大学生学习指导丛书

概率统计

学习指导与提高

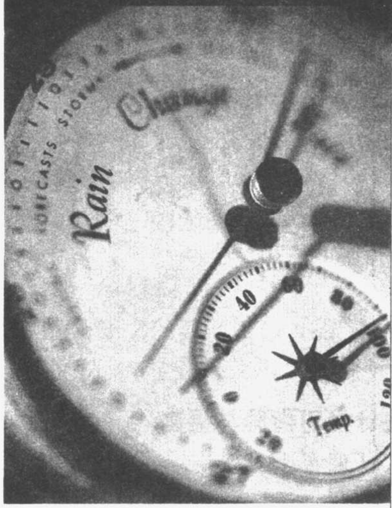
[理工类]

郭绍建　傅丽华　萧亮壮　编著

北京航空航天大学出版社
http://www.buaapress.com.cn

大学生学习指导丛书

概率统计



学习指导与提高

[理工类]

郭绍建　傅丽华　萧亮壮　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书是概率统计辅导教材，适用于理工科大学。本书依据概率统计教学大纲，与一般理工科院校的教材基本配套。本书总结归纳了概率统计的基本概念、基本理论与基本方法；给出了类型与数量众多的典型例题的解析，有助于读者理解概念和理论，有助于读者掌握基本方法。

本书既可作为理工科大学生学习概率统计的辅导教材，也可作为考研复习的教材。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计学习指导与提高．理工类/郭绍建等编著．
北京：北京航空航天大学出版社，2003.8
ISBN 7-81077-325-9

Ⅰ．概… Ⅱ．郭… Ⅲ．①概率论—高等学校—教学参考资料② 数理统计—高等学校—教学参考资料
Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 038702 号

概率统计学习指导与提高

[理工类]

郭绍建 傅丽华 萧亮壮 编著

责任编辑 郑忠姝

*

北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路 37 号(100083) 发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026
http://www.buaapress.com.cn
E-mail：bhpress@263.net
河北省涿州市新华印刷厂印装 各地书店经销

*

开本：787×960 1/16 印张：13.25 字数：297 千字
2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷 印数：5 000 册
ISBN 7-81077-325-9 定价：19.00 元

前　　言

概率统计是理工科大学的一门重要基础课。这门课程，对于学习某些专业课程，对于进一步深造，对于开展科学研究，都是必备的基础知识。

学习概率统计课程，需要具备高等数学的扎实基础，需要严密且有条不紊的思维方法，需要解决应用问题的能力。初学者往往会遇到一定的疑难。本书专为帮助读者学好概率统计课程而编写。书中逐章总结归纳了基本概念、基本理论和基本方法；给出了类型与数量众多的典型例题。通过例题的解析，帮助初学者掌握概念和理论，帮助初学者掌握基本方法。编者多年主讲概率统计课程，熟知课程的重点与难点，掌握初学者可能会遇到的问题和疑难，通过本书的例题，加以分析解疑。本书每章都配有检测题，读者首先要独立去练习，然后再对照答案与提示。书中提供了北京航空航天大学近年的考题及答案，供读者参考。

本书既可作为理工科大学的辅导教材，又可作为考研复习的教材。

本书第 1、5、6 章由傅丽华编写；第 2、3、4 章由郭绍建编写；第 7、8、9 章由萧亮壮编写。书中错漏不妥之处，敬请读者指正。

编　者

于北京航空航天大学

2003 年 4 月

出版者序

出版的起因

随着我国高等教育改革和高等院校招生数量的不断增长，越来越多的青年学子踏入了大学的校门，开始了人生中最为绚丽多彩的大学生活。面对扑面而来的浓郁的学习氛围，置身于美丽幽静的大学校园，伴随着朗朗的读书声，无数满怀豪情的学子们意气风发，憧憬着美好的未来。当然，莘莘学子主要还是往返于教室和寝室之间，遨游于书海之中。毋庸置疑，大学的生活是浪漫美好的，但也是相当艰辛的，充满了成功的喜悦和失败的沮丧。大学的学习任务相当繁重，加上现在不断压缩学时，使许多学生疲于奔命，且很少答疑，对所学的知识难以深入理解，表现出不同程度上的浮躁。这一切都给不少同学带来了新的困惑和烦恼。为了使学生真正掌握所学知识的内涵，把握知识点，了解重点、难点和解题思路，达到事半功倍的效果，同时为帮助所有学生顺利通过各门功课，尤其是大学基础课程的考试，使他们能够不致过于艰辛地学完所有的课程。这便是我们推出这套丛书的出发点，也是我们组织出版这套丛书的主要目的所在。书中的个别地方的难度略大，主要是为部分学生日后考取研究生而做的铺垫性工作，并不是对所有学生的要求。

