

面向 **21** 世纪

高等学校信息工程专业系列教材

电磁场与电磁波

Electromagnetic Field and Electromagnetic Waves

郭辉萍 刘学观 编著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

面向 21 世纪高等学校信息工程专业系列教材

电磁场与电磁波

Electromagnetic Field and Electromagnetic Waves

郭辉萍 刘学观 编著

西安电子科技大学出版社

2003

内 容 简 介

本书从矢量分析与场论入手,着重讨论电磁基本理论和电磁工程基础相关的内容。电磁基本理论部分主要包括静电场、恒定电场、恒定磁场和时变电磁场的基本规律以及电磁波的基本概念、平面电磁波在不同媒质中的传播特性等,其中对边界条件、电磁能流、极化、色散与群速等基本概念做了详细分析;电磁工程基础部分主要包括电磁波的导引、辐射以及无线信道、电磁干扰与电磁兼容等基本知识,其中着重对传输线及相关电磁应用基础知识做了较深入的介绍。每章都附有习题和参考答案。

全书突出基础性与知识体系的完整性,并注意理论与实际的结合。书中对许多专业词汇给出了英文注解。

本书可供高等学校电子信息类各专业本科生用作教材,也可作为电子工程、通信工程及其他相关专业的技术人员的参考书。

★ 本书配有电子教案,需要者可与出版社联系,免费索取。

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波=Electromagnetic Field and Electromagnetic Waves/郭辉萍等编著.

—西安:西安电子科技大学出版社,2003.8

(面向 21 世纪高等学校信息工程类专业系列教材)

ISBN 7-5606-1261-X

I. 电… II. 郭… III. ① 电磁场-高等学校-教材 ② 电磁波-高等学校-教材
IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 047686 号

策 划 马乐惠

责任编辑 徐德源

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)8242885 8201467 邮 编 710071

http://www.xduph.com

E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印刷单位 渭南市邮电印刷厂

版 次 2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 14.125

字 数 332 千字

印 数 1~4000 册

定 价 15.00 元

ISBN 7-5606-1261-X/TN·0230(课)

XDUP 1532001-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

序

第三次全国教育工作会议以来,我国高等教育得到空前规模的发展。经过高校布局和结构的调整,各个学校的新专业均有所增加,招生规模也迅速扩大。为了适应社会对“大专业、宽口径”人才的需求,各学校对专业进行了调整和合并,拓宽专业面,相应地教学计划、大纲也都有了较大的变化。特别是进入 21 世纪以来,信息产业发展迅速,技术更新加快。面对这样的发展形势,原有的计算机、信息工程两个专业的传统教材已很难适应高等教育的需要,作为教学改革的重要组成部分,教材的更新和建设迫在眉睫。为此,西安电子科技大学出版社聘请南京邮电学院、西安邮电学院、重庆邮电学院、吉林大学、杭州电子工业学院、桂林电子工业学院、北京信息工程学院、深圳大学、解放军电子工程学院等 10 余所国内电子信息类专业知名院校长期在教学科研第一线工作的专家教授,组成了高等学校计算机、信息工程类专业系列教材编审专家委员会,并且面向全国进行系列教材编写招标。该委员会依据教育部有关文件及规定对这两大类专业教学计划和课程大纲,目前本科教育的发展变化和相应系列教材应具有的特色和定位以及如何适应各类院校的教学需求等进行了反复研究、充分讨论,并对投标教材进行了认真评审,筛选并确定了高等学校计算机、信息工程类专业系列教材的作者及审稿人,这套教材预计在 2004 年全部出齐。

审定并组织出版这套教材的基本指导思想是力求精品、力求创新、优中选优、以质取胜。教材内容要反映 21 世纪信息科学技术的发展,体现专业课内容更新快的要求;编写上要具有一定的弹性和可调性,以适合多数学校使用。体系上要有所创新,突出工程技术型人才培养的特点,面向国民经济对工程技术人才的需求,强调培养学生较系统地掌握本学科专业必需的基础知识和基本理论,有较强的本专业的基本技能、方法和相关知识,培养学生具有从事实际工程的研发能力。在作者的遴选上,强调作者应在教学、科研第一线长期工作,有较高的学术水平和丰富的教材编写经验;教材在体系和篇幅上符合各学校的教学计划要求。

相信这套精心策划、精心编审、精心出版的系列教材会成为精品教材,得到各院校的认可,对于新世纪高等学校教学改革和教材建设起到积极的推动作用。

系列教材编委会

2002 年 8 月

高等学校计算机、信息工程类专业

系列教材编审专家委员会

主任：杨震（南京邮电学院副院长、教授）
副主任：张德民（重庆邮电学院通信与信息工程学院院长、教授）
韩俊刚（西安邮电学院计算机系主任、教授）
李荣才（西安电子科技大学出版社总编辑、教授）

