仁华学校奥林匹克数学系列丛书

人大附中编

仁华学校奥林匹克数学

RENHUAXUEXIAOAOLINPIKESHUXUE

课本

初中一年级

中国大百科全书出版社

人大附中远程教育网网址：
http://www.rdfz.com

仁华学校奥林匹克数学系列丛书

- 仁华学校奥林匹克数学课本（12册）
- 仁华学校奥林匹克数学思维训练导引·小学部（2册）
- 仁华学校奥林匹克数学思维训练教程（4册）
- 仁华学校奥林匹克数学竞赛试题与详解·小学部（6册）
- 仁华学校奥林匹克数学测试卷（4册）

仁华学校奥林匹克物理系列丛书

- 仁华学校奥林匹克物理课本（3册）
- 仁华学校奥林匹克物理试题解析（3册）
- 仁华学校奥林匹克物理实验（2册）

仁华学校奥林匹克英语系列丛书

- 仁华学校奥林匹克图解英语（4册）

ISBN 7-5000-6985-5

9 787500 069850 >

ISBN7-5000-6985-5/G·667

定价：10.00元

仁华学校奥林匹克数学系列丛书

仁华学校(原华罗庚学校)

奥林匹克数学课本

初中一年级

(最新版)

人大附中编
主编:刘彭芝

中国大百科全书出版社

总编辑：徐惟成　　社长：田胜立

图书在版编目(CIP)数据

仁华学校奥林匹克数学课本．初一年级 / 刘彭芝主编．北京:中国大百科全书出版社,2003.12

ISBN 7 - 5000 - 6985 - 5

Ⅰ.仁…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.数学课—初中—数学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 118201 号

仁华学校奥林匹克数学课本(初一年级·最新版)

主　　编:刘彭芝
责任编辑:简菊玲
装帧设计:何　茜
责任印制:徐继康

出版发行:中国大百科全书出版社
(北京阜成门北大街 17 号　100037　68315606)
http://www.ecph.com.cn
排　　版:北京百科创新文化咨询中心
印　　刷:北京建筑工业印刷厂

版　　次:2004 年 1 月第 1 版
印　　次:2004 年 1 月第 1 次印刷
印　　张:9.5
开　　本:880 × 1230　1/32
字　　数:222 千字
印　　数:1 - 10000
ISBN 7 - 5000 - 6985 - 5/G·667
定　　价:10.00 元

顾　问：王　元　裘宗沪
冯克勤　陈德泉

主　编：刘彭芝

副主编：童　欣

编　委：周沛耕　张亦鸣
邓　均　杨骅飞
马淑珍　薄云程
颜华菲　陶晓勇

序

这套丛书是北京仁华学校的教学用书。

北京仁华学校是人大附中的超常教育实验基地。其前身为北京市华罗庚学校，2003 年 12 月改用新名（为叙述方便起见，下文涉及“北京市华罗庚学校”或“华校”的一律改用新名）。仁华学校的办学目的是探索科学实用、简单易行的鉴别与选拔超常儿童的方法，探索具有中国特色的超常教育模式，为国家大面积早期发现与培养现代杰出人才开辟一条切实可行的途径。在这里，数百位优秀教师精心执教，一批批超常儿童茁壮成长。仁华学校全体师生决心在教育改革的时代大潮中争做弄潮儿，为实现中华民族的伟大复兴甘当马前卒。

超常教育与早期教育为当今世界各国所重视。近年来，我国的众多有识之士投身超常教育事业，也取得了可喜的成果。超常教育是人类教育史上的一大进步，但同时也是一个复杂而全新的教育课题。无论在历史上还是现实生活中，少年出众，而成年寻常的人比比皆是。究其原因，往往在于成长的环境不佳，特别是未能在超常教育理论指导下施以特殊教育。因而，必须更新教育观念和教学模式，这样才能把大批聪慧儿童培养成为知识经济时代的栋梁之材。我们认为，超常儿童是具有良好的智力和非智力个性特征的统一体，是遗传与环境共同作用下的产物。基于此种看法，北京仁华学校的超常

教育，以尊重个性和挖掘潜力为基本原则，强调选拔与培养相结合，不缩短学制而注重学生综合素质的全面提高。

仁华学校分为小学部、初中部和高中部。小学部属校外培训性质，招收小学三至六年级的学生，招生时间定在每年9月或10月，入学后每周学习一次。初中部和高中部属常规中等教育，纳入人大附中建制，每个年级设4－6个实验班。仁华学校初中部和高中部的生源分别主要来自小学部和初中部，同时面向全市招生。

