泛函分析与半群

（上　册）

〔美〕E. 希尔　R. S. 菲列浦斯著　吴智泉　王振鹏　刘隆复譯

泛函分析与半群

（上　册）

〔美〕E. 希　　尔
　　　R. S. 菲列浦斯　著

吴智泉　王振鹏　刘隆复　譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是根据原书 1957 年重版本翻譯的．全书共分五部分：泛函分析，半群的基本性质，半群的高等分析理論，特殊半群与应用，理論的推广．譯本分上、下两册，上册包含一、二两部分，下册为其余三部分和参考文献．

本书上册第一部分闡述現代泛函分析的基本理論，共六章，分别叙述空間的代数性质和拓扑性质，綫性算子，从純量到向量的函数，Banach 代数及其表示理論，算子演算和抽象值全純函数的解析表示．第二部分闡述半群的基本理論，而把高等的、特殊的理論放在后面的三、四部分．这一部分也分六章，其中前两章是属于緒論性的，中間两章讲述单参数半群的基本理論，最后两章討論半群的无穷小母元，豫解式和半群的生成．

本书可供高等学校数学系高年級学生、研究生、教师、科研工作人員参考．

FUNCTIONAL ANALYSIS AND SEMI-GROUPS

E. Hille, R. S. Phillips

Amer. Math. Soc., 1957. 2nd. Edit.

泛函分析与半群（上册）

吳智泉　王振鵬　刘隆复　譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷六厂印刷　　新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32　印張 15 4/32　排版字数 397,000

1964 年10月第 1 版　1964 年10月第 1 次印刷　印数 1—5,500

統一书号 13119·591　定价(科六) 2.20 元

修訂版序言

自从 1948 年本书第一版印行至今已經过去七年了. 数学界对这部著作所給予的深切关注使作者感到十分高兴;事实上,初版在 1954 年已絕版. 1951 年出現了本书的俄文譯本[Функциональный анализ и полугруппы, Издательство Иностранной Литературы, 1951.].

1948 年以后半群的分析理論及其应用都有很大的发展. K. Yosida 和 Hille 1948 年各自独立地得到了基本的生成定理并且在一系列重要文章中将其应用到扩散方程. 在 Yosida 工作的影响下,从 1949 年起 Hille 利用半群理論对 Cauchy 問題作了新的研究. 不久以后, W. Feller 注意到这个新的途徑的可能性,他和他的学生对这个理論做出了很多貢献; 我們特别要提到他对扩散方程的奇异边值問題的深刻研究. 在綫性算子半群一般理論的研究中, 另一个早期的数学家是 R. S. Phillips, 他塡补了 Hille 遺留下来的許多空白处,并以半群代数的表示理論,微扰方法,广义的半群类和共軛半群丰富了这个理論. 另外, Hille 于 1948 年建立了 Lie 半群理論的基础.

早在 1952 年本书就有重印的必要,而由于这个理論的新的进展显然也需要扩充和修訂, Hille 邀請 Phillips 合写这个新版本. 現在終于呈現在讀者面前了. 原书已經完全重写过, 主要是由 Phillips 完成的; 旧有的結构以及大部分旧有的結果仍然保留,但同时也确实作了非常多的补充.在新版中改动的地方,一部分是关于解釋的, 一部分是关于方法和結果的. 例如为了合乎时代的精神,代数的工具現在起着重要的作用,在本书中較早地引进;这使我們有可能在第十五和第十六章中建立起更为完善的算子演算和譜論. 另一方面,我們并沒有用代数方法来代替 Hille 为了这些目的而使用的 Laplace-Stieltjes 变換方法, 只是以新的工具作了补充.

第一部分——泛函分析——已予扩充并重新编排过．原来的第四章（从向量到向量的函数），除去为本书的中心內容所必需的部分已被合并到第三章外，其余的都放在本书的末尾．新的第四章包含可易 Banach 代数的 Gelfand 表示理論的論述以及原来第五章（Banach 代数的分析学）的絕大部分和第十二章（关于 Banach 代数的注記）．新的第五章包含旧版第五章的 Banach 代数的算子演算，但已經过修改，此外，它还包含封閉的无界綫性算子的算子演算．Laplace 积分的討論已由第十章移到第六章．現在称为半群的基本性质的第二部分，只包含了原来第二部分前一半的大部分材料，不过，也作了重要的补充：第十和第十一章中关于半群的 Phillips 分类和第十二章中他对于生成問題的解决．新的第三部分——半群的高等分析理論——是以原来的第二部分后一半为基础的．但是除了后两章之外，此处的材料大部分都是新的．它包含 Phillips 对这个理論的主要貢献(微扰論，共軛半群的理論，算子演算和譜論)．第四部分——特殊半群及其应用——相当于原来的第三部分．此处主要的改变是省略了应用于偏微分方程的討論．这些应用現在已成长得如此惊人，以致需要用专著来加以論述．我們能做到的是在第二十三章中插入了关于抽象 Cauchy 問題的討論．最后，原来的附录已变成标題为理論的推广的第五部分．此处主要的补充是 Hille 关于 Lie 半群理論的研究．