计算机组

组长：韩俊刚（兼）

成员：（按姓氏笔画排列）

王小民（深圳大学信息工程学院计算机系主任、副教授）

王小华（杭州电子工业学院计算机分院副院长、副教授）

孙力娟（南京邮电学院计算机系副主任、副教授）

李秉智（重庆邮电学院计算机学院院长、教授）

孟庆昌（北京信息工程学院教授）

周娅（桂林电子工业学院计算机系副主任、副教授）

张长海（吉林大学计算机科学与技术学院副院长、教授）

信息工程组

组长：张德民（兼）

成员：（按姓氏笔画排列）

方强（西安邮电学院电信系主任、教授）

王晖（深圳大学信息工程学院电子工程系主任、副教授）

胡建萍（杭州电子工业学院电子信息分院副院长、副教授）

徐祎（解放军电子工程学院电子技术教研室主任、副教授）

唐宁（桂林电子工业学院通信与信息工程系副主任、副教授）

章坚武（杭州电子工业学院通信工程分院副院长、教授）

康健（吉林大学通信工程学院副院长、教授）

蒋国平（南京邮电学院电子工程系副主任、副教授）

总策划：梁家新

策划：马乐惠 云立实 马武装 马晓娟

电子教案：马武装

前 言

电磁理论一直是电子信息类学科本科教学的基础课程，这与电磁理论在现代信息社会的地位密切相关。19世纪电磁基础理论基本形成。20世纪在电报、广播、电视、卫星通信、移动通信、雷达、导航、无线网络及电气控制等领域得到了广泛应用。21世纪，随着个人无线通信的发展，人们将更加依赖电磁波，处处感到电磁波的重要。同时人们也更加关注电磁波对人类的影响以及电子设备间的相互影响。

电磁理论课程体系主要涉及电磁基本理论及电磁工程两个方面，电磁基本理论主要研究电磁场的源与场的关系以及电磁波在空间传播的基本规律，电磁工程主要讨论电磁波的产生、辐射、传播、电磁干扰、电磁兼容及电磁理论在各方面的应用等。

随着高等教育改革的不断深入以及人才培养模式的转变，学生对知识体系的完整性需求越来越大，因此本书在体系结构上突出基础性和知识体系的完整性，尽量避开繁杂的推导，注意理论与实际应用的结合，使读者易于接受。另外，在教材中给出了许多专业词汇的英文注解。

本书可供高等学校电子信息类学科本科有关各专业用作教材，亦可作为相关学科及有关专业技术人员的参考书。

本教材计划教学学时数为72学时。全书共八章，第1章矢量分析与场论，介绍了标量场的梯度，矢量场的散度与旋度，为后续内容打下数学基础；第2~4章为电磁基本理论，主要讨论了静电场、恒定磁场、时变电磁场的基本规律以及平面电磁波在不同媒质中的传播特性；第5~8章为电磁工程基础部分，第5章主要叙述了TEM波传输线的基本特性、传输线的等效、史密斯圆图、同轴线、微带传输线及传输线的匹配与滤波等，第6章讨论了波导传输系统及谐振器的工作原理，第7章讨论了电磁波的辐射与接收，主要叙述电磁波辐射的基本原理以及天线的基本知识，第8章介绍了无线信道、电磁干扰与电磁兼容的基本知识，为电磁工程应用打下基础。上述内容既有联系又相对独立，使用时可根据不同的教学要求进行灵活取舍。

本书由郭辉萍和刘学观合编，郭辉萍编写了第1~4章及第7章，刘学观编写了第5、6、8章，周朝栋教授审阅了全书，徐德源编辑和马乐惠编辑对本书提出了许多宝贵的意见，在此表示诚挚的谢意。在本书的成稿过程中得到了苏州大学电子信息学院领导和同志的关心和支持，蔡文锋老师提供了许多帮助，在此一并表示感谢。同时作者对西安电子科技大学出版社的大力支持表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请广大读者批评指正。