仁华学校在办学过程中，逐渐形成了自已独特的课程体系。在必修课中，我们把数学作为带头学科，并以此促进物理、化学、生物、外语、计算机等其他学科的发展。这是因为，数学作为研究现实世界中数和形的一门基础科学，不仅对人类社会的进步和国家的建设发挥着关键的作用，而且对训练人们的思维能力具有重要的价值。此外，仁华学校还开设有现代少年、科学实践、社会实践、心理导向、创造发明和生物环保等特色课，以及汽车模拟驾驶、网页设计、天文观测、电子技术、几何画板、艺术体操、篆刻和摄影等选修课。华校全新的课程设置，近而言之，是希望学生能够增强学习兴趣，开阔知识视野；远而图之，则是为他们日后发展的多价值取向打下坚实而全面的科学文化基础。

仁华学校在办学过程中，还逐渐形成了一支思想新、业务精、肯吃苦、敢拼搏的教师队伍。这其中既有多年工作在教学第一线的中小学高级和特级教师，又有近年来执着于数学、物理、化学、生物、计算机等学科奥林匹克活动的高级教练员，还有中国科学院和各高等学校中教学科研上成绩卓著的专家教授。他们着眼于祖国的未来，甘做人梯，为超常教育事业辛勤耕耘，是仁华学校藉以成长、引以自豪的中流砥柱。

实践证明，仁华学校对超常儿童的培养方略是可取的。十余年来，仁华学校为高等学校输送了大量全面发展、学有特长并具备创新精神和高尚品德的优异人才。已毕业的16届实验班学生全部考取重点大学，其中进入北京大学和清华大学的人数约占总数的68%，保送生约占25%。不仅如此，还有近3000人次学生在区、市、国家乃至世界级的学科竞赛中获奖夺魁，数量位居北京市重点中学之首。仁华学校的学生在全国雷达表青少年科学英才竞赛中获一、二、三等奖各一次，在全俄罗斯数学竞赛中获两枚金牌、一枚银牌，在国际物理邀请赛中获一枚银牌，在国际信息学奥林匹克竞赛（IOI）中获一枚铜牌，在国际数学奥林匹克竞赛（IMO）中获满分金牌2枚和银牌1枚。近200人在各种发明比赛中获奖，其中几十人获全国及世界创造发明比赛的金奖、银奖，并取得五项国家专利。还有33人次在全国科学论文评比中获一、二、三等奖。此外，实验班的同学在艺术体育等方面也成绩斐然。上述大量事实证明，一种新的教育理论和实践，使得一批又一批英才脱颖而出，这足以显示仁华学校的办学方向是正确的，教学是成功的。

仁华学校超常教育的实践和成果已引起全国和国际教育界的关注。华校现在是中国人才研究会超常人才专业委员会副理事长单位，其超常教育研究课题曾荣获北京市“八五”普教科研优秀成果二等奖。仁华学校先后有数十位师生参加了国际超常儿童教育学术会议，在各种国际会议上宣读论文三十余篇，并同五十多个国家和地区从事超常教育的学校及研究机构建立了友好往来或合作研究关系。

教材是教学质量的基本保证，也是教学的基础建设。高质量的教材，是建立在高水平的学术研究成果和丰富的教学经验基础之上的。我们组织编写的这套“北京市

华罗庚学校奥林匹克系列丛书”的作者大部分都是原华校的骨干教师，开创了荟萃专家编书的格局。另外还有数位曾经在国际数学奥林匹克竞赛（IMO）中获得金牌和银牌的大学生和研究生参加撰写。这支由学生组成的特别劲旅将他们学习的真切感受和新鲜经验表达出来，使得本丛书独具一格。综合而言，展现在读者面前的这套丛书集实用、新颖、通俗、严谨等特点于一身，我们将其奉献给中小学教师、学生及家长，希望能博得广大读者的喜爱。此套丛书涉及数学、英语、物理和计算机等学科，目前已经出版和即将出版的有四十余册。

俗云：“一花怒放诚可爱，万紫千红才是春。”仁华学校在努力办学、完善自身的同时，诚望对国内中小学教学水平的提高微尽绵薄，诚望与其他兄弟学校取长补短，携手共进。“合抱之木，生于毫末，九层之台，起于垒土。”遥望未来，让我们同呼志士之言：为中国在21世纪成为科技强国而献身。

作为本系列丛书的主编，借这套丛书再次出版的机会，我再次以一个超常教育的积极参与者与组织者的名义，向各位辛勤的编著者致以衷心的谢意，恳请教育战线的前辈和同仁给予指导和推荐，也恳请广大师生在使用过程中提出宝贵的意见。

刘彭芝

写于2001年1月

修改于2003年12月

目　录

目 录

第 1 讲　整式的恒等变形(一)

把一个代数式变换成另一个和它恒等的代数式,叫做代数式的恒等变形.

