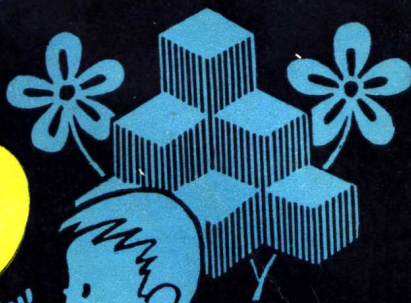
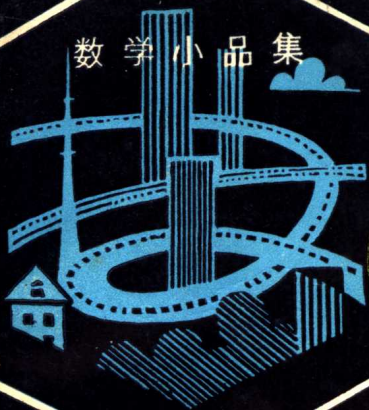
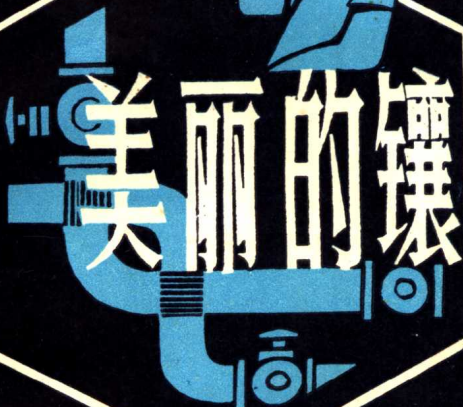


数学小品集



# 美丽的镶嵌图



少年儿童出版社

· 数学小品集 ·

顾忠德  
刘汉标 编著  
陶静欣

少年儿童出版社

MEILILIXIANQIANTU



## 美丽的镶嵌图

顾忠德 刘汉标 陶静欣 编著

封面设计 简毅

插图 陈力萍 周国萍  
周允达 韩莲珍

少年儿童出版社出版

(上海延安西路1538号)

新华书店上海发行所发行

上海市印刷十二厂排版 浙江舟山印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 4.5 字数 89,000

1982年10月第1版 1982年10月第1次印刷

印数 1—22,000

统一书号: R13024·147 定价: (科二) 0.31元

## 内 容 提 要

这是一本数学小品集。共十九篇。内容大都是关于物体的形状的。作者用生动的笔调，分析了一些物体的形状，提出了一些有趣的问题，并从数学的角度加以解答。少年读者可以从这本书中获得许多有用的知识，提高观察问题、分析问题和解决问题的能力。

## 写在前面

你可知道：书本为什么大都相似？蚊香为什么要盘成螺旋线形状？美丽的图案是怎样镶嵌而成的？蜂巢的顶角为什么都是 $70^{\circ}32'$ ？桥梁造成怎样的拱形最好？整整齐齐的堆垛怎样计数才方便？……在本书中，你可以看到这些问题的答案。

物体的形状各有自己的特点。如果你仔细观察，深入思考，有可能的话还可到实地考察，向行家请教，你就会恍然大悟，甚至感到惊讶——这些形状带来的好处是那么多！

我们选择这些问题，是想从数学角度来揭开这些形状之谜。在你依次阅读各篇时，你会感到学过的数学知识在其中有着广泛的应用，而且将会看到一些你还未曾接触或了解过的优美的曲线以及它们的奇妙的特性。

本书原名《物体形状漫谈》。这次重新出版，保留了原书中的八篇，新写了十一篇。内容中如有不当之处，望广大读者批评指正。

作者

## 目 录

相似的书本·····	1
由矩到尺·····	6
螺帽外形分析·····	15
长虹般的桥拱·····	23
奇妙的音乐厅·····	34
伞形太阳灶的奥秘·····	38
万体馆前话照明·····	44
蚊香盘法·····	50
“走钢丝”的秘密·····	55
美丽的镶嵌图·····	62
空间镶嵌·····	73
管道的方与圆·····	80
圆桶的“胖”与“瘦”·····	89
立体交叉口·····	96
精巧的蜂巢·····	101
虾腰的启示·····	108
茎须缠绕的路线·····	115
大茶壶与小茶壶·····	121
堆垛种种·····	127