同类书的现状和推出本丛书的着眼点

面对五彩缤纷的同类图书，如果我们仔细观察，就会发现这些图书一直沿用着教材→辅导书→习题解答的老路在循环往复地进行。而所谓的辅导也仅是把教材中的内容加以重复而已。这就使学生有意无意间掉进了某个教材的旋涡，而不能真正抓住大纲所要求的知识点，从而导致了学生的视野狭窄，在以后的研究生入学等考试时陷于茫然不知所措的地步。

实际上，对于学生来说，必须明白的是，教材只是教学大纲的一种体现形式，日后的研究生入学考试等并不会测定学生对某种教材的掌握程度，而是要测定对大纲中所要求的知识的掌握程度。这就要求在学习时，紧扣教材，但不拘泥于教材，要在教材的基础上适当扩展视野，以大纲为主线进行学习。这是大学学习与中小学学习的最大区别，而且对于在读的天之骄子来说，掌握了方法和明确了学习的思路后，实现起来并不困难。

从学习的角度来看，一个人对新知识的学习的过程一般是“学习→理解→模糊和淡忘→再学习(复习)→再理解→…→与自身已有的知识融合”。这种规律是客观存在的，也是学校实行“讲课→作业→考试”模式的重要依据。无疑，这种教与学过程的模式化是必要的，关键是如何灵活地运用这种模式，不使学生因遵循这种模式而僵化了思路。从这一点上看，我们推出这套紧扣大纲而超越某一版本教材的辅导书，正是这样一种尝试。

编写的风格和宗旨

在本丛书策划启动时，我们与有关作者反复讨论，确定了本套丛书所要遵循的原则如下：

1. **强化大纲要求，摆脱具体教材的束缚**。如前所述，大学教学的主要目的是让学生掌握大纲所要求的知识，而不是某一个版本的教材，本丛书内容安排均是依照教学大纲而进行的，包括了教学大纲所要求的全部知识要点，而且绝大部分教材的内容也是依此安排的。这样本丛书的总体布局，甚至章节设置都与大部分教材是一致的，可使学生在学习的过程中，同步使用我们的学习指导书。

2. **强调学习和做题的技巧，减少习题的数量**。做习题，实际上是对所学知识的巩固，但在一定程度上又要综合运用各方面的知识，超过了巩固知识的基本要求，而是在此基础上有所提高。于是，有些学生增加了做题的数量，力求面面俱到。这其实是不可能的，也是不必要的。大学教学的主要要求是掌握教学大纲所要求的基本知识点，并不要求学生能够求解超级难题。因此，只要掌握一定的解题技巧，能够求解中等难度的习题即可。本丛书的例题讲解多，目的是要介绍更多的技巧；习题数量有限，是既要达到复习巩固的目的，又要避免陷入茫茫题海，浪费宝贵的时间。

3. **着眼日常学习，突出应试能力**。从学校考核角度来看，考试是衡量学生是否达标的基本方式。从学习角度来看，考试是促进学生把本阶段所学的知识与自身已有的知识融合起来的、达到综合提高的目的。因此，应该从两方面着手：一是临场的做题能力；二是综合提高的能力。基于这种考虑，我们在书中增加了期中和期末考试模拟题。一则是给学生多提供一个自我检测的机会，另则是促进学生全面理解所学的内容。

我们的期望

一个新生命的诞生是可以由父母控制的；而一旦诞生，其成长和发展却是其父母所无法完全控制的，也是不以任何人的意志而转移的；每个生命都依照其自身的规律成长、发展，是惟一的、个性化的。本丛书是我们一手策划的，其影响和作用却不是我们所能够完全左右的，它的成败最终取决于读者的认可程度。我们期望，它能够为所有选用它的学生提供一些必要的帮助，使他们顺利学完该课程，并为日后的学习和工作打下坚实的基础。当然，学习是一个复杂的过程，并不是一套丛书能够完全解决的。同时，我们也期望读者在通过我们的图书得到知识之际，能够培养出勤奋、严谨的学习态度和坚韧顽强、不屈不挠的意志。这是所有成功人士必须具备的个人素质！

