College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

大学文科高等数学题解

（下册）

姚孟臣　张清允　编著

高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

大学文科高等数学题解

下 册

姚孟臣 张清允 编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学文科高等数学题解．下册/姚孟臣，张清允编著．
—北京：高等教育出版社，2003.11

ISBN 7-04-012929-9

Ⅰ.大… Ⅱ.①姚…②张… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 089331 号

策划编辑 李艳馥 **责任编辑** 李 陶
封面设计 于 涛 **责任印制** 杨 明

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京未来科学技术研究所 有限责任公司印刷厂		
开　　本	850×1168 1/32	**版　　次**	2003年11月第1版
印　　张	9.75	**印　　次**	2003年11月第1次印刷
字　　数	240 000	**定　　价**	12.50元

内 容 简 介

本书是与《大学文科高等数学》(姚孟臣主编,高等教育出版社出版)配套的辅导教材之一,给出了该书中大部分习题的分析与解答,并针对目前文科学生的实际需要,适量增加了选择、填空等其他题型的习题。

本书分上、下两册出版,上册的内容包括微积分、级数和微分方程,下册包括线性代数、概率论与数理统计。书的每一章中都含内容提要、习题、分析及解答。

本书在编写时考虑到各方面的需要,内容上较为全面。因此,读者在使用本书进行复习时,应参照有关的《教学大纲》和《考试大纲》进行。

本书可以作为普通高等院校文科各个专业的学生以及参加全国高等教育自学考试、学历文凭考试的考生学习微积分、线性代数、概率论与数理统计课程的参考书。也可以满足成人高等教育以及高等职业教育各个专业的学生学习相关课程教学辅导的需要。

前　言

文科类高等数学是为适应现代科学文理渗透的趋势而设置的一门基础数学理论与应用数学方法相结合的课程，其教学内容和教学方法都应该具有明显的文科特色。针对目前文科学生的实际需要、知识结构和思维特点，我们编写了《大学文科高等数学题解》一书，它是《大学文科高等数学》配套的辅导教材之一。

我们认为，解题是学好数学的一个必要环节。通过解题可以加深对概念的理解，掌握各种解题的方法和技巧，进一步巩固已学到的知识。考虑到一方面教材一般不可能用很大的篇幅来介绍解题的方法和技巧，而且目前大多数院校和社会上各类数学的考试仍然采用笔试的形式；另一方面由于各种原因，很多学生感到解题是一件很困难的事情，特别是对于学习高等数学的文科学生来说更是如此。因此《大学文科高等数学题解》在内容选取和结构设计上都作了较为周密的考虑。本书分上、下两册出版，上册的内容包括一元和多元函数微积分，下册包括线性代数、概率论与数理统计。

学生通过一定数量题目的练习，能更好地理解和掌握有关的基本概念和基本解题的方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断地增加对考试的适应能力和通过考试的自信心。在使用本书时应按照以下四个步骤学习才会有较大的收益：

1. 通过审题来正确理解题意（特别是概率统计部分，首先把题目的已知和要求的是什么弄清楚，而那种一上来就看完题解然后再去理解题意的做法是万万不可取的）；

2. 分析题目来确定主要考核知识点（解答本题时要用到哪些

知识点，需要哪些公式或定理要事先明确，这种训练是十分必要的）；

3. 选择适当的方法与技巧（解题技巧的掌握不仅要“看”，更重要的是“学”，即动手来解题，所谓“熟能生巧”就是这个道理。对于概率统计部分，我们认为主要是掌握解题的各种方法）；

4. 学习解题格式及关键步骤表述（解题格式是大多数同学最容易忽视的一个问题，学习必要解题格式也是十分重要的。在各类考试中，必要的解题格式以及写出关键步骤是评判的重要标准，也是今后学习和工作中所需要的）。