## 相似的书本

随便取一些大小不一的书，把它们如图 1 那样叠合起来。这时你会发现，多数书的对应顶点都在同一直线上——原来它们彼此相似！

这是什么原因呢？

让我们再来做一个试验。

取两张一样大小的纸，裁下其中一张的一半，如图 2，放到没有裁过那张的角上。画一条对角线，看看大小两张是否相似。

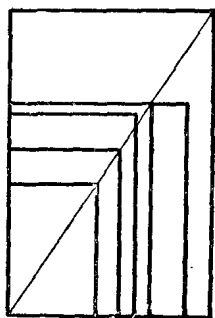


图 1

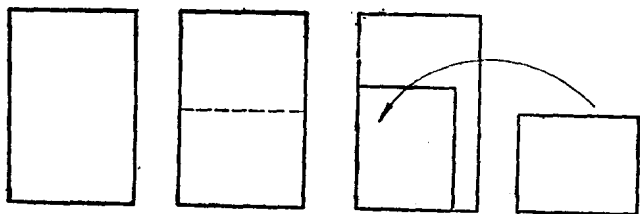


图 2

多试一些各种不同尺寸的纸张，你会发现，在大多数情况

下,大小两张是相似形。

如果你把剪余下来的半张,再一剪成两,并把一半再叠上去,你还会发现,它们都是相似形。

这个试验说明,那些大小不同但是相似的书藉,是用同一种规格的纸张,经过几次“对开”而得到的;不同的是“对开”的次数不一样。

并不是所有规格的纸张“对开”后都成相似形。也许,在上面的试验中,你已经遇到过这种情形。

那末,怎样的纸张“对开”后大小两纸能相似呢?

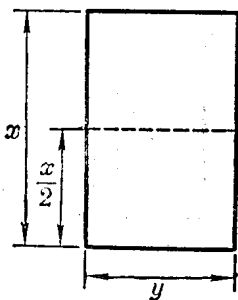


图 3

如图 3, 将一张矩形纸“对开”, 记它的长为  $x$ , 宽为  $y$ 。要此大小两多边形相似, 它们的对应边必须成比例,

即 
$$\frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{x}{2}}$$

将上式变形为 
$$\frac{x^2}{y^2} = 2,$$

两边开方得 
$$\frac{x}{y} = \sqrt{2}。$$

也就是 
$$\text{长}:\text{宽} = \sqrt{2}:1。$$

纸张的国际标准尺寸就是这样, 长与宽之比为  $\sqrt{2}:1$ , 而且规定基本尺寸  $A_0$  的面积为 1 米<sup>2</sup>(图 4)。

纸张尺寸这样规定有许多好处。

首先, 让我们来计算一下  $A_0$  的长与宽。

: ? :



设  $A_0$  的宽为  $x$ , 则长为  $\sqrt{2}x$ ,  
于是

$$\begin{aligned}\sqrt{2}x^2 &= 1, \\ x &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0.8409 \text{ (米)} \\ &\approx 841 \text{ (毫米)},\end{aligned}$$

$\sqrt{2}x \approx 1.1892 \text{ (米)} \approx 1189 \text{ (毫米)}$ ,  
所以  $A_0$  的尺寸是 1189 毫米  $\times$  841 毫米。

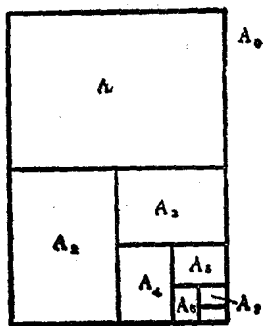


图 4

$A_0$  的大小相当于两张《人民日报》的大小；也就是《人民日报》的尺寸与  $A_1$  相同。

可见,  $A_0$  的尺寸相当大, 这样便于裁成各种规格的纸张。

其次, 按照这样规定, “对开”后得到的每一种规格, 长与宽之比也都是  $\sqrt{2}:1 \approx 1.4:1 = 7:5$ 。按这个比例裁成的纸张, 看上去比较舒适自然。