最后，向所有选用我们这套丛书的读者致意。你们的支持是我们的动力，你们的成绩也是我们的骄傲！

北京航空航天大学出版社

目　录

第 一 章

随机事件的概率

1.1 本章概要

1.1.1 随机事件与样本空间

1. 随机事件

1) 对随机现象进行观察和试验称为随机试验，简称试验。用字母 E 表示。

2) 在随机试验中可能发生也可能不发生的事件称为随机事件，简称事件。一般用 $A, B, C, \cdots$ 表示。

3) 试验中的每一个可能结果都是一个最简单的随机事件，称为基本事件。

4) 由若干个基本事件组合而成的事件，称为组合事件。

5) 在试验中必然发生的事件称为必然事件，记为 S。

6) 在试验中不可能发生的事件称为不可能事件，记为 $\varnothing$。

2. 样本空间

定义 随机试验 E 的全体基本事件组成的集合，称为试验 E 的样本空间，记为 S。

基本事件是 E 的样本空间中的元素。基本事件又称为样本点。

3. 随机事件之间的关系和运算

1) 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B \supset A$；或者称事件 A 包含于事件 B，记为 $A \subset B$。

2) 若两个事件满足 $A \supset B$ 且 $B \supset A$，则称这两个事件相等，记为 $A = B$。

3) 若"两个事件 A 与 B 中至少有一个发生"这一事件记为 C，则称 C 为 A 与 B 的和(或并)，记为 $C = A + B$(或 $C = A \cup B$)。

4) 若"两个事件 A 与 B 同时发生"这一事件记为 C，则称 C 为 A 与 B 的积(或交)，记为 $C = AB$(或 $C = A \cap B$)。

5) 若"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件记为 C，则称 C 为 A 与 B 的差，记为 $A - B$。

6) 若"事件族 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 中至少有一个发生"这一事件记为 C，则称 C 为事件族的和，记为 $C = \sum\limits_{i=1}^{m} A_i$。

7) 若"事件族 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 同时发生"这一事件记为 C，则称 C 为事件族的积，记为

$C = \prod_{i=1}^{m} A_i$。

8) 若事件 A 与 B 满足 $AB = \varnothing$,则称事件 A 与 B 互不相容(或称互斥)。

9) 若事件 A 与 B 满足 $AB = \varnothing$,且 $A + B = S$,则称 A 与 B 互逆(或 A 与 B 互为对立事件),记为 $A = \bar{B}$ 或 $B = \bar{A}$。

10) 事件之间的运算满足:

交换律　$A + B = B + A$,　$AB = BA$

结合律　$(A + B) + C = A + (B + C)$

　　　　$(AB)C = A(BC)$

分配律　$(A + B)C = AC + BC$

11) 德莫根(De Morgan)公式

$$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}, \qquad \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$
$$\overline{\sum_i A_i} = \prod_i \bar{A}_i, \qquad \overline{\prod_i A_i} = \sum_i \bar{A}_i$$

1.1.2　概率的定义及性质

1. 概率的古典定义

1) 若随机试验 E 的样本空间满足:

随机试验 E 的样本空间 S 只有有限个样本点,即 $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$。

每个基本事件发生的可能性相等,即

$$P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n)$$

则称这类随机试验为古典概型。

2) 在古典概型中事件 A 的概率定义为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 中所含样本点个数}}{\text{样本空间所含样本点总数}}$$

3) 古典概率具有以下性质:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, \qquad P(S) = 1$$

若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容,则

$$P\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

2. 概率的统计定义

1) 事件频率的定义

设某试验重复做 n 次,事件 A 共发生了 n_A 次,则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为 n 次试验中事件 A 发生的频率,记为 $f_n(A)$。即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

$$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1, \qquad f_n(S) = 1$$

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容，则

$$f_n\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

2）概率的统计定义

若随着试验次数的增大，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 在某个常数 p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ 附近摆动，并且逐渐稳定于 p，则称该常数 p 为事件 A 的概率，即 $\mathrm{P}(A) = p$。称这样的概率为统计概率（或经验概率）。

3．概率的几何定义

1）设随机试验 E 的样本空间 S 是一个可度量的有界区域，向区域 S 内投掷一质点 M，若质点 M 落在 S 内的任意子区域内的可能性大小与 A 的度量（记作 $\mathrm{L}(A)$）成正比，而与 A 的形状和位置无关，则称此试验为几何随机试验。简称几何概型。