本书在编写时考虑到各方面的需要，内容上较为全面。因此，读者在使用本书进行复习时，应参照有关的《教学大纲》和《考试大纲》进行。

本书适合文科各个专业以及参加全国高等教育自学考试、学历文凭考试及其他各类考试的高等数学课程的需要。也适合各高等院校职业教育及成人高等专科教育各个专业的微积分、线性代数、概率论与数理统计课教学辅导的需要。

由于编者水平和精力所限，题解中难免有错误和疏漏之处，恳请读者和教授此课的老师们批评指正。

编　者

2003年2月6日

于北京大学中关园

目　录

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第二部分　线性代数

第八章　行　列　式

一、内容提要

（一）重要概念及性质

1. 行列式的定义

定义 8.1　由 n^2 个数排列成 n 行 n 列（横的称行，竖的称列），并左、右两边各加一竖线，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，它代表一个由确定的运算关系所得到的数，可简记为 $\boldsymbol{D}$，其值为

$$\boldsymbol{D} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j},$$

其中数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元素；

$$\boldsymbol{A}_{ij} \xlongequal{\text{def}} (-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$$

称为 a_{ij} 的**代数余子式**；$\boldsymbol{M}_{ij}$ 为由 $\boldsymbol{D}$ 划去第 i 行和第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的**余子式**.

注意 对于一阶行列式$|a|$,其值就定义为a.

2. 行列式性质

性质1 行列互换,行列式的值不变.

性质2 两行互换,行列式反号.

推论 若行列式中有两行的对应元素相等,则行列式等于零.

性质3 用数k乘行列式某一行的所有元素等于用数k乘这个行列式.

推论1 若行列式中有一行的元素全为零,则行列式等于零.

推论2 若行列式中有两行对应元素成比例,则行列式等于零.

性质4 若行列式的某一行的元素都是两项之和,则这个行列式等于拆开这两项所得到的两个行列式之和.

性质5 用数k乘行列式某一行的所有元素并加到另一行的对应元素上去,所得到的行列式和原行列式相等.

性质6 行列式等于它的任一行的各元素与其代数余子式的乘积之和,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{in}\\&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n).\end{aligned}$$

推论 行列式中任一行的各元素与另一行对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}\boldsymbol{A}_{k1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{k2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{kn}=0\quad(i\neq k).$$

把性质6及其推论合并起来可以表成下式

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{kj}=\begin{cases}\boldsymbol{D}, & \text{当 } i=k \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } i\neq k \text{ 时}.\end{cases}$$

(二) 重要定理及公式

定理8.1(克拉默法则) 设n元线性方程组的一般形式为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

如果它的系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq 0$,那么它有惟一解

$$x_j = \frac{\boldsymbol{D}_j}{\boldsymbol{D}} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

推论 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

如果它的系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq 0$,那么它只有零解.

这个推论也可以说成:如果齐次线性方程组有非零解,那么它的系数行列式 $\boldsymbol{D}=0$.

注意 克拉默法则仅给出了方程个数与未知量个数相等,并且系数行列式不等于零的线性方程组求解的一种方法.

(三)重要方法

行列式的计算方法

计算行列式的基本方法之一是选择零元素最多的行或列,然后按这一行或列展开(当然在展开之前也可以利用性质把某一行或某一列的元素尽量多化为零,然后再展开),变为低一阶的行列式,如此继续下去,直到化为三阶或二阶行列式.

例 1 计算行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -6 & -3 \\ -4 & 7 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & -8 & -10 & -5 \end{vmatrix}.$$

为了尽量避免分数运算，应当选择 1 或 −1 所在的行(或列)进行变换，因此，我们首先选择第 4 列.

$$D \xlongequal[5③+④]{\substack{3③+①\\-4③+②}} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 & 0 \\ 4 & -5 & -18 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 7 & 10 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 \\ 4 & -5 & -18 \\ -3 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{4①+②\\-3①+③}} - \begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 \\ 0 & 39 & 6 \\ 0 & -26 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 39 & 6 \\ -26 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= -156.$$

计算行列式的又一个基本方法是：利用行列式的性质，把行列式化为上(下)三角形行列式，而三角形行列式的值就是主对角线上元素的乘积.