再则, 每“对开”一次, 纸张的面积缩小一半。依此规格, 每次“对开”得到的都是相似形。而对于别种尺寸的矩形, 例如正方形, 至少要“对开”两次, 才能得到相似形, 此时面积至少缩小为  $\frac{1}{4}$ 。如果按此递缩下去, 大小的差距太大, 品种也就少了, 不能满足各种不同的需要。由此看来, 从相似的要求来说, 长:宽 =  $\sqrt{2}:1$  是一种递缩得最慢的序列。这样, 纸张规格就多, 差距缩小, 更能适合各方面的需要。

最后, 也是最重要的, 依此尺寸裁小时, 可以避免浪费, 减

少甚至没有边角料。对于象照相材料这一类高档用纸来说，更有必要。

我们平时常见的书籍、报纸、信笺、活页甚至连环画都采用这种标准尺寸，其原因就在于此。

但是，也有一些纸张的尺寸具有特殊规格；有时，人们不采用“对开”方法，而是按某种需要切开，因而我们也会看到一些特殊形状的书籍。

现在，请你将本书翻到版本说明页（也称版权页），上面印有：“开本  $787 \times 1092, 1/32$ ，印张 4.5”。这是什么意思呢？

“开本  $787 \times 1092$ ”，就是指原来的纸张规格为宽 787 毫米、长 1092 毫米。比国际标准要小一些。

面积  $= 787 \times 1092 = 859404 (\text{毫米}^2) \approx 0.86 (\text{米}^2)$ 。也比国际标准要小。

但是，它的长与宽的比

$$\frac{1092}{787} \approx 1.3875 \approx \sqrt{2},$$

与国际标准很接近。

“ $1/32$ ”，是指原张  $787 \times 1092$  面积的  $1/32$ ，也就是“对开”了 5 次，即图 4 中的  $A_5$ 。它的长与宽即本书的长与宽。由图 4 可知：

$$\text{书本长度} = 787 \div 4 \approx 197 (\text{毫米}),$$

$$\text{书本宽度} = 1092 \div 8 \approx 137 (\text{毫米}).$$

请你用尺量一量这本书的尺寸，是不是与这个尺寸一样。可以肯定，你量得的尺寸一定比它略小。这是由于书本装订后都要切边，这样书本才会整齐，因而比计算出来的要略小一

些。

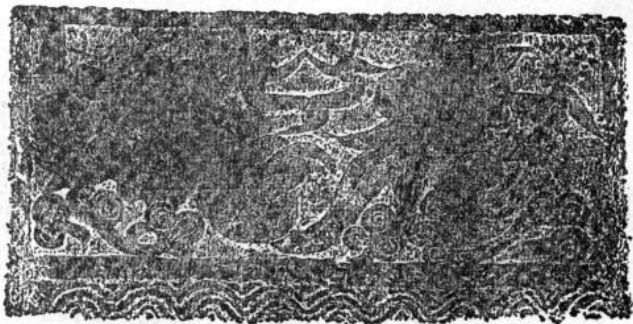
“印张 4.5”，是指本书用了  $4.5 \times 2 = 2.25$  张原张纸。这里之所以要除以 2，是因为每张原张纸要印刷两面，即印刷两次，所以 1 张原张纸等于 2 个印张。本书开本为“1/32”，所以全书共 72 页（封面封底不计在内），每页 2 面，共 144 面。去掉扉页、写在前面、目录等共 7 面，正文 137 面（面，通常也称为页）。



## 由矩到尺

矩，是我们祖先最早使用的测量工具之一。

图 1 是公元二世纪时汉朝的浮雕像，到现在还保存着。从画中可看出：伏羲氏手执矩，女娲氏手执规的形象。



规矩图(汉武梁祠石室造像)

图 1

矩的形状象现代木工用的曲尺，由两条直尺垂直做成。

据考古学者的研究，大约在公元前十四世纪商代晚期的甲骨文中，已经有了规和矩这两个字。“规”字写成“𠄎”，很象一个人手执圆规画圆；“矩”字写成“匚”，就象两把曲尺合在一起。