2）设几何概型的样本空间为 S，A 是含于 S 内的任一随机事件，即 $A \subset S$，则称

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{L}(A)}{\mathrm{L}(S)}$$

为事件 A 的概率，也称为几何概率。

其中，$\mathrm{L}(A)$ 是事件 A 的度量；$\mathrm{L}(S)$ 是样本空间的度量。

4．概率的公理化定义

设 $\mathrm{P}(A)$ 是定义在试验 E 的全体事件（包含 $\varnothing$ 和 S）所组成的集合 $\mathscr{F}$ 上的一个实值函数。若 $\mathrm{P}(A)$ 满足下列三个性质：

(1) 对每一个 $A \in \mathscr{F}, 0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1$；

(2) $\mathrm{P}(S) = 1$；

(3) 对互不相容的 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1, 2, 3, \cdots$，

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$$

则称 $\mathrm{P}(A)$ 为事件 A 的概率。

5．概率的性质

1）$0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1$；

2）$\mathrm{P}(S) = 1$；

3）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 互不相容，则 $\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$；

4）$\mathrm{P}(\varnothing) = 0$；

5）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$$

6）$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A})$；

7) 若 $A \supset B$,则 $P(A) \geqslant P(B)$,且

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

8) 对任意事件 A,B 有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

一般地,对任意事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

1.1.3 条件概率

1. 条件概率的定义

若 $P(A)>0$,称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下 B 发生的条件概率。

条件概率具有概率的一般性质。

2. 设 $P(A_1A_2\cdots A_{i-1})>0$,

$$P(A_i\mid A_1A_2\cdots A_{i-1})=\frac{P(A_1A_2\cdots A_i)}{P(A_1A_2\cdots A_{i-1})},\quad i=2,3,\cdots$$

3. 乘法公式

$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$,　其中 $P(A)>0$

$P(AB)=P(B)P(A\mid B)$,　其中 $P(B)>0$

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$

1.1.4 全概率公式与贝叶斯公式

1. 全概率公式

设随机试验为 E, S 为其样本空间, $A,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 E 中的事件,且满足:

1° $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互不相容;

2° $B_1+B_2+\cdots+B_n=S$;

3° $P(B_i)>0$, $i=1,2,\cdots,n$,则有全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

2. 贝叶斯公式(逆概率公式)

设事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足:

1° $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互不相容;

2° $B_1 + B_2 + \cdots + B_n = S$；

3° $\mathrm{P}(B_i) > 0, i = 1,2,\cdots,n$，则对任意事件 $A(\mathrm{P}(A) > 0)$，有贝叶斯公式

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}\mathrm{P}(B_j)\mathrm{P}(A \mid B_j)}, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

3. 说　明

1) 满足全概率公式中的条件 1°，2° 的事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 称为样本空间 S 的一个划分，或称完备事件组。

2) 全概率公式非常重要，对于一些复杂的事件，有时直接用古典概率求其事件的概率不好求，则可以利用全概率公式，把它转化成一组事件和的事件来求概率。在进行这种转化时，关键是找完备事件组 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，使事件 $A = AB_1 + AB_2 + \cdots + AB_n$；再用一次加法公式和一次乘法公式，便可求出事件 A 的概率。关于找 S 的一个完备事件组，要具体问题具体分析。值得注意的是，把全概率公式的条件 1°，2° 可以理解为：事件 A 能且仅能与 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 之一同时发生，即把 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 看成导致 A 发生的一组原因，而这组原因的概率是已知的或比较容易计算，那么求 A 的概率问题也就得到了解决。

1.1.5　事件的独立性

1. 对任意事件 A, B，若

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

则称事件 A 与 B 相互独立。

2. 对任意事件 A, B, C，若满足：

1° $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$，$\mathrm{P}(AC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$，$\mathrm{P}(BC) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$；

2° $\mathrm{P}(ABC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$，

则称事件 A, B, C 相互独立。

3. 对任意事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若对任意 $k\ (2 \leqslant k \leqslant n)$，任意 $1 \leqslant i_1 < i_2 \cdots < i_k \leqslant n$，都有

$$\mathrm{P}\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right) = \mathrm{P}\left(A_{i_1}\right)\mathrm{P}\left(A_{i_2}\right)\cdots\mathrm{P}\left(A_{i_k}\right)$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立。

4. 事件独立性的性质

1) 对任意事件 A, B，且 $\mathrm{P}(B) > 0$，则事件 A 与 B 独立的充分必要条件是

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$$

2) 必然事件 S，不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件相互独立。

3) 若事件 A 与 B 相互独立，则下列每对事件：A 与 $\bar{B}$；$\bar{A}$ 与 B；$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立。

4) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 也相互独立。其中 B_i 为 A_i 或 $\bar{A}_i$，$i = 1,2,\cdots,n$。

1.2　基本要求与重点

1.2.1　基本要求

1. 理解随机事件和样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算。
2. 理解并熟练掌握概率的古典定义，会作计算。
3. 了解几何概率，了解概率的统计定义、公理化定义。
4. 熟练掌握概率的基本性质，会用于计算。
5. 理解并掌握条件概率的定义，掌握乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式。
6. 理解并会运用事件独立性的概念。

1.2.2　重　点

概率的概念；古典概率及其计算；概率的性质；乘法公式、全概率公式；事件的独立性。

1.3　典型例题解析

【例 1】　一盒装有 2 个伍分，3 个贰分，5 个壹分的硬币，从盒中任取 5 个硬币，求取出硬币的总值超过壹角的概率。

〖解析〗　设 A = {取出硬币总值超过壹角}。

此题可以看成组合问题，故其样本空间含样本点个数为 C_{10}^5。对于事件 A，一是可以从 2 个伍分中任意取 1 个，另外 4 个可以先从 3 个贰分中任意取 2 个，再从 5 个壹分中任意取 2 个。或者从 3 个贰分中任意取 3 个，再从 5 个壹分中任意取 1 个，所有的取法为 $C_2^1(C_3^2C_5^2+C_3^3C_5^1)$。二是也可以将 2 个伍分的全部取出，再从 8 个贰分、壹分的硬币中任取 3 个。所有的取法为 $C_2^2C_8^3$。所以

$$P(A)=\frac{C_2^1(C_3^2C_5^2+C_3^3C_5^1)+C_2^2C_8^3}{C_{10}^5}=\frac{1}{2}$$

此题也可以用逆事件方法做。A 的逆事件就是取出硬币总值不超过壹角，即

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_2^1C_5^4+C_3^2C_5^3+C_3^3C_5^2+C_5^5+C_2^1C_3^1C_5^3}{C_{10}^5}=\frac{1}{2}$$

【例 2】　从 0 至 9 这 10 个数码中任意取 4 个数码，求所取的 4 个数码能排成四位偶数的概率。

〖解析〗　设 A = {取到的 4 个数码排成四位偶数}。

此题可以看成排列问题，故其样本空间所含样本点个数为 A_{10}^4，对于事件 A，先从 0，2，4，6，8 这 5 个数码中任取 1 个排在个位数上，然后从剩下的 9 个数码中任取 3 个排列在其他 3 个

位置上，可能排法为 $A_5^1A_9^3$。但应注意到 0 不能放在千位数上，应去掉此种情况的样本点数 $A_1^1A_4^1A_8^2$。所以符合事件 A 的样本点为 $A_5^1A_9^3-A_1^1A_4^1A_8^2$。因此

$$P(A)=\frac{A_5^1A_9^3-A_1^1A_4^1A_8^2}{A_{10}^4}=\frac{41}{90}$$

或
$$P(A)=\frac{A_1^1A_9^3+C_4^1(A_9^3-A_8^2)}{A_{10}^4}=\frac{41}{90}$$

【例 3】 从 1 到 100 的 100 个整数中任取 1 个数，问取出的数能被 3 或 4 整除的概率。

〖解析〗 设

$$A=\{取到的数能被 3 整除\},\quad B=\{取到的数能被 4 整除\}$$
$$C=\{取到的数能被 3 或 4 整除\}$$

在 $1,2,\cdots,100$ 中，能被 3 整除的数的个数 $\left[\frac{100}{3}\right]=33$；$1,2,\cdots,100$ 中能被 4 整除的数的个数 $\left[\frac{100}{4}\right]=25$。事件 A,B 是相容的，且 AB 包含 8 个基本事件 12,24,36,48,60,72,84,96。所以

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{33}{100}+\frac{25}{100}-\frac{8}{100}=\frac{1}{2}$$