作 者
2003年6月

目 录

| | |
|------------------------------|-----|
| 第 1 章 矢量分析与场论 | 1 |
| 1.1 矢量及其代数运算 | 1 |
| 1.2 圆柱坐标系与球坐标系 | 3 |
| 1.3 矢量场 | 8 |
| 1.4 标量场 | 14 |
| 1.5 亥姆霍兹定理 | 17 |
| 习题 | 18 |
| 第 2 章 静电场分析 | 21 |
| 2.1 电场强度与电位函数 | 21 |
| 2.2 静电场的基本方程 | 27 |
| 2.3 电介质的极化与电通量密度 | 29 |
| 2.4 导体的电容 | 32 |
| 2.5 静电场的边界条件 | 34 |
| 2.6 恒定电场 | 38 |
| 2.7 静电场边值问题 | 45 |
| 习题 | 53 |
| 第 3 章 恒定电流的磁场 | 58 |
| 3.1 恒定磁场的基本方程 | 58 |
| 3.2 磁介质的磁化、磁场强度 | 65 |
| 3.3 恒定磁场的边界条件 | 68 |
| 3.4 自感和互感 | 69 |
| 习题 | 71 |
| 第 4 章 时谐电磁场与电磁波 | 74 |
| 4.1 法拉第电磁感应定律 | 74 |
| 4.2 位移电流 | 75 |
| 4.3 麦克斯韦方程及边界条件 | 77 |
| 4.4 坡印廷定理与坡印廷矢量 | 79 |
| 4.5 时谐电磁场 | 80 |
| 4.6 平面电磁波 | 83 |
| 4.7 电磁波的极化 | 92 |
| 4.8 电磁波的色散与群速 | 96 |
| 4.9 均匀平面电磁波对平面边界的垂直入射 | 97 |
| 4.10 均匀平面电磁波对平面边界的斜入射 | 101 |
| 习题 | 107 |
| 第 5 章 传输线 | 111 |
| 5.1 均匀传输线的分析 | 111 |
| 5.2 传输线的等效 | 116 |

| | |
|-----------------------------------|------------|
| 5.3 史密斯圆图及其应用 | 120 |
| 5.4 传输线的效率、损耗和功率容量 | 123 |
| 5.5 双导线与同轴线 | 124 |
| 5.6 微带传输线 | 126 |
| 5.7 传输线的匹配与滤波 | 130 |
| 习题 | 135 |
| 第 6 章 波导与谐振器 | 138 |
| 6.1 矩形波导 | 138 |
| 6.2 圆波导 | 147 |
| 6.3 波导的激励与耦合 | 150 |
| 6.4 谐振腔 | 151 |
| 习题 | 156 |
| 第 7 章 电磁波的辐射与接收 | 158 |
| 7.1 位函数的波动方程及滞后位 | 158 |
| 7.2 基本振子的辐射 | 160 |
| 7.3 天线的电参数 | 163 |
| 7.4 接收天线理论 | 171 |
| 习题 | 176 |
| 第 8 章 无线信道、电磁干扰与电磁兼容 | 179 |
| 8.1 电磁波谱 | 179 |
| 8.2 无线信道特性 | 181 |
| 8.3 无线电视距中继 | 184 |
| 8.4 短波电离层反射信道 | 187 |
| 8.5 地表面波传播 | 190 |
| 8.6 不均匀媒质散射信道 | 192 |
| 8.7 电磁干扰的特性 | 192 |
| 8.8 电磁兼容 | 195 |
| 习题 | 203 |
| 附录 | 204 |
| 习题参考答案 | 211 |
| 参考文献 | 218 |

第 1 章 矢量分析与场论

在实数域内,只有大小的量称之为标量,既有大小又有方向特性的量称之为矢量。无论是标量还是矢量,一旦被赋予物理单位,则成为一个具有物理意义的量,即所谓的物理量。物理量数值的无穷集合称为场。如果这个物理量是标量,就称其为标量场;如果它是矢量,就称这个场为矢量场。场的一个重要属性是它占有一个空间,而且在该空间域内,除有限个点或表面外它是处处连续的。如果场中各处物理量不随时间变化,则称该场为静态场,不然,则称它为动态场或时变场。

本章从定义标量和矢量出发,讨论矢量在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系三种坐标系中的表示法及其代数运算和相互关系;然后介绍矢量及标量的微分和积分及其性质;最后引入亥姆霍兹定理,它是矢量场共同性质的总结。

1.1 矢量及其代数运算

1.1.1 标量和矢量

电磁场中遇到的绝大多数物理量,能够容易地区分为标量(Scalar)和矢量(Vector)。一个仅用大小就能够完整描述的物理量称为标量,例如,电压、温度、时间、质量、电荷等。实际上,所有实数都是标量。一个有大小和方向的物理量称为矢量,电场、磁场、力、速度、力矩等都是矢量。例如,矢量 A 可以表示成

$$A = aA \quad (1-1-1)$$

其中, A 是矢量 A 的大小; a 代表矢量 A 的方向, $a = \frac{A}{A}$, 其大小等于 1。

一个大小为零的矢量称为空矢(Null Vector)或零矢(Zero Vector),一个大小为 1 的矢量称为单位矢量(Unit Vector)。在直角坐标系中,用单位矢量 a_x 、 a_y 、 a_z 表征矢量分别沿 x 、 y 、 z 轴分量的方向。