代数式的恒等变形是数学的基础知识,它在化简、求值、证明恒等式等问题中,有着广泛的应用.

通过代数式的恒等变形,对学生准确理解有关概念,掌握有关法则,提高运算能力、逻辑推理能力,增强解题的灵活性,都有重要意义.

整式的恒等变形是代数式恒等变形的一种,它既是代数式恒等变形的基础,又具有独特的复杂性和技巧性.

整式恒等变形涉及到的主要内容有:整式的各种运算性质和法则;各种乘法公式的正、逆应用,变形应用;因式分解的有关知识等.其中主要乘法公式除教科书上的平方差公式、完全平方公式、立方和与立方差公式外,有时还用到下面几个:

(1)$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

(2)$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(3)$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

下面介绍整式恒等变形的一些常用方法和特殊技巧.

一、运用运算性质和法则

例 1　设 x,y,z 都是整数,且 11 整除 $7x+2y-5z$,求证:11 整除 $3x-7y+12z$(1987 年北京市初中竞赛试题).

证明:∵　$4(3x-7y+12z)+3(7x+2y-5z)=11(3x-2y+3z)$,又由题设知 11 整除 $3(7x+2y-5z)$,而 11 整除 $11(3x-2y+3z)$,同时$(11,4)=1$,　　∴ 11 整除 $3x-7y+12z$.

例 2　已知 $y=ax^5+bx^3+cx+d$,当 $x=0$ 时,$y=-3$,当 $x=-5$ 时,$y=9$,求当 $x=5$ 时 y 的值.

分析　已知 $x=-5$ 时，$y=9$，求 $x=5$ 时 y 的值，我们注意到 x 的取值 -5 和 5 互为相反数；进一步再观察已知多项式里除了常数项外 x 的指数都是奇数，所以可以利用奇数次幂的性质，即任何数奇数次乘方后，符号不变，来解决本题．

解：当 $x=0$ 时，$y=-3$，代入得 $d=-3$，即

$y=ax^5+6x^3+cx-3$

$\because$　$x=-5$ 时，$y=9$，

代入，$9=a(-5)^5+b(-5)^3+c(-5)-3$，

$\therefore$　$a\cdot5^5+b\cdot5^3+c\cdot5=-12$．

$\therefore$　$x=5$ 时，$y=a\cdot5^5+b\cdot5^3+c\cdot5-3=-12-3=-15$．

利用一个数的奇、偶次方幂的性质来求代数式值是常用的方法，如果上例中 x 的乘方的次数都变为偶次，你能想到它的解法是否完全类似吗？

例3　若 a、b、c 都是自然数，且满足 $a^5=b^4$，$c^3=d^2$，且 $c-a=19$，求 $d-b$ 的值．

分析　因为 5 和 4 的最小公倍数是 20，所以可设 $a^5=b^4=m^{20}$．同样 3 和 2 的最小公倍数是 6，故可设 $c^3=d^2=n^6$．这样 a、b 可以用 m 的幂的形式表示出来，c、d 可以用 n 的幂的形式表示出来．

解：设 $a^5=b^4=m^{20}$，$c^3=d^2=n^6$（m、n 为自然数），

那么，$a=m^4$，$b=m^5$，$c=n^2$，$d=n^3$．

$\because$　$c-a=19$，　$\therefore$　$n^2-m^4=19$，

即 $(n+m^2)(n-m^2)=19$．

$\because$　$n+m^2>n-m^2$，又 19 是质数，

$\therefore\ \begin{cases}n+m^2=19,\\ n-m^2=1,\end{cases}$　$\therefore\ \begin{cases}m=3,\\ n=10,\end{cases}$　$\therefore\ \begin{cases}d=n^3=1000,\\ b=m^5=243,\end{cases}$

因此，$d-b=1000-243=757$．

本例题的解法是有关幂的问题中常常使用的一种方法，即对形如 $a^m=b^n$ 的式子，当 $(m,n)=1$ 时，可设 $a^m=b^n=t^{mn}$，则

$a=t^n$，$b=t^m$，从而使问题简化，这种解法既利用了幂运算的性质，又使用了换元的思想.

二、灵活动用乘法公式

乘法公式是进行整式恒等变形的常用的重要工具，我们通过下面的例题来说明在整式的恒等变形中，如何灵活巧妙地运用乘法公式.

例4 计算$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)+1$.

分析　观察连乘积的每个因式：每一个因式均为2的方幂与1之和，且每个因式中2的幂次是其前一因式中2的幂次的两倍，又第一个因式是$2+1$.为了利用平方差公式简化计算，在连乘积的最前面乘以$(2-1)$，即乘以1，原式的值不变，而问题却迎刃而解.

