限元有基于变分原理的变分有限元和基于

加权余量法的伽辽金有限元。变分有限元概念清晰，但在一些难以应用变分原理的地方会遇到困难，因此，变分有限元受到一定的限制；伽辽金有限元则不同，它是对微分方程通过加权余量得到有限元出发方程，它与变分有限元相比条件更宽，因此，伽辽金有限元的应用就更为普遍。

本书共分七章，第一章介绍有关张量概念、张量语言和几个重要的积分变换式，是本书的预备知识。第二章介绍有限元的数学基础知识，主要是变分法和伽辽金加权余量法，第三章介绍有限元的解题步骤，这里我们以一个简单的一维问题为例，详尽介绍有限元的求解过程，第四章是插值函数，介绍各种单元的插值函数确定方法。第五、六、七三章是论述有限元方法在传热学中的应用问题，主要介绍在导热和对流换热问题中的应用，每章后还附有习题，供读者练习时参考。

第一章　张量及张量语言

这一章是数学准备，作为本书的预备知识，介绍有关张量及张量语言的概念，几个重要的积分变换关系式和曲线坐标系等问题，这些内容在后续的章节中都会遇到。

§1　标量、矢量及张量的概念

一个物理量或几何量，若仅仅由一个实数值所决定，则这个量称为标量。质量、温度是标量的简单例子。

在很多情况下，一个物理量或几何量不能用一个数来表示，而必须用一组数的集合来表示，这一组数的每一个元素叫做该集合的分量。这样，如用三个数的集合或三个分量的集合表示的物理量或几何量，通常称为矢量，例如速度矢量，它必须用速度的三个分量 u_x，u_y 和 u_z 来表示。

还有一些物理量或几何量，它要有九个分量的集合来表示，例如表示一点应力状态的量，是由 τ_{xx}，τ_{xy}，τ_{xz}，τ_{yx}，…等九个分量来表示，由这九个分量的集合表示的物理量是我们所熟悉的应力张量。

从上面的讨论可以看到，标量、矢量和张量都是用一组分量的集合来表示，显然当坐标系改变时，它们的分量是要改变的（标量不随坐标系改变），然而作为这些分量的集合的总量是不变的。这样我们说，某一物理量或几何量，当坐标系改变时，表示该物理量或几何量的总量没有改变，则称此物理量或几何量为张量，以后我们还要阐述张量的解析定义。按照张量的这一概念，标量、矢量都是张量，只不过它们的分量不同而已。分量的多少可以用 3^n 来表示，这里 n 称张量的阶次，由于标量只有一个分量，$n=0$，所以标量

是零阶张量；矢量有三个分量，$n=1$，所以矢量是一阶张量；而应力张量有九个分量，$n=2$，所以应力张量是二阶张量。

§2 张量语言

力学中的基本物理量是张量，它们是在特定坐标系中描述的量，在进行数值计算时，由于经常要对这些物理量进行坐标变换，往往使计算式变得十分繁杂，为了计算方便，书写简单，通常使用指标记号来表示张量，这种张量的指标体系称为张量语言。

2.1 指标记号

在张量语言中，直角坐标(x,y,z)用(x_1,x_2,x_3)表示，简记为

$$x_i \qquad i=1,2,3$$

或

$$\{x_i\}$$

这里下标 i 称为指标，如指标可任取 1,2,3 则称该指标为自由指标。在上面用花括号的表示式中，没有指出指标的取值范围，它暗示 i 要按顺序遍取 1,2,3 值，但在有些教科书中省去花括号，此时应注意它们的差别。

如直角坐标系中的三个单位向量 **i**,**j**,**k** 写成 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$，则利用自由指标可简记为

$$\mathbf{e}_i \qquad i=1,2,3$$

或

$$\{\mathbf{e}_i\}$$

这样矢量 **a** 在坐标 x_i 方向的分量是 a_i，一般可用矢量的分量 a_i 来表示矢量 **a**，因此矢量 **a** 可简写成

$$a_i \qquad i=1,2,3$$

或

$$\{a_i\}$$

类似地，一个二阶张量，如应力张量也可以用自由指标表示为

$$\tau_{ij} \qquad i,j=1,2,3$$

或

$$\{\tau_{ij}\}$$

现在来看一下矢量的另一种表示方法，设矢量 **a** 的三个分量为 a_1,a_2,a_3，则按矢量的一般表示法可写成

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3=\sum_{i=1}^{3}a_i\mathbf{e}_i \qquad (1-1)$$