正如通常那样，修訂工作花費了比原計划較多的劳动和时間．

我們在这里愉快地向那些在修訂版原稿的准备过程中給以帮助的朋友們表示感謝．我們从 R. P. Agnew, A. V. Balakrishnan, J. Brooks, N. Dunford, H. A. Dye, N. Jacobson, S. Kakutani, T. Kato, D. G. Kendall, R. A. Moore, J. Schwartz 和 K. Yosida 那里得到了不少帮助和有价值的建議．对于所有給我們以帮助的朋友們，无論是提到名字的还是沒有提到名字的，在此均致以衷心的謝意．

Einar Hille, R. S. Phillips

1956 年 9 月

目　　录

第二部分　半群的基本性质

第一部分

泛函分析

提　　要　本书的第一部分是闡述现代泛函分析的基本思想．共有六章：**抽象空間，綫性变換，向量值函数，Banach 代数，Banach 代数中的分析学**以及 **Laplace 积分与二項級数．**

我們从描述所要討論的空間的代数性质和拓扑性质开始，然后进而研究由一个如此的空間到另一空間的綫性算子．我們主要是从事 Banach 空間的研究，但是除了范数拓扑之外也出現其他一些拓扑．抽象函数理論从第三章开始，在这章中我們将研究从純量到向量的函数，从向量到純量的函数，以及从向量到向量的函数．后一題目的补充材料可在本书末尾的第二十六章中找到．Banach 代数是我們的中心論題之一．第四章中的討論引导到具有单位元素的可易 (B)-代数的 Gelfand 表示理論，給出了它的某些重要說明．在第五章中建立了我們的另一主要論題——算子演算(运算微积)——的堅实基础．关于沒有单位元素的不可易(B)-代数的补充材料可在第二十四章中找到．最后，第六章是研究在半平面上全純且滿足适当的有界性条件的抽象值函数的解析表示．这也是以后的討論中的主要工具之一．

第一章 抽象空間

1.1 引 言

本章企图对今后所需要的抽象空間理論的基本观念作出簡洁的概述. 这些材料分放在如下标名的四节之中:**拓扑概念**,**加性空間**,**綫性空間**和**代数空間**. 本书中的抽象空間通常是这种或那种类型的拓扑空間,而且都具有一定的代数結构. 这是选擇标題的根据. 正如实际情形那样,全部材料都取之于当代文献,而証明则經常被省略了.需要知道进一步的闡述的讀者可参考各节末尾所援引的文献.

1. 拓扑概念

1.2 集 合

設 $\mathfrak{S}$ 是具有元素 $x, y, \cdots$ 的抽象集合; X, Y, X_α 是 $\mathfrak{S}$ 的子集. 記号 $X \cup Y$ 和 $\bigcup_\alpha X_\alpha$ 表示所指出的子集的**并**, $X \cap Y$ 和 $\bigcap_\alpha X_\alpha$ 表示所指出的集合的**交**. 如果 $X \cap Y = \emptyset$(空集),則 X 和 Y 称为**不交的**. X 关于 $\mathfrak{S}$ 的余集写成 $\widetilde{X}$ 或 $\mathfrak{S} \ominus X$; 更一般地, X 关于 Y 的余集是 $Y \cap \widetilde{X} = Y \ominus X$. 具有性质 P 的元素 x 全体所組成的集合記为 $[x; P]$. 性质 P 从上下文已很清楚时这个記号也經常簡写为 $[x]$,或者在一串元素的情形簡写为 $\{x_n\}$.

称集合 $\mathfrak{S}$ 是**部分有序的**,如果对于某些元素对 x, y,存在一(**次**)**序关系** $x < y$ (也記作 $y > x$) 滿足

O_1. 对于所有 x, $x < x$ (**反身的**),

O_2. 如果 $x < y$ 且 $y < x$, 則 $x = y$ (**常义的**),

O_3. 如果 $x < y$ 且 $y < z$, 則 $x < z$ (**傳递的**).