传说“规矩”的创始人是倕，倕也称垂，或者叫工倕。在另一些传说中，却又说伏羲氏是“规矩”的创始者。

规与矩在古代生产中就起着重大的作用。司马迁著的《史记》中提到夏禹治水时，有“左准绳”，“右规矩”的记载。古书《墨子》中也有当时“轮匠执其规矩，以度天下方圆”的记述。

我国最早的古算书《周髀算经》对矩的功能有这样的一段介绍：周公问商高用矩进行测量的方法，商高回答说：“偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远。”

这就是说，把矩(图2)的一条直尺  $AC$  放平，另一条  $CB$  直立，从  $A$  仰视高处  $P$  点，视线  $AP$  和  $CB$  交于  $D$ ，那末，根据相似三角形  $AMP$  和  $ACD$  对应边成比例的关系，可得

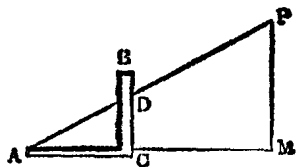


图 2

$$MP = \frac{CD \cdot AM}{AC}。$$

同理，把直尺  $CB$  倒过来往下垂，就可以测量深处目的物的深度。而把直尺  $AC$ 、 $CB$  放在水平面上，就可以测量远处两目的物之间的距离。直角三角形  $ACD$  的  $AC$  边叫做“勾”， $CD$  边叫做“股”， $AD$  边叫做“弦”。因为适当地应用矩尺可以测量目的物的高、深、广、远，所以商高总结说：“智出于勾，勾出于矩。”