空间的一点 $P(X, Y, Z)$ 能够由它在三个相互垂直的轴线上的投影唯一地被确定,如图 1-1 所示。从原点指向点 P 的矢量 r 称为位置矢量(Position Vector),它在直角坐标系中表示为

$$r = a_x X + a_y Y + a_z Z \quad (1-1-2)$$

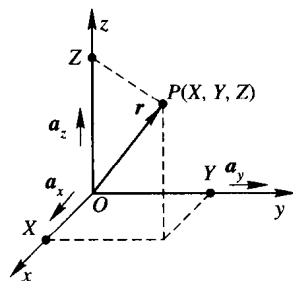


图 1-1 直角坐标系中一点的投影

式中, X 、 Y 、 Z 是位置矢量 r 在 x 、 y 、 z 轴上的投影。

任一矢量 A 在三维正交坐标系中都可以给出其三个分量。例如, 在直角坐标系中, 矢量 A 的三个分量分别是 A_x 、 A_y 、 A_z , 利用三个单位矢量 a_x 、 a_y 、 a_z 可以将矢量 A 表示成:

$$A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z \quad (1-1-3)$$

矢量 A 的大小为 A :

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (1-1-4)$$

1.1.2 矢量的代数运算

1. 矢量的加法和减法

任意两个矢量 A 与 B 相加等于两个矢量对应分量相加, 它们的和仍然为矢量, 即

$$C = A + B = a_x(A_x + B_x) + a_y(A_y + B_y) + a_z(A_z + B_z) \quad (1-1-5)$$

任意两个矢量 A 与 B 的差等于将其中的一个矢量变号后再相加, 即

$$D = A - B = A + (-B) = a_x(A_x - B_x) + a_y(A_y - B_y) + a_z(A_z - B_z) \quad (1-1-6)$$

2. 矢量的乘积

矢量的乘积包括标量积和矢量积。

1) 标量积

任意两个矢量 A 与 B 的标量积(Scalar Product)是一个标量, 它等于两个矢量的大小与它们夹角的余弦之乘积, 如图 1-2 所示, 记为

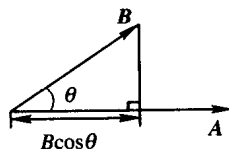


图 1-2 标量积的图示

$$A \cdot B = AB \cos \theta \quad (1-1-7)$$

标量积也称为点积(Dot Product), 如果两个不为零的矢量的标量积等于零, 则这两个矢量必然相互垂直, 或者说两个互相垂直的矢量的点积一定为零, 而两个相互平行的单位矢量的点积等于 1。

例如, 直角坐标系中的单位矢量有下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} a_x \cdot a_y &= a_y \cdot a_z = a_x \cdot a_z = 0 \\ a_x \cdot a_x &= a_y \cdot a_y = a_z \cdot a_z = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-8)$$

任意两矢量的标量积, 用矢量的三个分量表示为

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-1-9)$$

标量积服从交换律和分配律, 即

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (1-1-10)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (1-1-11)$$

2) 矢量积

任意两个矢量 A 与 B 的矢量积(Vector Product)是一个矢量, 矢量积的大小等于两个矢量的大小与它们夹角的正弦之乘积, 其方向垂直于矢量 A 与 B 组成的平面, 如图 1-3 所示, 记为

$$C = A \times B = a_n AB \sin \theta \quad (1-1-12)$$

$$a_n = a_A \times a_B \quad (\text{右手螺旋})$$

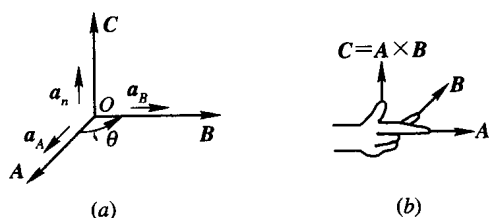


图 1-3 矢量积的图示及右手螺旋

(a) 矢量积的图示; (b) 右手螺旋

矢量积又称为叉积(Cross Product), 如果两个不为零的矢量的叉积等于零, 则这两个矢量必然相互平行, 或者说, 两个相互平行矢量的叉积一定等于零。

矢量的叉积不服从交换律, 但服从分配律, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1-1-13)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1-1-14)$$

直角坐标系中的单位矢量有下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_z, \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x, \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x &= \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-15)$$

在直角坐标系中, 矢量的叉积还可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{a}_x(A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{a}_y(A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{a}_z(A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned} \quad (1-1-16)$$

矢量的其他运算详见附录一。

1.2 圆柱坐标系和球坐标系

在实际应用中, 有时采用圆柱坐标系或球坐标系能使问题分析的更简洁、明了。下面我们介绍圆柱坐标系和球坐标系及其与直角坐标系之间的转换。

1.2.1 圆柱坐标系

空间任一点 P 的位置可以用圆柱坐标系中的三个变量 (ρ, φ, z) 来表示, 如图 1-4 所示。其中, ρ 是位置矢量 OP 在 xy 面上的投影, φ 是从 $+x$ 轴到位置矢量 OP 在 xy 面上的投影之间的夹角, z 是 OP 在 z 轴上的投影。由图 1-4 可以看出, 圆柱坐标与直角坐标之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1-2-1)$$