如果 $x < y$, 我們說 x 被 y 包含或者 y 包含 x. 如果集合 $\mathfrak{S}$ 的所有的元素对 x, y 之間都有次序的关系,則称 $\mathfrak{S}$ 是**簡单有序的**. 从一

給定的关于部分有序集的命题，我們顚倒其中的所有序关系就得到**对偶**命题．应当指出，我們的公設是自对偶的，所以关于部分有序集的任何定理都蘊涵其对偶定理．

在部分有序集 $\mathfrak{S}$ 中，子集 Y 說是以 y_0 作为其**上界**，如果对所有 $y \in Y$ 都有 $y < y_0$．如果 $x > x_0$ 蘊涵 $x_0 > x$，則說 x_0 是 $\mathfrak{S}$ 的**最大**（或**极大**）**元素**．**下界**和**最小**（或**极小**）**元素**的概念可对偶地定义．对于极大元素的存在性，我們有常用的 Max Zorn 极大原理，其形式之一是：

极大原理 如果 $\mathfrak{S}$ 是一个部分有序集，其中每个簡单有序子集都在 $\mathfrak{S}$ 中有上界，則 $\mathfrak{S}$ 至少含有一极大元素．

极大原理等价于选擇公理；它在抽象集合論的很多部分中都能找到本质性的应用．

对于部分有序集，我們定义子集 Y 的**最小上界** (l.u.b.) 为包含于每一其他上界的上界．**最大下界** (g.l.b.) 可对偶地定义．由 O_2，一給定子集显然最多只能有一个 l.u.b. 和一个 g.l.b.．**格**是那样的部分有序集 $\mathfrak{S}$：其任二元素 x, y 都有 l.u.b. $x \vee y$ 和 g.l.b. $x \wedge y$．由归納法便知格的任何有限子集都有一个 l.u.b. 和一个 g.l.b.，对于給定的子集 X，如果这些界存在，我們分別以 $\vee[x; x \in X]$ 和 $\wedge[x; x \in X]$ 表示集合 X 的 l.u.b. 和 g.l.b.．

1.3 Hausdorff 空間

我們說点集 $\mathfrak{X}$ 和它的一族子集 Σ 确定了一 **Hausdorff 空間**，如果

H_1．对于 $\mathfrak{X}$ 的任二相异元素 x 和 y，有 Σ 中的不交的集合 N_1 和 N_2 使得 $x \in N_1$ 和 $y \in N_2$；

H_2．对于 Σ 中任意两个包含同一点 x 的集合 N_1 和 N_2，都有 Σ 中的集合 N_3 使 $x \in N_3 \subset N_1 \cap N_2$．

子集 $N \in \Sigma$ 称为 N 中每一 x 的**邻域**，而集合族 Σ 称为 $\mathfrak{X}$ 的**邻域基底**（或**基底**）．关于这些拓扑概念的詳細討論，讀者可参考 Alexandroff-Hopf[1] 或 Kuratowski[1]．

如果集合 G 中的每一点 x 都被 G 中的邻域所包含，則称 G 为

开的. 如果 $\widetilde{F}$ 是开的,則說 F 是**閉的**. 一族开集有开的并集,而一族閉集有閉的交集. 可数个开集之交称为 $\boldsymbol{G_\delta}$ **集合**,可数个閉集之并称为 $\boldsymbol{F_\sigma}$ **集合**.

所有开集的集合,或者等价地,所有閉集的集合,是用 $\mathfrak{X}$ 上所定义的拓扑来确定的. 于是任一满足下述条件的开集族 Σ' 都可作为 $\mathfrak{X}$ 的决定同一拓扑的邻域基底: $\mathfrak{X}$ 的每一开子集都是 Σ' 中的一族开集的并集. 如此的集合族 Σ' 将自动满足 Hausdorff 空間的公設 H_1 和 H_2. 由于这个理由,我們称任何包含点 x 的开集为 x 的邻域,記作 $N(x)$. 一給定点 x 的邻域基底是 x 的一族邻域 $\Sigma'(x)$,适合:每个包含 x 的开集也包含某个 $N(x)\in\Sigma'(x)$.

对于任一子集 X, X 的**閉包**定义为使每一 $N(x)$ 都与 X 有非空交集的所有 x 的集合,記为 $\overline{X}$. 等价地, $\overline{X}$ 是所有包含 X 的閉集的交. 易見閉包运算满足下述条件:

C_1. $\overline{X\cup Y}=\overline{X}\cup\overline{Y}$,

C_2. $\overline{\overline{X}}=\overline{X}$,

C_3. $\overline{X}=X$,如果 X 是空集或是一单点集. 由此导出 $X\subset\overline{X}$. 又, $X=\overline{X}$ 在且仅在 X 是閉集时成立.

注　一集合 $\mathfrak{X}$ 連同一定义在所有子集上且满足条件 C_1, C_2 和 C_3 的閉包运算称为**拓扑空間**. 翻譯成基底的术語,这意味着拓扑空間满足条件 H_2 以及**分离公理** H_1 的减弱的形式,即

H_1'. 对于 $\mathfrak{X}$ 的任二相异元素 x 和 y, 都有集合 $N\in\Sigma$, 使得 $x\in N$ 且 $y\notin N$.

我們以后总也不需要比 Hausdorff 空間更广的拓扑空間.

如果拓扑空間的每一点都有可数基,則我們說这个拓扑空間满足**第一可数公理**. 如果整个空間有一可数基,則說空間满足**第二可数公理**.

称点 x_0 为集合 X 的**极限点**, 如果 $x_0\in\overline{X\ominus x_0}$, 或者等价地, 如果每一 $N(x_0)$ 都含有 X 中的异于 x_0 的点. X 的极限点的集合 X' 称为 X 的**导集**; $\overline{X}=X\cup X'$, 从而 $X'\subset X$ 时 X 是閉的. 如果 $X'\supset X$, 則說 X 是**自密的**; 如果 $X'=X$, 則說 X 是**完备的**.

如果 $\overline{X}=\mathfrak{X}$，則說 X 在 $\mathfrak{X}$ 中**稠密**；如果 $Y\subset\overline{X\cap Y}$，則說 X 在 Y 中稠密. 如果有一可数集在 X 中稠密，則說 X 是**可分的**. 特別地，如果有一可数集在 $\mathfrak{X}$ 中稠密，則說 $\mathfrak{X}$ 是**可分空間**. 如果 $\mathfrak{X}$ 滿足第二可数公理，則它一定可分.

所有含于 X 中的开集的幷集是 X 的**內核**，記为 $\mathrm{Int}(X)$. 如果 $x\in\mathrm{Int}(X)$，則 x 是 X 的**內点**. X 的**边界**是 X 的閉包与 $\widehat{X}$ 的閉包之交. 如果 $\mathrm{Int}(\overline{X})=\emptyset$，則說 X 是**无处稠密的**（或**处处稀疏的**）. 如果 X 是可数个在 $\mathfrak{X}$ 中无处稠密的子集的幷集，則說 X 是 $\mathfrak{X}$ 中的**第一綱集**；否則說 X 是**第二綱**的. 如果 X 是第二綱的，則 $\mathrm{Int}(\overline{X})$ 非空.

如果 X_0 是 $\mathfrak{X}$ 的子集，則在 X_0 中可利用所有的集合 $N_0=N\cap X_0$（其中 $N\in\Sigma$）所組成的邻域基底 Σ_0 引入**相对拓扑**. 显然，在这个拓扑之下，子集 $Y\subset X_0$ 的**相对閉包**就是 $\overline{Y}\cap X_0$.

如果一拓扑空間不是两个不交非空开集之幷，則說它是**連通的**. 在連通空間中仅有空集和全空間是旣开又閉的集合（开閉集，clopen）. 称 $\mathfrak{X}$ 的子集 X_0 为連通的，如果它不是 X_0 的两个不交非空相对开子集之幷. 集合的**分支**（或**分量**）是不包含于任何更大的連通子集中的連通子集. 集合 X 的每个点确定唯一的包含它的分支，而 X 是其分支之幷.

集合族 $[A_\alpha]$ 称为集合 X 的**复盖**，如果集合 X 的每一点至少是一集合 A_α 的內点. 如果每个复盖 X 的开集族 $[G_\alpha]$ 都含有也复盖 X 的有限子族，則說集合 X 具有 **Borel 性质**. 如果集合族 $[B_\alpha]$ 的每个有限子族都有非空的交集，則說 $[B_\alpha]$ 具有**有限交性质**.

如果子集 X 具有 Borel 性质，則称 X 为**紧致的**. 特別地，如果 $\mathfrak{X}$ 具有 Borel 性质，則称 $\mathfrak{X}$ 为**紧致空間**. 利用取余集的方法容易証明：X 紧致当且仅当 X 的每个具有有限交性质的相对閉子集族有非空的交集. Hausdorff 空間的紧致子集一定是閉的，而且紧致集的每个閉子集也是紧致的. 如果一子集之閉包紧致，則此子集称为**条件紧致的**. 一空間称为**局部紧致的**，如果空間的每一点都有一条件紧致邻域. 一局部紧致空間可用适当增添另一点的