几千年来，生产在发展，矩尺也在发展。我们现在常见的尺有三角尺、丁字尺、比例尺、放缩尺与制图尺等等。各种尺的造型都是根据画图、测量的要求进行设计的。拿三角尺来说，

它的造型如图 3。

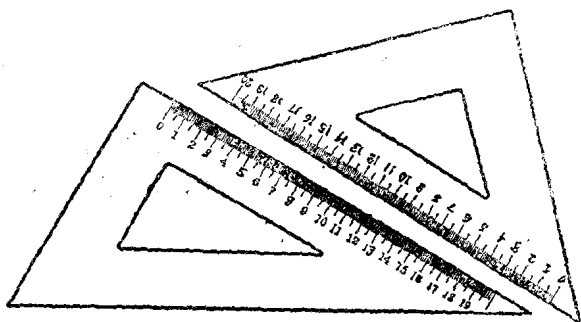


图 3

一副三角尺做成这样的形状有许多好处。

每一块三角尺都有三条边，它当然能起到直尺的作用：经过两点画一条直线；把任意一条线段延长。两块三角尺合用，延长线段既迅速，接头处又很平滑（图 4）。

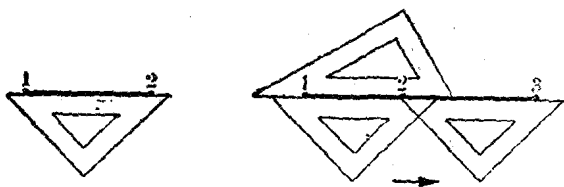


图 4

每一块三角尺都是一个直角三角形，都有一个直角，这个直角在画图时作用很大。

利用它可以经过一点画垂线（图 5）。

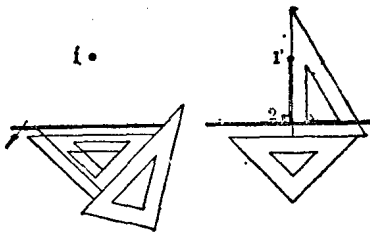


图 5

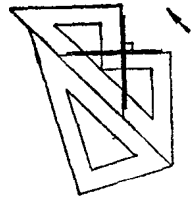


图 6

又可以方便地画出直角坐标系(图 6)。

其中有一块三角尺,它是一个等腰直角三角形,两个锐角都是  $45^\circ$ 。我们知道,  $45^\circ$ 角在画图中是最常见的。

利用它,在制图中可以方便地画出表示金属材料的  $45^\circ$ 剖面线(图 7);又可以迅速地把一个圆周四等分(图 8)。

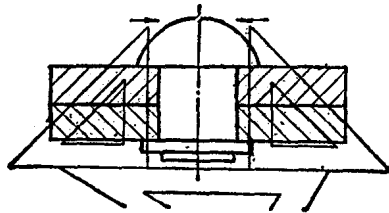


图 7

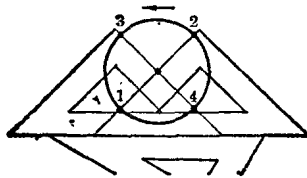


图 8

利用它,还可以把一个圆周八等分(图9)。

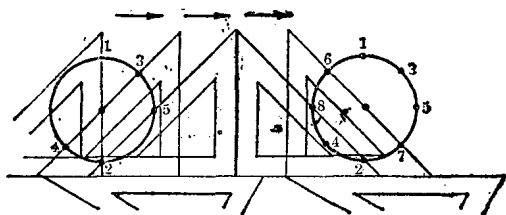


图 9

另一块三角尺,有一个锐角是  $30^\circ$ , 还有一个锐角是  $60^\circ$ 。利用它,可以很方便地把一个圆周三等分(图10)。

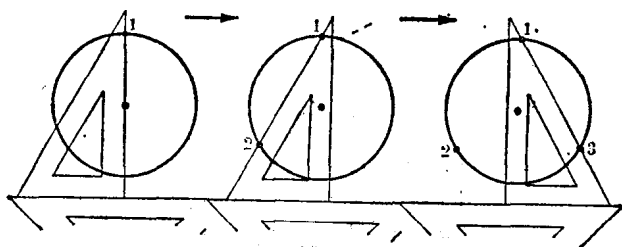


图 10

也可以方便地把一个圆周六等分(图11)。

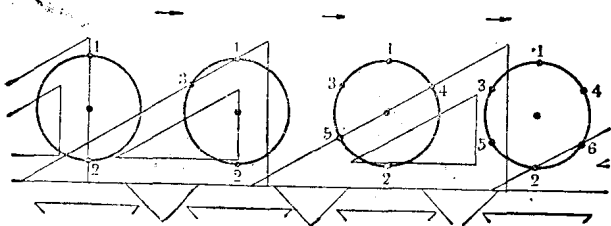


图 11



现在,我们来想一想,用一副三角尺,能画出多少个角?

当然  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  和  $90^\circ$  这些角可以直接画出来。但是,利用这些角还可以画出其他的角来,例如: $45^\circ$  与  $30^\circ$  加起来,不是可以画出一个  $75^\circ$  的角来吗(图 12); 还有  $45^\circ$  和  $30^\circ$  减一下不是又可以画出一个  $15^\circ$  的角来吗(图 13)……那末,利用这些已知角,究竟可以画出多少其他的角来呢?

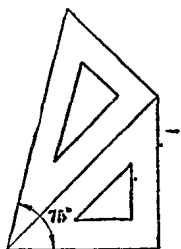


图 12

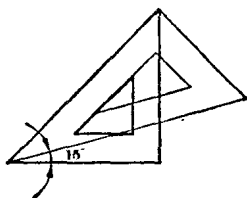


图 13

我们知道,  $90^\circ$  和  $60^\circ$  角可以分别由  $45^\circ$  和  $30^\circ$  角重复两次而得到,因此,我们可以不考虑  $90^\circ$  和  $60^\circ$  角的作用,而只要算一算  $45^\circ$  和  $30^\circ$  角所能画出的角度就可以了。在  $0^\circ$  到  $90^\circ$  之间一共可画出六个角:  $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $75^\circ$  和  $90^\circ$ 。利用对称方法,在  $0^\circ$  到  $360^\circ$  之间(不包括  $0^\circ$  和  $360^\circ$ )一共可画出 23 个角(图 14)。

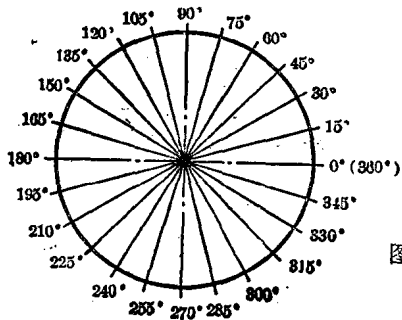


图 14