如同直角坐标系一样, 圆柱坐标系也具有三个相互垂直的坐标面, 如图 1-5 所示。

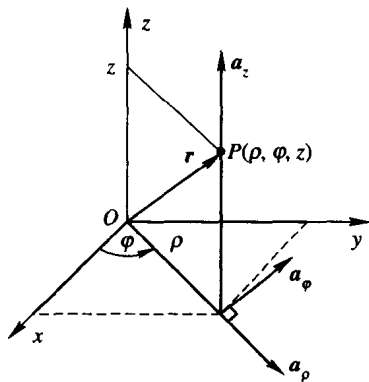


图 1-4 圆柱坐标系一点的投影

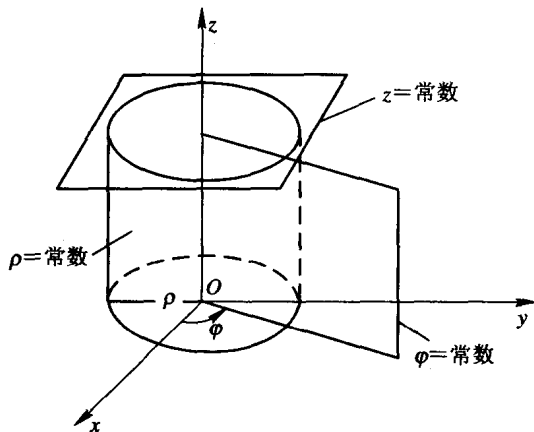


图 1-5 圆柱坐标系三个互相垂直的坐标面

坐标面

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{常数} \quad (1-2-2)$$

表示一个以 z 轴作轴线的半径为 ρ 的圆柱面, ρ 的变化范围为 $0 \leq \rho < \infty$ 。

坐标面

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \text{常数} \quad (1-2-3)$$

表示一个以 z 轴为界的半平面, φ 的变化范围为 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 。

坐标面

$$z = \text{常数} \quad (1-2-4)$$

表示一个平行于 xy 平面的平面。 z 的变化范围为 $-\infty < z < +\infty$ 。

由于三个面相交成直角, 因此能够建立互相垂直的坐标轴: ρ 、 φ 和 z , 相应的单位矢量为 a_ρ 、 a_φ 和 a_z , 分别指向 ρ 、 φ 和 z 增加的方向。应该指出: 圆柱坐标系中的三个单位矢量(与直角坐标系的不同)除 a_z 外, a_ρ 和 a_φ 都不是常矢量, 它们的方向随 P 点的位置不同而变化, 但 a_ρ 、 a_φ 和 a_z 三者始终保持正交关系, 并遵循右手螺旋法则, 即

$$\left. \begin{aligned} a_\rho \times a_\varphi &= a_z, a_\varphi \times a_z = a_\rho, a_z \times a_\rho = a_\varphi \\ a_\rho \times a_\rho &= a_\varphi \times a_\varphi = a_z \times a_z = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-5)$$

$$\left. \begin{aligned} a_\rho \cdot a_\varphi &= a_\varphi \cdot a_z = a_\rho \cdot a_z = 0 \\ a_\rho \cdot a_\rho &= a_\varphi \cdot a_\varphi = a_z \cdot a_z = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-2-6)$$

圆柱坐标系的位置矢量 r 可以表示为

$$r = a_\rho \rho + a_z z \quad (1-2-7)$$

圆柱坐标系中的单位矢量 a_ρ 和 a_φ 在单位矢量 a_x 和 a_y 上的投影示于图 1-6, 显然

$$\left. \begin{aligned} a_\rho &= a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi \\ a_\varphi &= a_x (-\sin\varphi) + a_y \cos\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-2-8)$$

所以, 直角坐标系中的单位矢量变换到圆柱坐标系中的单位矢量的表达式写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_\rho \\ \mathbf{a}_\varphi \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} \quad (1-2-9)$$

将上式求逆即可得到从圆柱坐标系到直角坐标系的转换关系为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\rho \\ \mathbf{a}_\varphi \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} \quad (1-2-10)$$

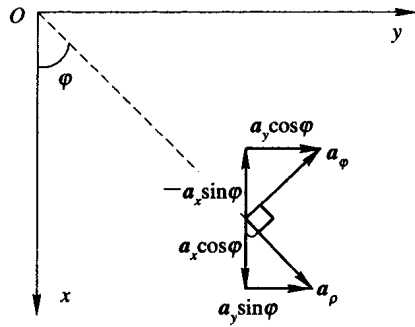


图 1-6 圆柱坐标系单位矢量的变换

式(1-2-9)和(1-2-10)表明:如果矢量 A 是在圆柱坐标系给定的,根据式(1-2-10)可以得到直角坐标系的表达式;反之,若矢量 A 是在直角坐标系给定的,则根据式(1-2-9)可以得到圆柱坐标系的表达式。