解：
$$\begin{aligned}原式&=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)+1\\&=(2^2-1)(2^2+1)\cdots(2^{32}+1)+1\\&\quad\cdots\cdots\\&=(2^{32}-1)(2^{32}+1)+1\\&=2^{64}-1+1=2^{64}\end{aligned}$$

应用乘法公式进行整式的恒等变形时，应熟悉公式形式、特点，设法为利用公式创造条件.

例5 已知整数a、b、$(a-b)$都不是3的倍数，试证a^3+b^3是9的倍数.

分析　因为a、b不是3的倍数，$a-b$也不是3的倍数，故a、b不同余，故设$a=3m+1$，$b=3n-1$（m、n为整数），代入a^3+b^3中，即可能出现因数9，而使问题得到解决.

证明：$\because$　a、b、$a-b$都不是3的倍数，$\therefore$　a、b不同余.设$a=3m+1$，$b=3n-1$（m、n为整数；如$a=3m-1$，$b=3n+1$，论证相仿），那么

$$a^3+b^3=(3m+1)^3+(3n-1)^3$$
$$=[(3m+1)+(3n-1)][(3m+1)^2-(3m+1)(3n-1)+$$

$(3n-1)^2]$

$=3(m+n)(9m^2+9n^2-9mn+9m-9n+3)$

$=9(m+n)(3m^2+3n^2-3mn+3m-3n+1)$.

$\because$ m、n 为整数，$\therefore$ $m+n$ 及 $3m^2+3n^2-3mn+3m-3n+1$ 均为整数.故 a^3+b^3 是 9 的倍数.

例 6 当 $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 时，试求下列各式的值：

(1) $bc+ca+ab$； (2) $a^4+b^4+c^4$

分析 (1)因为已知中出现各数之和 $a+b+c$，各数平方之和 $a^2+b^2+c^2$，而所求式为 $ab+bc+ca$，自然想到要用公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$.

$\therefore$ $0^2=1+2(ab+ac+bc)$ 即 $bc+ca+ab=-\frac{1}{2}$.

(2)根据 n 个数和的平方公式可知，若能求出 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$ 的值，那么 $a^4+b^4+c^4$ 的值就容易求出了.而 $(bc+ca+ab)^2$ $=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)$

$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$

$\therefore$ $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=(-\frac{1}{2})^2-2abc\times0=\frac{1}{4}$

$\therefore$ $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$

$=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

例 7 试求 $x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x$ 被 $x-1$ 除的余数.

分析 由于 x^{243} 的次数太高，因此采取一般的竖式除法显然是不容易奏效的，如果将多项式各项均配上 -1.利用公式：$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots ab^{n-2}+b^{n-1})$，即可出现因式 $x-1$，使问题得到解决.

解：$x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x$

$=(x^{243}-1)+(x^{81}-1)+(x^{27}-1)+(x^9-1)+(x^3-1)+(x-1)+6$

$\because$ 上式中,每个小括号里的二项式均可被 $x-1$ 整除,

$\therefore$ $x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^{9}+x^{3}+x$ 被 $x-1$ 除的余数为6.

本题是第10届莫斯科数学竞赛题.解法简捷、灵活,别开生面,给我们一定的启示,即多项式的项数、各项的指数、系数都可以进行各种变化而使之具备使用公式的条件.如果要求 $a^{24}-a^{20}+3a^{16}-5a^{12}+a^{8}-2a^{4}+1$ 被 $a-1$ 除的余数,你能用这种思路解答吗?

例8 求证:$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

证明: 左边 $=(a^3+b^3)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=[(a+b)^3+c^3]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab]$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

本公式在变形中,经常使用的是"若 $a+b+c=0$ 则 $a^3+b^3+c^3=3abc$"和其逆命题.

例如:设 a、b、c 为有理数,且 $a+b+c=0$,$a^3+b^3+c^3=0$.证明对于任何正奇数 n,都有 $a^n+b^n+c^n=0$

证明: 由 $a+b+c=0$ 得 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

又 $a^3+b^3+c^3=0$,故 $3abc=0$,从而在 a、b、c 中至少有一个为0.

不妨设 $c=0$,则 $a=-b$.

因 n 是正奇数,故 $a^n+b^n+c^n=-b^n+b^n=0$.

三、配方法

配方法是一种重要的数学方法,配方法在恒等变形中应用十分广泛.在配方时,还常用到拆项或补项的技巧.

例9 证明:当 a、b 取任意有理数时,多项式 $a^2+b^2-2a+6b+11$ 的值总是正数.

证明: $\because$ $a^2+b^2-2a+6b+11$