在张量语言中，为书写方便，约定在同一项中自由指标重复两次，我们要对此指标分别取 1、2、3 求和，并称此指标为求和指标或哑标。因此按此规定，可以略去求和指标的连加号，如此，(1—1)式可写成

$$\mathbf{a}=a_i\mathbf{e}_i \qquad (1-2)$$

对于二维的情形有

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}a_ib_j=A_{ij}a_ib_j \qquad (1-3)$$

显然求和指标的字母可以任意改变，不会改变它的含义。

下面是利用求和指标的例子

$$a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\tau_{ii}=\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i}=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

对于求和指标，要记住下列两项规则：

1. 在同一等式中，如果某一指标在某一项中不是求和指标，而在其它项中即使重复两次，也不进行求和，如

$$a_i=b_ic_i$$

等式左边不求和，按此规定等式右边不求和。

2. 同一项中不允许将同一指标重复两次以上，如 $a_ib_ic_i$ 是无意义的。

2.2 指标符号

这里介绍两个重要的指标符号 δ_{ij}和 ε_{ijk}，

δ_{ij}称克罗内克尔(Kronecker)符号，定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases} \tag{1-4}$$

δ_{ij}的性质可通过下列示例了解

$$\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$$

$$a_i\delta_{ij}=a_j$$

ε_{ijk}称列维—齐维塔(Levi—Civita)符号，又称排列符号，定义为

$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{312}=\varepsilon_{231}=1$(顺时针排列)

$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1$(逆时针排列)

$\varepsilon_{ijk}=0$(当指标中两个以上重复时)

ε_{ijk}可通过以下示例了解

考虑三阶行列式

$$a=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

利用排列符号 ε_{ijk}，则

$$a=\varepsilon_{123}a_{11}a_{22}a_{33}+\varepsilon_{312}a_{13}a_{21}a_{32}+\varepsilon_{231}a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+\varepsilon_{321}a_{13}a_{22}a_{31}+\varepsilon_{132}a_{11}a_{23}a_{32}+\varepsilon_{213}a_{12}a_{21}a_{33}$$

因此有

$$a=\varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} \tag{1-5}$$

克罗内克尔 δ_{ij}符号与排列符号 ε_{ijk}有如下关系：

$$\delta_{in}\delta_{nm}=\delta_{im} \tag{1-6a}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rsk}=\delta_{ir}\delta_{js}-\delta_{is}\delta_{jr} \tag{1-6b}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6 \tag{1-6c}$$

读者可直接验证它们的正确性。

§3 矢量及其张量语言表示法

下面介绍几个有用的矢量概念以及它们张量语言的表示方法。

3.1 Hamilton(哈密尔屯)算子▽

哈密尔屯算子▽是一个矢性算子,在直角坐标系中由下式表示

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (1-7)$$

用张量语言可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \qquad (1-8)$$

哈密尔屯算子▽在场论中经常会遇到,▽可读作"纳普拉(*Nabla*)",它本身并无意义,它是一种微分运算符号,在微分过程中服从微分法则,它又是一个矢量,因此在运算过程中又应服从矢量运算法则,这是哈密尔屯▽算子的两重性,在运算中应予注意。

这里介绍一下拉普拉斯(Laplace)算子△,它定义为

$$\triangle = (\nabla \cdot \nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

用张量语言,△可写成

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$$

3.2 矢量的点乘积

先看相互正交的单位矢量 $\mathbf{e}_i$ 的点乘积,显然

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \qquad (1-9)$$

因此两矢量的点乘积是

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i\mathbf{e}_i \cdot b_j\mathbf{e}_j = a_ib_j\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a_ib_j\delta_{ij} = a_ib_i$$