圆柱坐标系中的任意一点 P 沿 ρ 、 φ 和 z 方向的长度增量分别为

$$dl_\rho = d\rho, dl_\varphi = \rho d\varphi, dl_z = dz \quad (1-2-11)$$

它们与沿各自坐标增量之比分别为

$$h_1 = \frac{dl_\rho}{d\rho} = 1, h_2 = \frac{dl_\varphi}{d\varphi} = \rho, h_3 = \frac{dl_z}{dz} = 1 \quad (1-2-12)$$

通常将 h_1 、 h_2 、 h_3 称为拉梅常数(Lame Constant)。

圆柱坐标三个坐标面的面元矢量分别为

$$dS_\rho = \mathbf{a}_\rho \rho d\varphi dz \quad (1-2-13)$$

$$dS_\varphi = \mathbf{a}_\varphi d\rho dz \quad (1-2-14)$$

$$dS_z = \mathbf{a}_z \rho d\varphi d\rho \quad (1-2-15)$$

体积元为

$$dV = \rho d\varphi d\rho dz \quad (1-2-16)$$

1.2.2 球坐标系

在球坐标系中,空间一点 P 唯一地用三个坐标变量 (r, θ, φ) 来表示,如图 1-7 所示。此处,位置矢量 \mathbf{r} 又称为矢径(Radius Vector), r 是其大小, θ 是位置矢量 \mathbf{r} 与 z 轴的夹角, φ 是从 $+x$ 轴到位置矢量 \mathbf{r} 在 xy 面上的投影 OM 之间的夹角。由图 1-7 可以看出,球坐标与直角坐标之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-2-17)$$

同样,球坐标也有三个坐标面,如图 1-8 所示。

坐标面

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{常数} \quad (1-2-18)$$

表示一个半径为 r 的球面, r 的变化范围为 $0 \leq r < \infty$ 。

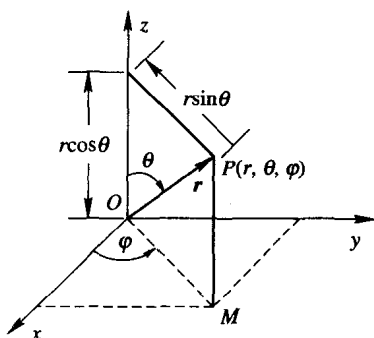


图 1-7 球坐标系一点的投影坐标面

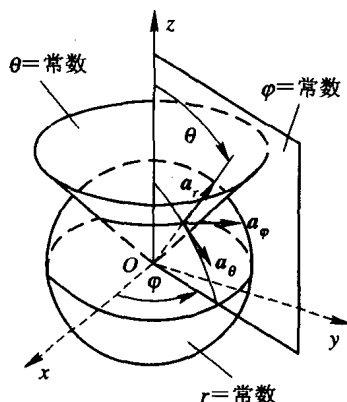


图 1-8 球坐标系三个互相垂直的坐标面

$$\theta = \text{常数}$$

表示一个以原点为顶点、以 z 轴为轴线的圆锥面, θ 的变化范围为 $0 \leq \theta \leq \pi$ 。

坐标面

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \text{常数} \quad (1-2-19)$$

表示一个以 z 轴为界的半平面, φ 的变化范围为 $0 \leq \varphi < 2\pi$ 。

球坐标系的位置矢量可以表示为

$$\mathbf{r} = a_r r \quad (1-2-20)$$

球坐标系中任意点 $P(r, \theta, \varphi)$ 的三个单位矢量为 a_r 、 a_θ 和 a_φ , 它们互相正交且遵循右手螺旋法则, 即

$$\left. \begin{aligned} a_r \times a_\theta &= a_\varphi, a_\theta \times a_\varphi = a_r, a_\varphi \times a_r = a_\theta \\ a_r \times a_r &= a_\theta \times a_\theta = a_\varphi \times a_\varphi = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-21)$$

$$\left. \begin{aligned} a_r \cdot a_\theta &= a_\theta \cdot a_\varphi = a_r \cdot a_\varphi = 0 \\ a_r \cdot a_r &= a_\theta \cdot a_\theta = a_\varphi \cdot a_\varphi = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-2-22)$$