【例 4】 设 m 个人排成一行，甲、乙是其中的 2 个人，求甲乙之间恰好有 r 个人的概率。

〖解析〗 设 $A=\{甲乙之间恰有 r 个人\}$。

此题是一个排列问题，故其样本空间所含的样本点个数为 $m!$。再分析事件 A：从 m 个人中去掉甲乙 2 人后取 r 个人放在甲乙之间，取法为 C_{m-2}^r，将夹在甲乙之间的 r 个人进行全排列排法有 $r!$ 种。将甲乙 2 人位置互换换法有 $2!$ 种；将甲乙及中间的 r 个人当作 1 个人与其他剩下的 $m-r-2$ 个人进行全排列有 $(m-r-2+1)!$ 种，则事件 A 含样本点个数为 $C_{m-2}^r\cdot r!(m-r-1)!2!$。所以

$$P(A)=\frac{C_{m-2}^r\cdot r!2!(m-r-1)!}{m!}$$

【例 5】 盒中有 a 个白球，b 个红球，从中随机地连续取球。每次取 1 个，取后不放回。求第 k $(1\leqslant k\leqslant a+b)$ 次取到白球的概率。

〖解析〗 设 $A=\{第 k 次取到白球\}$。

解法 1 从 $a+b$ 个球中不放回地一个一个地将任意摸出的 k 个球进行排队，故其样本空间含样本点个数为 A_{a+b}^k。对于事件 A，可以先从 a 个白球中任取 1 个白球排列在第 k 个位置上，取法为 A_a^1；再从剩下的 $a+b-1$ 个球中任取 $k-1$ 个球排在前面的 $k-1$ 个位置上，取法为 A_{a+b-1}^{k-1}。符合事件 A 的样本点个数为 $A_a^1A_{a+b-1}^{k-1}$，故

$$P(A)=\frac{A_a^1A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k}=\frac{a}{a+b}$$

解法 2 将 $a+b$ 个球一个一个不放回地全部取出进行排队，故其样本空间含样本点个数为 A_{a+b}^{a+b}。对于事件 A：先从 a 个白球中任取 1 个放在第 k 个位置上，再将剩下的 $a+b-1$ 个球在剩下的 $a+b-1$ 个位置上排队。符合事件 A 的样本点为 $A_a^1 A_{a+b-1}^{a+b-1}$，故

$$P(A)=\frac{A_a^1 A_{a+b-1}^{a+b-1}}{A_{a+b}^{a+b}}=\frac{a}{a+b}$$

说明 1° 求同一事件的概率，可以选择不同的样本空间。但在做题过程中，要注意到公式 $P(A)=\frac{k}{n}$ 中的 n 与 k 要一致，即如果将样本空间 S 看成排列问题，那么事件 A 也要看成排列问题，否则就会出现错误答案。

2° 上面用 2 种解法求出了事件 A 的概率，从结果看事件 A 发生的概率与 k 无关，即不管哪一次取到白球的概率都是相等的，这是抽签问题的数学模型。从以上分析可以看出抽签时每个人的机会都是均等的，而与抽签的先后顺序无关。概率论解释了日常生活中抽签的合理性。

【例 6】 从 5 双不同的鞋子中任意取 4 只，求 4 只鞋子中至少有 2 只配成 1 双的概率。

〖解析〗 设 $A=\{4$ 只鞋子中至少有 2 只配成 1 双$\}$。

样本空间所含样本点个数为 C_{10}^4。

解法 1 对于事件 A，满足要求的有两类：第一类是 4 只中恰好有 2 只配对，其取法为 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$ 种（先从 5 双中任取 1 双，再从剩余的 4 双中任取 2 双，从这 2 双中各取 1 只）；第二类是 4 只中恰好配成 2 双，其取法为 C_5^2 种。故

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解法 2 对第一类可以先从 5 双中任取 1 双，再从剩下的 8 只中任意取 2 只，去掉可能成双的 4 种情况，其取法为 $C_5^1(C_8^2-C_4^1)$ 种。故

$$P(A)=\frac{C_5^1(C_8^2-C_4^1)+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解法 3 对第一类可先从 5 双中任意取 1 双，再从剩下的 8 只中任取 1 只，去掉与此只配对的另一只，再从 6 只中任取 1 只，所以取法为 $C_5^1\frac{C_8^1C_6^1}{2!}$（$C_8^1$ 中可能取到 a，C_6^1 中可能取到 b，也许 C_8^1 中取到 b，C_6^1 中取到 a，对样本空间 S 中的样本点，不关心 ab 与 ba 的顺序，即要排除排列因素，故除以 $2!$）。故

$$P(A)=\frac{C_5^1\frac{C_8^1C_6^1}{2!}+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解法 4 应用逆事件求事件 A 发生的概率，即 $\overline{A}$ 为取出的 4 只鞋无 1 双配对。

对于事件 $\overline{A}$，可以先从 5 双鞋子中任取 4 双，再从每双中任取 1 只，其取法为 $C_5^1C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$