例 2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \quad (其中\ a \neq b).$$

解 由于该行列式每行均有一个 a 和三个 b，故先将各列都加到第一列上，得

$$D = \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix} \xlongequal[\text{提出第一列公}\atop \text{因子}\ a+3b]{} (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-1①+\text{各行}}(a+3b)\begin{vmatrix}1 & b & b & b\\ 0 & a-b & 0 & 0\\ 0 & 0 & a-b & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-b\end{vmatrix}$$

$$=(a+3b)(a-b)^3.$$

例 3 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}3 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 2 & 3 & \cdots & 2 & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & \cdots & 3 & 2\\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

解

$$\boldsymbol{D}\xlongequal{\text{各行加到第 1 行}}\begin{vmatrix}2n+1 & 2n+1 & \cdots & 2n+1 & 2n+1\\ 2 & 3 & \cdots & 2 & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & \cdots & 3 & 2\\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=(2n+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 2 & 3 & \cdots & 2 & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & \cdots & 3 & 2\\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-2\times①+\text{各行}}(2n+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}=2n+1.$$

注意 在利用上述两个基本方法计算行列式时，应在采用以上的一般步骤之前，注意观察计算对象是否具有某些特点，然后考虑能否利用这些特点采取相应的技巧以达到简化计算的目的. 在计算以字母作元素的行列式时，更要注意简化.

例 4 计算三阶范德蒙德行列式

$$\boldsymbol{V}_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^2&x_2^2&x_3^2\end{vmatrix}$$

解 从最后一行开始，各行加上相邻上一行的 $-x_1$ 倍，然后按第一列展开，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_3&=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)\end{vmatrix}\\&=1\begin{vmatrix}x_2-x_1&x_3-x_1\\x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)\end{vmatrix}\\&=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix}1&1\\x_2&x_3\end{vmatrix}\\&=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\\&=(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1).\end{aligned}$$

注意 对于 n 阶范德蒙德行列式，我们可以用归纳法及与上面类似的方法，得到

$$\boldsymbol{V}_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 16 & 8 & 2 & 4\\ 81 & 27 & 3 & 9\\ 256 & 64 & 4 & 16\end{vmatrix}.$$

分析 这不是一个范德蒙德行列式.经第 2 列与第 3、第 4 列作相邻互换以及第 1 列与第 2、第 3、第 4 列作相邻互换后，行列式的值变号，再从各行提出公因子，便可得到一个四阶范德蒙德行列式.

解

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 16 & 8 & 2 & 4\\ 81 & 27 & 3 & 9\\ 256 & 64 & 4 & 16\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 8 & 16\\ 3 & 9 & 27 & 81\\ 4 & 16 & 64 & 256\end{vmatrix}$$

$$=-2\times3\times4\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 3 & 9 & 27\\ 1 & 4 & 16 & 64\end{vmatrix}=-2\times3\times4\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3\\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3\\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3\end{vmatrix}$$

$$=-2\times3\times4(4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1)$$

$$=-2\times3\times4\times2\times3\times2=-288.$$

二、习题

（一）填空题

1. 行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1 & 8\end{vmatrix}$ 的 $a_{12}=2$ 的代数余子式及其值是______.

2. 行列式$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$中元素 y 的代数余子式及其值是______.

3. 设行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$,则 $\boldsymbol{D}$ 中元素 $a_{23}=2$ 的代数余子式 A_{23} 及其值是________.

4. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$是关于 x 的一次多项式,该式中一次项的系数是______.

5. $\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ -6a_{31} & -6a_{32} & -6a_{33} \end{vmatrix}=$______$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

6. 已知$\begin{vmatrix} x & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & x+2 \end{vmatrix}=0$,则 $x=$______.

(二)选择题

1. 已知行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$,则行列式 $\boldsymbol{D}$ 中 x 的一次项系数是(　　).

(A) 1;　　(B) -1;　　(C) 2^2;　　(D) -2^2.

2. 设$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=2$,则