单位矢量 a_r 、 a_θ 和 a_φ 在单位矢量 a_x 、 a_y 和 a_z 上的投影分别示于图 1-9(a)、(b) 和 (c)。由图

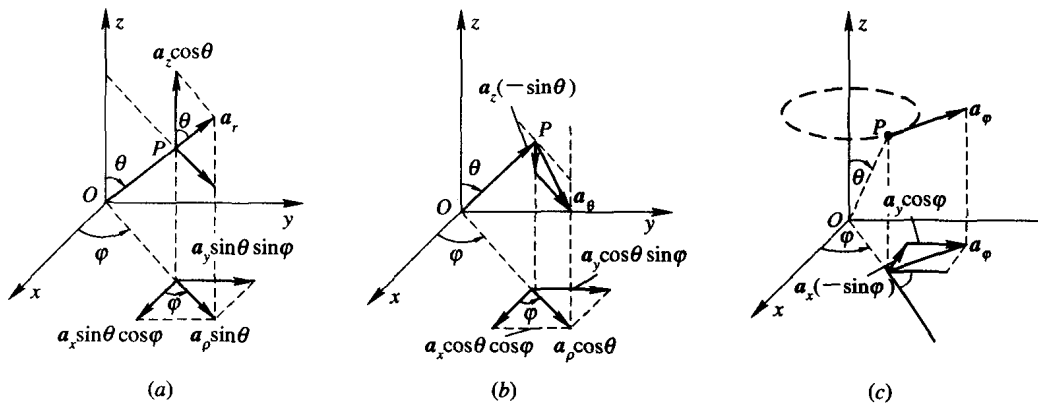


图 1-9 球坐标的三个单位矢量在 a_x 、 a_y 和 a_z 上的投影

1-9 可以得到直角坐标系中的单位矢量变换到球坐标的表达式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_\theta \\ \mathbf{a}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} \quad (1-2-23)$$

将上式求逆即可得到球坐标中的单位矢量变换到直角坐标的表达式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_\theta \\ \mathbf{a}_\varphi \end{bmatrix} \quad (1-2-24)$$

式(1-2-23)和(1-2-24)表明:如果矢量 \mathbf{A} 是在球坐标系给定的,根据式(1-2-24)可以得到直角坐标系的表达式;反之,若矢量 \mathbf{A} 是在直角坐标系给定的,则根据式(1-2-23)可以得到球坐标系的表达式。

空间一点 P 沿 r 、 θ 和 φ 方向的长度增量分别为

$$dl_r = dr, \quad dl_\theta = r d\theta, \quad dl_\varphi = r \sin\theta d\varphi \quad (1-2-25)$$

则球坐标中的拉梅常数为

$$h_1 = \frac{dl_r}{dr} = 1, \quad h_2 = \frac{dl_\theta}{d\theta} = r, \quad h_3 = \frac{dl_\varphi}{d\varphi} = r \sin\theta \quad (1-2-26)$$

而沿球面、 θ =常数平面和 φ =常数平面的三个面元矢量分别为

$$dS_r = \mathbf{a}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad (1-2-27)$$

$$dS_\theta = \mathbf{a}_\theta r \sin\theta dr d\varphi \quad (1-2-28)$$

$$dS_\varphi = \mathbf{a}_\varphi dr d\theta \quad (1-2-29)$$

球坐标的体积元为

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (1-2-30)$$

【例 1-1】 将圆柱坐标系中的矢量表达式 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho \frac{k}{\rho^2} + \mathbf{a}_z 5 \sin 2\varphi$ 转换为直角坐标系的表达形式。

解 由题设可知矢量在圆柱坐标系中的三个分量为

$$A_\rho = \frac{k}{\rho^2}, \quad A_\varphi = 0, \quad A_z = 5 \sin 2\varphi$$

将其代入式(1-2-10)

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

再根据

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\rho} \text{ 和 } \sin\varphi = \frac{y}{\rho}$$

因此,矢量在直角坐标系中的表达式为

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x \frac{kx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \mathbf{a}_y \frac{ky}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \mathbf{a}_z \frac{10xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1.3 矢量场

赋予物理意义的矢性函数称为矢量场(Vector Field),一般矢量场均占有空间。为了考察矢量场在空间的分布状况及变化规律,我们引入矢量线、矢量场的通量以及散度、环量和旋度的概念。

1.3.1 矢量场的矢量线

矢量场空间中任意一点 P 处的矢量可以用一个矢性函数 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(P)$ 来表示。当选定了直角坐标系后,它就可以写成如下形式:

$$\mathbf{A} = A(x, y, z) \quad (1-3-1)$$

设 A_x, A_y, A_z 为矢性函数 \mathbf{A} 在直角坐标系中的三个坐标分量,且假定它们都具有一阶连续偏导数,则 \mathbf{A} 又可以表示为

$$\mathbf{A} = a_x A_x(x, y, z) + a_y A_y(x, y, z) + a_z A_z(x, y, z) \quad (1-3-2)$$

所谓矢量线(Vector Line),乃是这样一些曲线:在曲线上的每一点处,场的矢量都位于该点处的切线上(如图 1-10 所示),像静电场的电力线、磁场的磁力线、流速场中的流线等,都是矢量线的例子。

现在我们来讨论矢量线方程的表达式。

设 P 为矢量线上任一点,其矢径为 \mathbf{r} ,则根据矢量线的定义,必有

$$\mathbf{A} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (1-3-3)$$

在直角坐标系中,矢径 \mathbf{r} 的表达式为

$$\mathbf{r} = a_x x + a_y y + a_z z \quad (1-3-4)$$

将其代入式(1-3-3)即得矢量场的矢量线满足的微分方程为

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (1-3-5)$$

上式表明:如果已知矢量场的表达式,解式(1-3-5)即可得到其矢量线的表达式。矢量场的矢量线可以使我们直观形象地了解矢量场在空间的分布状况。

【例 1-2】 设点电荷 q 位于坐标原点,它在空间任一点 $P(x, y, z)$ 处所产生的电场强度矢量为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

式中, q, ϵ_0 均为常数, $\mathbf{r} = a_x x + a_y y + a_z z$ 为 P 点的位置矢量。求 \mathbf{E} 的矢量线方程并画出矢量线图。

解
$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (a_x x + a_y y + a_z z) = a_x E_x + a_y E_y + a_z E_z$$

由式(1-3-5)简化得矢量线方程为

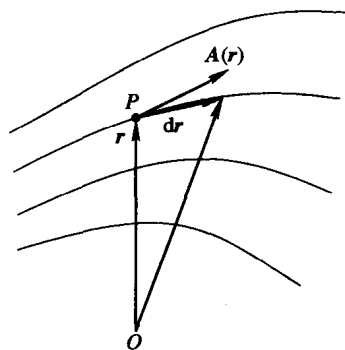


图 1-10 力线图

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

此方程的解为

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 x \\ z &= C_2 y \end{aligned} \right\}$$

式中, C_1, C_2 为任意常数。电场的矢量线如图 1-11 所示。

由图 1-11 可见, 电力线是一簇从点电荷出发向空间发散的径向辐射线, 它形象地描绘出点电荷的电场在空间的分布状况。

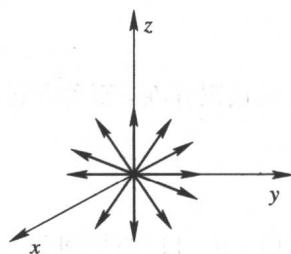


图 1-11 点电荷的电场矢量线

1.3.2 矢量场的通量及散度

1. 矢量场的通量

在矢量场 A 中取一个面元 dS 及与该面元垂直的单位矢量 n (外法向矢量, 如图 1-12 所示), 则面元矢量表示为

$$dS = n dS \quad (1-3-6)$$

由于所取的面元 dS 很小, 因此可认为在面元上各点矢量场 A 的值相同, A 与面元 dS 的标量积称为矢量场 A 穿过 dS 的通量(Flux), 记作

$$A \cdot dS = A \cos\theta dS \quad (1-3-7)$$

因此矢量场 A 穿过整个曲面 S 的通量为

$$\Phi = \int_S A \cdot dS = \int_S A \cos\theta dS \quad (1-3-8)$$

如果 S 是一个闭曲面, 则通过闭合曲面的总通量可表示为

$$\Phi = \oint_S A \cdot dS = \oint_S A \cdot n dS \quad (1-3-9)$$

假定矢量场 A 为流体的速度, 则式(1-3-9)的物理意义为: 通量表示在单位时间内流体从闭合曲面内流出曲面 S 的正流量与流入闭合曲面 S 内部的负流量的代数和, 即净流量。若 $\Phi > 0$, 则表示流出多于流入, 说明此时在 S 内必有产生流体的正源(Source); 若 $\Phi < 0$, 则表示流入多于流出, 此时在 S 内必有吸收流体的负源, 我们称之为沟(Sink); 当 $\Phi = 0$, 则表示流入等于流出, 此时在 S 内正源与负源的代数和为零, 或者说 S 内没有源。

矢量场在闭合面 S 上的通量是由 S 内的源决定的, 它是一个积分量, 因而它描绘的是闭合面较大范围内的源(我们把该类源称为发散源)的分布情况, 而我们往往需要知道场中每一点上源的性质, 为此, 引入矢量场散度的概念。

2. 矢量场的散度

1) 散度的定义

设有矢量场 A , 在场中任一点 P 处作一个包含 P 点在内的任一闭合曲面 S , 设 S 所限定的体积为 ΔV , 当体积 ΔV 以任意方式缩向 P 点时, 取下列极限: